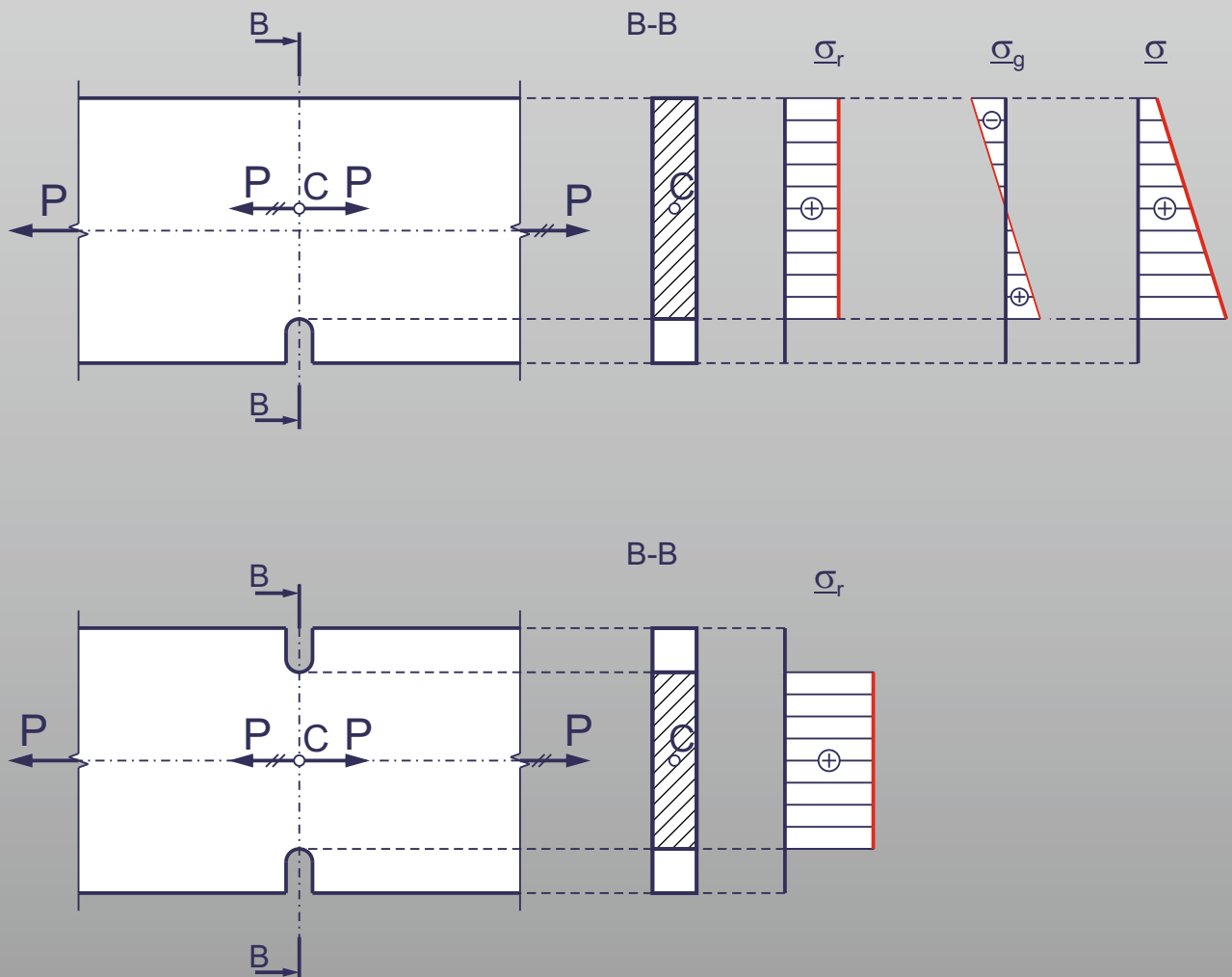


WYTRZYMAŁOŚĆ ELEMENTÓW KONSTRUKCJI

ZADANIA Z ROZWIĄZANAMI



Daniel B. Nycz

**WYTRZYMAŁOŚĆ ELEMENTÓW KONSTRUKCJI
ZADANIA Z ROZWIĄZANAMI**

Skrypt dla studentów Instytutu Technicznego
Uczelni Państwowej im. Jana Grodka w Sanoku

Sanok 2020

Recenzent:

prof. dr hab. inż. Marian Klasztorny
em. profesor Wojskowej Akademii Technicznej w Warszawie

Projekt okładki: Daniel Nycz

Skład i łamanie: Daniel Nycz

Zbiór zadań dla studentów na kierunku Mechanika i Budowa Maszyn w Instytucie Technicznym Uczelni Państwowej im. Jana Grodka w Sanoku. Skrypt obejmuje zagadnienia podstawowe z wytrzymałości elementów konstrukcji, w formie podsumowania podstaw teoretycznych oraz zbioru zadań z rozwiązaniami.

© Copyright by Uczelnia Państwowa im. Jana Grodka w Sanoku

Wydanie I

Sanok 2020

Wydawca

Uczelnia Państwowa im. Jana Grodka w Sanoku

Publikacja skryptu sfinansowana przez Uczelnię Państwową im. Jana Grodka w Sanoku

Produkcja: EXDRUK Spółka Cywilna Wojciech Żuchowski Adam Filipiak
biuroexdruk@gmail.com

ISBN 978-83-61802-43-3

Nakład: 60

SPIS TREŚCI

Przedmowa	5
1. Charakterystyki geometryczne figur płaskich	7
2. Wielkości przekrojowe w prętach prostych	37
3. Wielkości przekrojowe w belkach przegubowych	67
4. Wielkości przekrojowe w ortogonalnych ramach płaskich.....	87
5. Rozciąganie i ściskanie prętów krępych	107
6. Ścinanie techniczne łączników	139
7. Skręcanie swobodne prętów	159
8. Zginanie proste belek	185
9. Płaski stan naprężenia i odkształcenia	221
10. Związki fizyczne dla materiału izotropowego	243
11. Hipotezy wyężenia, złożone przypadki wytrzymałościowe	251
12. Wyboczenie prętów smukłych	277
Literatura	289

PRZEDMOWA

Niniejszy skrypt został opracowany przede wszystkim z myślą o studentach kierunku *Mechanika i Budowa Maszyn* w Instytucie Technicznym Uczelni Państwowej im. Jana Grodka w Sanoku. Zakres ujętego w nim materiału obejmuje ok. 80% zagadnień wykładanych na wydziałach inżynierii mechanicznej politechnik w Polsce. Materiał ten stanowi podstawową i niezbędną wiedzę w zawodzie inżyniera mechanika. Skrypt nie obejmuje takich zagadnień jak metody energetyczne, wyznaczenie przemieszczeń metodą prac przygotowanych, rozwiązywanie układów prętowych statycznie niewyznaczalnych metodą sił oraz rozwiązywanie układów prętowych statycznie niewyznaczalnych metodą elementów skończonych.

W zamierzeniu autora, skrypt ma ułatwić studentom zdobycie podstawowej wiedzy i umiejętności rozwiązywania zadań i problemów z zakresu wytrzymałości materiałów liniowo-sprężystych oraz wytrzymałości konstrukcji prętowych wykonanych z tych materiałów.

Każdy rozdział poprzedzony jest zwięzłym wstępem teoretycznym, w którym zawarte są informacje niezbędne do zrozumienia i opanowania rozwiązywanych zadań. W celach dydaktycznych, dużą część zadań rozwiązano dwoma sposobami. Student, a późniejszy inżynier, może zapoznać się z obiema metodami, a z czasem, gdy nabierze biegłości, wybrać i wykorzystywać jedną z metod obliczeniowych w danym zadaniu.

W celu pogłębienia wiedzy teoretycznej, studenci powinni skorzystać z podręczników akademickich z zakresu wytrzymałości materiałów i konstrukcji.

SANOK, 8.04.2020 R.

DANIEL NYCZ

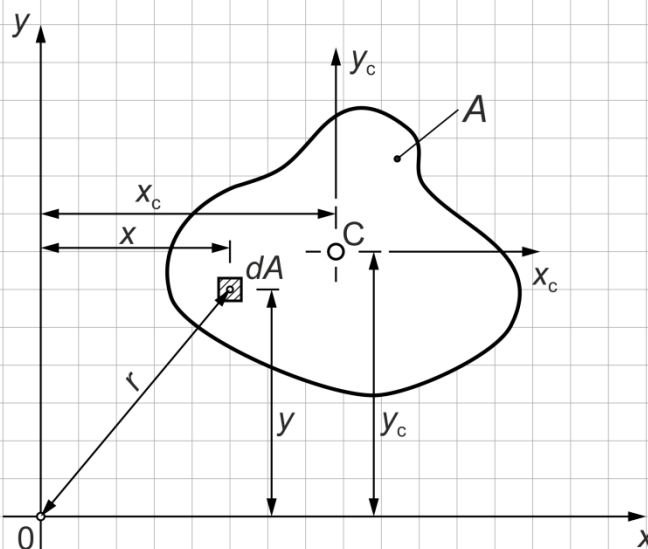
1.

CHARAKTERYSTYKI GEOMETRYCZNE FIGUR PŁASKICH

Podstawowym typem elementów maszyn są pręty pryzmatyczne (podane rozciąganiu, ściskaniu, skręcaniu lub ścinaniu technicznemu) lub belki pryzmatyczne (poddane zginaniu i ścinaniu przy zginaniu). Przekrój poprzeczny pręta/belki jest figurą płaską. Jeśli materiał pręta/belki jest jednorodny i izotropowy, to przekrój poprzeczny jest figurą płaską jednorodną. Charakterystyki geometryczne figur płaskich będących przekrojami poprzecznymi prętów/belek występują we wzorach opisujących warunki nośności/użytkowości prętów/belek.

Zakładamy, że przekrój poprzeczny pręta jest figurą płaską jednorodną. Momenty statyczne S (momenty geometryczne pierwszego stopnia) figury płaskiej o polu powierzchni A względem osi dowolnych x i y , określone są wzorami (rys. 1.1):

$$S_x = \int_A y \, dA \quad , \quad S_y = \int_A x \, dA \quad (1.1)$$



Rys. 1.1

Gdy znane jest położenie środka geometrycznego (środku masy) przekroju poprzecznego C , to wzory na momenty statyczne względem osi x i y przyjmują postać:

$$S_x = A \cdot y_c \quad , \quad S_y = A \cdot x_c \quad (1.2)$$

Na podstawie wzorów (1.2), współrzędne środka geometrycznego przekroju poprzecznego względem osi x, y (rys. 1.1), określone są wzorami:

$$x_c = \frac{S_y}{A}, \quad y_c = \frac{S_x}{A} \quad (1.3)$$

Momenty statyczne figury płaskiej względem osi przechodzących przez środek geometryczny przekroju poprzecznego C są równe zero. Osie te nazywamy osiami centralnymi lub środkowymi.

Jednostką momentu statycznego figury płaskiej jest m^3 (jednostka podstawowa SI) lub mm^3 .

Jeżeli figura płaska zostanie podzielona na części będące figurami regularnymi, to pole powierzchni całej figury jest sumą pól powierzchni poszczególnych części

$$A = \sum_{i=1}^n A_i \quad (1.4)$$

a momenty statyczne całej figury względem osi x i y są równe sumie momentów statycznych poszczególnych części względem tych osi:

$$S_x = \sum_{i=1}^n A_i y_{ci}, \quad S_y = \sum_{i=1}^n A_i x_{ci} \quad (1.5)$$

Momenty bezwładności figury płaskiej o polu powierzchni A względem osi x i y (osiowe momenty bezwładności), określone są wzorami (rys. 1.1):

$$I_x = \int_A y^2 dA, \quad I_y = \int_A x^2 dA \quad (1.6)$$

Biegunowy moment bezwładności figury płaskiej o polu powierzchni A względem bieguna O (początek układu współrzędnych), określony jest wzorem (rys. 1.1):

$$I_0 = \int_A r^2 dA \quad (1.7)$$

Po podstawieniu zależności (rys. 1.1):

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad (1.8)$$

do (1.7), otrzymuje się:

$$I_0 = \int_A r^2 dA = \int_A (x^2 + y^2) dA = \int_A x^2 dA + \int_A y^2 dA = I_y + I_x \quad (1.9)$$

Biegunowy moment bezwładności jest sumą momentów bezwładności względem osi wzajemnie prostopadłych, przechodzących przez biegun.

Moment odśrodkowy (moment dewiacji) figury płaskiej o polu powierzchni A względem układu osi x, y , określony jest wzorem (rys. 1.1):

$$I_{xy} = \int_A xy dA \quad (1.10)$$

Moment odśrodkowy figury płaskiej może przyjmować wartość ujemną, dodatnią lub równą zero. Moment odśrodkowy figury płaskiej monosymetrycznej lub bisymetrycznej względem jej osi centralnych jest równy zero. W ogólnym przypadku jest różny od zera.

Momenty bezwładności i dewiacji są momentami geometrycznymi drugiego stopnia.

Momenty bezwładności (względem osi i biegunowy) figury płaskiej przyjmują wartości dodatnie.

Jednostką momentów bezwładności i dewiacji figury płaskiej jest m^4 lub mm^4 .

Tabela 1.1 Charakterystyki geometryczne figur płaskich regularnych

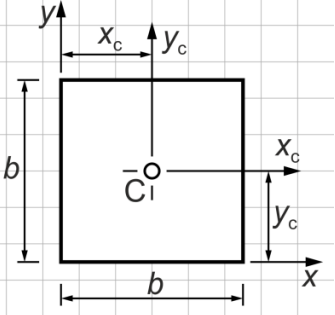
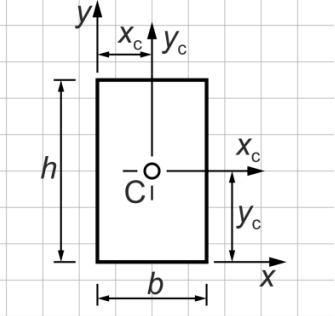
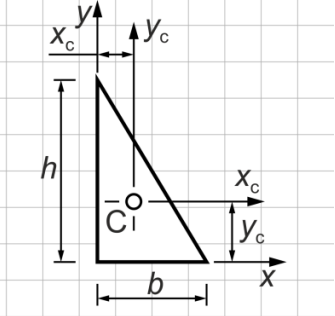
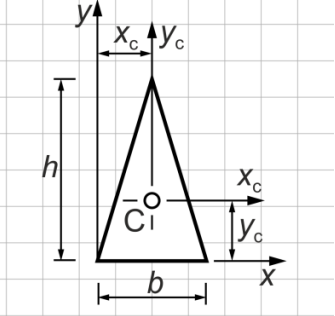
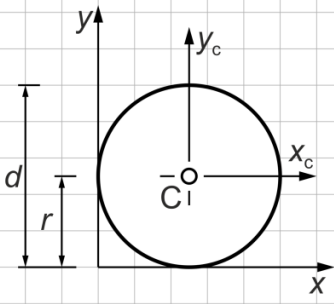
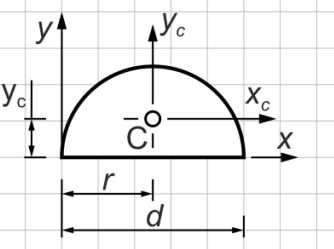
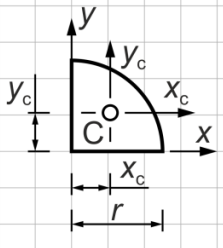
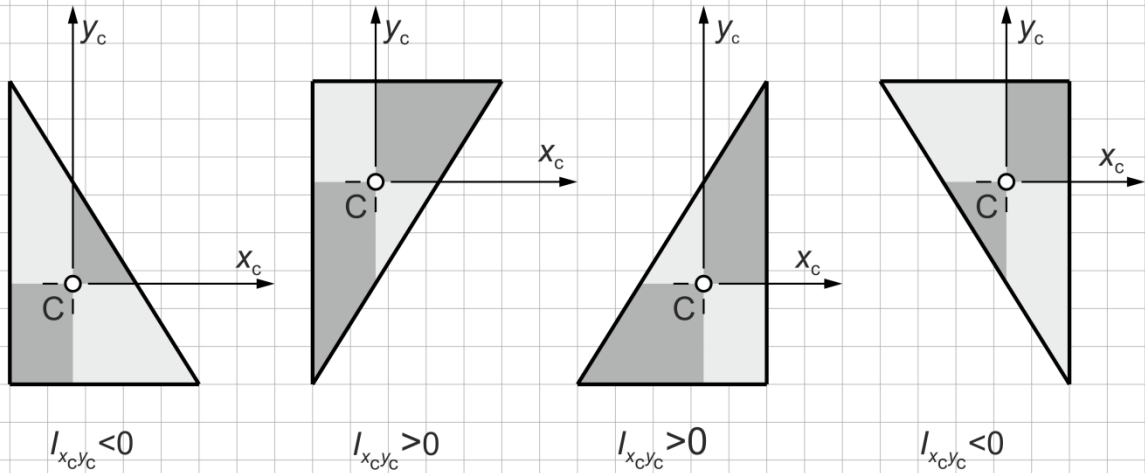
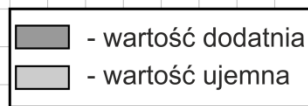
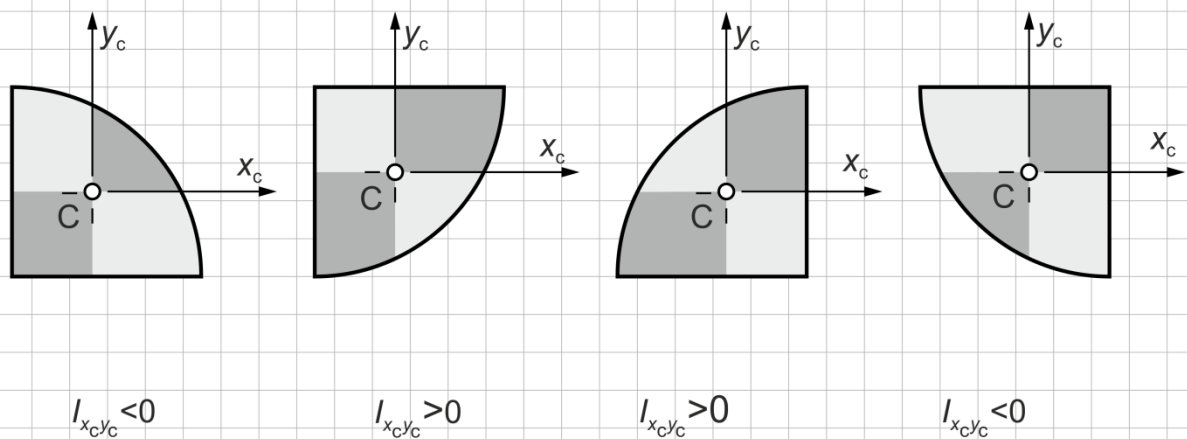
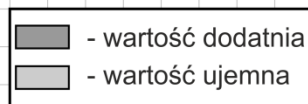
Figura	Pole powierzchni	Współrzędne środka geometrycznego	Momenty bezwładności względem osi centralnych	Moment odśrodkowy względem układu osi centralnych
	$A = b^2$	$x_c = y_c = \frac{b}{2}$	$I_{x_c} = I_{y_c} = \frac{b^4}{12}$	$I_{x_c y_c} = 0$
	$A = b \cdot h$	$x_c = \frac{b}{2}$ $y_c = \frac{h}{2}$	$I_{x_c} = \frac{bh^3}{12}$ $I_{y_c} = \frac{hb^3}{12}$	$I_{x_c y_c} = 0$
	$A = \frac{1}{2} b \cdot h$	$x_c = \frac{b}{3}$ $y_c = \frac{h}{3}$	$I_{x_c} = \frac{bh^3}{36}$ $I_{y_c} = \frac{hb^3}{36}$	$I_{x_c y_c} = \pm \frac{b^2 h^2}{72}$ znak zgodnie z rys. 1.2
	$A = \frac{1}{2} b \cdot h$	$x_c = \frac{b}{2}$ $y_c = \frac{h}{3}$	$I_{x_c} = \frac{bh^3}{36}$ $I_{y_c} = \frac{hb^3}{36}$	$I_{x_c y_c} = 0$

Tabela 1.1 Charakterystyki geometryczne wybranych figur płaskich (cd.)

Figura	Pole powierzchni	Współrzędne środka geometrycznego	Moment bezwładności względem osi centralnych	Moment odśrodkowy względem układu osi centralnych
	$A = \pi r^2$ lub $A = \frac{\pi d^2}{4}$	$x_c = y_c = r$ lub $x_c = y_c = \frac{d}{2}$	$I_{x_c} = I_{y_c} = \frac{\pi r^4}{4}$ lub $I_{x_c} = I_{y_c} = \frac{\pi d^4}{64}$	$I_{x_c y_c} = 0$
	$A = \frac{\pi r^2}{2}$ lub $A = \frac{\pi d^2}{8}$	$x_c = r$ $y_c = \frac{4r}{3\pi}$ lub $x_c = \frac{d}{2}$ $y_c = \frac{2d}{3\pi}$	$I_{x_c} = \left(\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi}\right) r^4$ $I_{y_c} = \frac{\pi r^4}{8}$ lub $I_{x_c} = \left(\frac{\pi}{128} - \frac{1}{18\pi}\right) d^4$ $I_{y_c} = \frac{\pi d^4}{128}$	$I_{x_c y_c} = 0$
	$A = \frac{\pi r^2}{4}$	$x_c = y_c = \frac{4r}{3\pi}$	$I_{x_c} = I_{y_c} = \left(\frac{\pi}{16} - \frac{4}{9\pi}\right) r^4$	$I_{x_c y_c} = \pm \left(\frac{4}{9\pi} - \frac{1}{8}\right) r^4$ znak zgodnie z rys. 1.3



Rys. 1.2



Rys. 1.3

TWIERDZENIE STEINERA

Moment bezwładności figury płaskiej o polu powierzchni A względem dowolnej osi oddalonej od środka geometrycznego jest równy momentowi bezwładności tej figury płaskiej względem równoległej osi centralnej, powiększonemu o iloczyn pola powierzchni A figury płaskiej i kwadratu odległości między osiami (rys. 1.1):

$$I_x = I_{x_c} + A(y_c)^2 \quad , \quad I_y = I_{y_c} + A(x_c)^2 \quad (1.11)$$

Moment odśrodkowy figury płaskiej o polu powierzchni A względem układu osi o początku oddalonym od środka geometrycznego jest równy momentowi odśrodkowemu tej figury płaskiej względem równoległego układu osi centralnych, powiększonemu o iloczyn pola powierzchni A figury płaskiej i obydwu współrzędnych środka geometrycznego (rys. 1.1):

$$I_{xy} = I_{x_c y_c} + A x_c y_c \quad (1.12)$$

OBRÓT OSI CENTRALNYCH

Wzory transformacyjne dla momentów bezwładności i momentu odśrodkowego do układu osi ξ, η obróconego o kąt φ przyjmują postać (rys. 1.4):

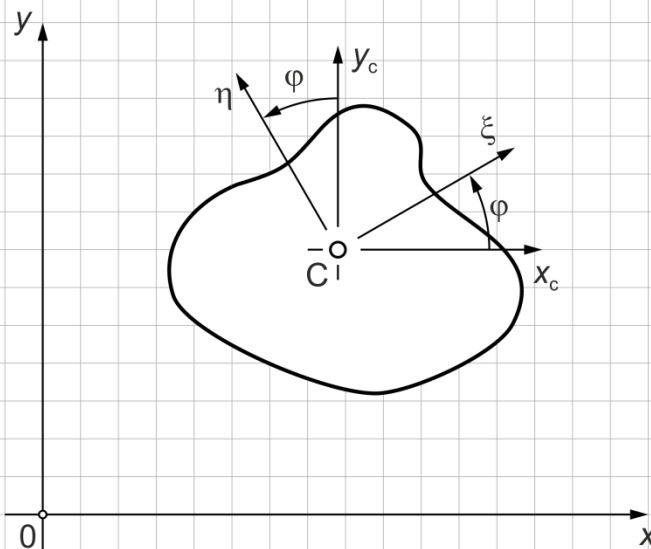
$$I_{\xi} = \frac{1}{2}(I_{x_c} + I_{y_c}) + \frac{1}{2}(I_{x_c} - I_{y_c}) \cos 2\varphi - I_{x_c y_c} \sin 2\varphi \quad (1.13)$$

$$I_{\eta} = \frac{1}{2}(I_{x_c} + I_{y_c}) - \frac{1}{2}(I_{x_c} - I_{y_c}) \cos 2\varphi + I_{x_c y_c} \sin 2\varphi \quad (1.14)$$

$$I_{\xi\eta} = \frac{1}{2}(I_{x_c} - I_{y_c}) \sin 2\varphi + I_{x_c y_c} \cos 2\varphi \quad (1.15)$$

Kąt φ dodatni jest przeciwnie do obrotu wskazówek zegara. Suma momentów bezwładności osi centralnych jest stała (nie zależy od kąta obrotu φ):

$$I_{x_c} + I_{y_c} = I_{\xi} + I_{\eta} \quad (1.16)$$



Rys. 1.4

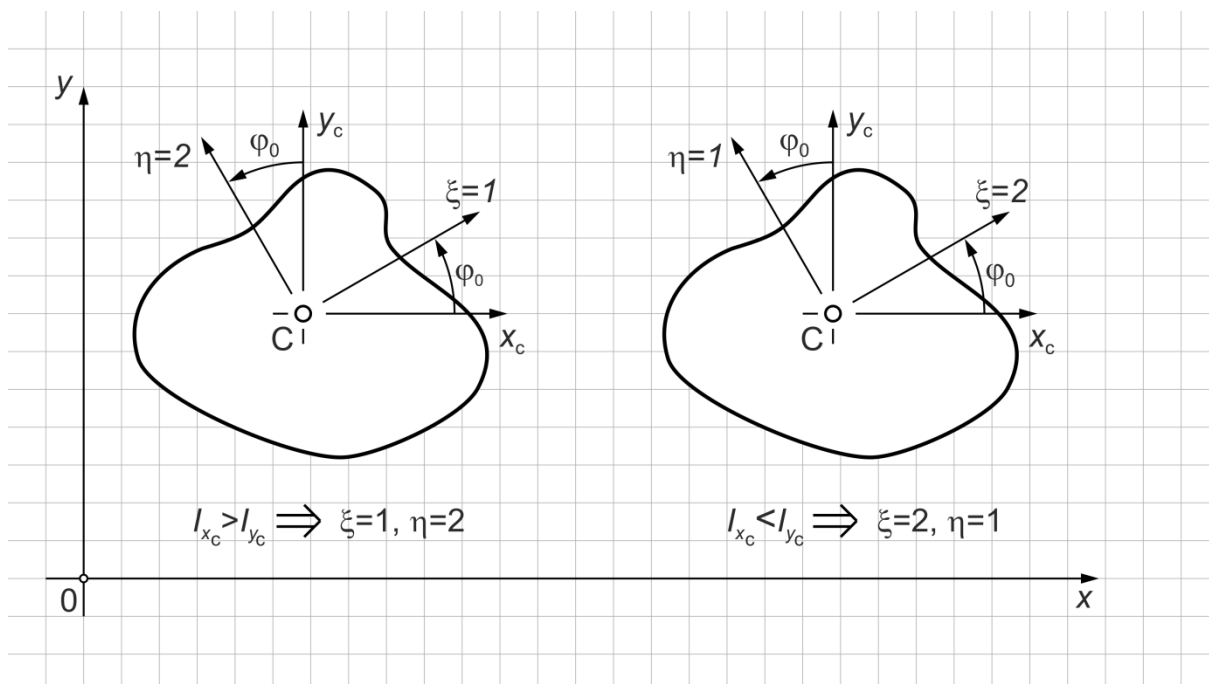
Istnieje szczególna orientacja osi centralnych, dla której moment odśrodkowy jest równy zero. Orientacja ta określona jest przez kąt główny φ_0 :

$$\operatorname{tg} 2\varphi_0 = \frac{2I_{x_c y_c}}{I_{y_c} - I_{x_c}} \Rightarrow \varphi_0 = \frac{1}{2} \left(\operatorname{arctg} \frac{2I_{x_c y_c}}{I_{y_c} - I_{x_c}} \right) \quad (1.17)$$

Osie układu ξ, η obrócone o kąt φ_0 nazywane są osiami głównymi centralnymi. Oznaczane są cyframi 1 i 2. Momenty bezwładności względem osi głównych centralnych przyjmują wartości ekstremalne, maksymalną I_1 i minimalną I_2 (rys. 1.5):

$$I_1 = \frac{1}{2}(I_{x_c} + I_{y_c}) + \frac{1}{2}\sqrt{(I_{x_c} - I_{y_c})^2 + 4I_{x_c y_c}^2} \quad (1.18)$$

$$I_2 = \frac{1}{2}(I_{x_c} + I_{y_c}) - \frac{1}{2}\sqrt{(I_{x_c} - I_{y_c})^2 + 4I_{x_c y_c}^2} \quad (1.19)$$



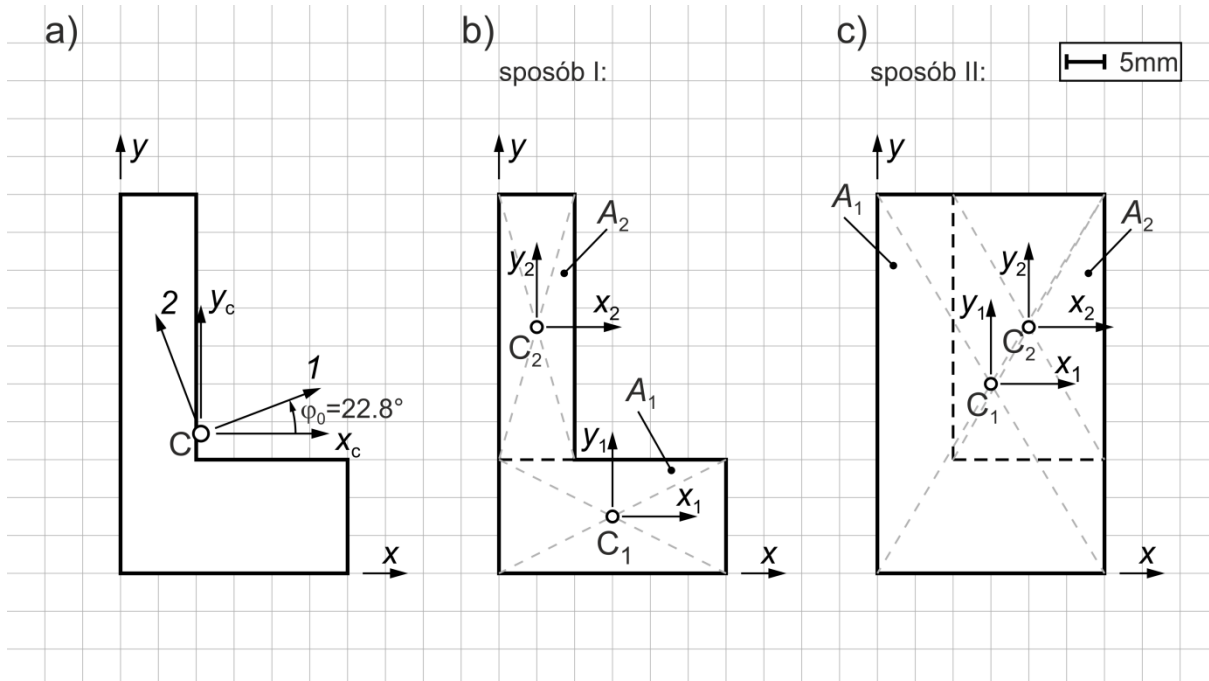
Rys. 1.5

PRZYKŁAD 1.1

Wyznaczyć pole powierzchni, położenie środka geometrycznego oraz wartości głównych centralnych momentów bezwładności figury płaskiej (rys. 1.6a).

Dokładność rozwiązania:

- pole powierzchni, momenty statyczne i bezwładności do liczby całkowitej,
- współrzędne środka geometrycznego do jednego miejsca po przekroju.



Rys. 1.6

ROZWIĄZANIE

Poszukiwane wielkości można wyznaczyć dwoma sposobami. W pierwszym (rys. 1.6b), figurę dzielimy na proste figury składowe (w tym przypadku dwa prostokąty o polach A_1 i A_2). W drugim (rys. 1.6c), figurę rozpatrujemy jako różnicę dwóch prostokątów, większego (A_1) i mniejszego (A_2).

Pole powierzchni

sposób I:

$$A_1 = 30 \cdot 15 = 450 \text{ mm}^2$$

$$A_2 = 10 \cdot 35 = 350 \text{ mm}^2$$

$$A = A_1 + A_2 = 450 + 350 = 800 \text{ mm}^2$$

sposób II:

$$A_1 = 30 \cdot 50 = 1500 \text{ mm}^2$$

$$A_2 = 20 \cdot 35 = 700 \text{ mm}^2$$

$$A = A_1 - A_2 = 1500 - 700 = 800 \text{ mm}^2$$

Momenty statyczne

sposób I:

$$S_x = A_1 \cdot y_1 + A_2 \cdot y_2 = 450 \cdot 7.5 + 350 \cdot 32.5 = 3375 + 11375 = 14750 \text{ mm}^3$$

$$S_y = A_1 \cdot x_1 + A_2 \cdot x_2 = 450 \cdot 15 + 350 \cdot 5 = 6750 + 1750 = 8500 \text{ mm}^3$$

sposób II:

$$S_x = A_1 \cdot y_1 - A_2 \cdot y_2 = 1500 \cdot 25 - 700 \cdot 32.5 = 37500 - 22750 = 14750 \text{ mm}^3$$

$$S_y = A_1 \cdot x_1 - A_2 \cdot x_2 = 1500 \cdot 15 - 700 \cdot 20 = 22500 - 14000 = 8500 \text{ mm}^3$$

Współrzędne środka geometrycznego

$$x_c = \frac{S_y}{A} = \frac{8500}{800} = 10.6 \text{ mm}$$

$$y_c = \frac{S_x}{A} = \frac{14750}{800} = 18.4 \text{ mm}$$

Momenty bezwładności figur składowych względem osi przechodzących przez ich środki geometryczne

sposób I (tabela 1.1 → prostokąt):

$$I_{x_1} = \frac{30 \cdot 15^3}{12} = 8438 \text{ mm}^4$$

$$I_{y_1} = \frac{15 \cdot 30^3}{12} = 33750 \text{ mm}^4$$

$$I_{x_2} = \frac{10 \cdot 35^3}{12} = 35729 \text{ mm}^4$$

$$I_{y_2} = \frac{35 \cdot 10^3}{12} = 2917 \text{ mm}^4$$

sposób II (tabela 1.1 → prostokąt):

$$I_{x_1} = \frac{30 \cdot 50^3}{12} = 312500 \text{ mm}^4$$

$$I_{y_1} = \frac{50 \cdot 30^3}{12} = 112500 \text{ mm}^4$$

$$I_{x_2} = \frac{20 \cdot 35^3}{12} = 71458 \text{ mm}^4$$

$$I_{y_2} = \frac{35 \cdot 20^3}{12} = 23333 \text{ mm}^4$$

Centralne momenty bezwładności (wykorzystanie twierdzenia Steinera) całej figury

sposób I:

$$\begin{aligned} I_{x_c} &= [I_{x_1} + A_1 \cdot (y_1 - y_c)^2] + [I_{x_2} + A_2 \cdot (y_2 - y_c)^2] = [8438 + 450 \cdot (7.5 - 18.4)^2] + \\ &+ [35729 + 350 \cdot (32.5 - 18.4)^2] = [8438 + 450 \cdot 118.81] + [35729 + 350 \cdot 198.81] = \\ &= 61902.5 + 105312.5 = 167215 \text{ mm}^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{y_c} &= [I_{y_1} + A_1 \cdot (x_1 - x_c)^2] + [I_{y_2} + A_2 \cdot (x_2 - x_c)^2] = [33750 + 450 \cdot (15 - 10.6)^2] + \\ &+ [2917 + 350 \cdot (5 - 10.6)^2] = [33750 + 450 \cdot 19.36] + [2917 + 350 \cdot 31.36] = \\ &= 42462 + 13893 = 56355 \text{ mm}^4 \end{aligned}$$

sposób II:

$$I_{x_c} = [I_{x_1} + A_1 \cdot (y_1 - y_c)^2] - [I_{x_2} + A_2 \cdot (y_2 - y_c)^2] = [312500 + 1500 \cdot (25 - 18.4)^2] - [71458 + 700 \cdot (32.5 - 18.4)^2] = [312500 + 1500 \cdot 43.56] - [71458 + 700 \cdot 198.81] = 377840 - 210625 = 167215 \text{ mm}^4$$

$$I_{y_c} = [I_{y_1} + A_1 \cdot (x_1 - x_c)^2] - [I_{y_2} + A_2 \cdot (x_2 - x_c)^2] = [112500 + 1500 \cdot (15 - 10.6)^2] - [23333 + 700 \cdot (20 - 10.6)^2] = [112500 + 1500 \cdot 19.36] - [23333 + 700 \cdot 88.36] = 141540 - 85185 = 56355 \text{ mm}^4$$

Momenty odśrodkowe figur składowych względem osi przechodzących przez ich środki geometryczne

sposób I (tabela 1.1 → prostokąt):

$$I_{x_1y_1} = I_{x_2y_2} = 0$$

sposób II (tabela 1.1 → prostokąt):

$$I_{x_1y_1} = I_{x_2y_2} = 0$$

Centralny moment odśrodkowy całej figury

sposób I:

$$I_{x_cy_c} = [I_{x_1y_1} + A_1 \cdot (x_1 - x_c) \cdot (y_1 - y_c)] + [I_{x_2y_2} + A_2 \cdot (x_2 - x_c) \cdot (y_2 - y_c)] = [0 + 450 \cdot (15 - 10.6) \cdot (7.5 - 18.4)] + [0 + 350 \cdot (5 - 10.6) \cdot (32.5 - 18.4)] = [450 \cdot 4.4 \cdot (-10.9)] + [350 \cdot (-5.6) \cdot 14.1] = -21582 - 27636 = -49218 \text{ mm}^4$$

sposób II:

$$I_{x_cy_c} = [I_{x_1y_1} + A_1 \cdot (x_1 - x_c) \cdot (y_1 - y_c)] - [I_{x_2y_2} + A_2 \cdot (x_2 - x_c) \cdot (y_2 - y_c)] = [0 + 1500 \cdot (15 - 10.6) \cdot (25 - 18.4)] - [0 + 700 \cdot (20 - 10.6) \cdot (32.5 - 18.4)] = [1500 \cdot 4.4 \cdot 6.6] - [700 \cdot 9.4 \cdot 14.1] = 43560 - 92778 = -49218 \text{ mm}^4$$

Główne centralne momenty bezwładności

$$\varphi_0 = \frac{1}{2} \left(\arctg \frac{2I_{x_cy_c}}{I_{y_c} - I_{x_c}} \right) = \frac{1}{2} \left(\arctg \frac{2 \cdot (-49218)}{56355 - 167215} \right) = \frac{1}{2} \left(\arctg \frac{-98436}{-110860} \right) = \frac{1}{2} (\arctg 0.8879) = \frac{1}{2} \cdot 41.6^\circ = 20.8^\circ$$

$$I_1 = \frac{1}{2} (I_{x_c} + I_{y_c}) + \frac{1}{2} \sqrt{(I_{x_c} - I_{y_c})^2 + 4I_{x_cy_c}^2} = \frac{1}{2} (167215 + 56355) + \frac{1}{2} \sqrt{(167215 - 56355)^2 + 4(-49218)^2} = \frac{1}{2} \cdot 223570 + \frac{1}{2} \sqrt{110860^2 + 4(-49218)^2} =$$

$$\begin{aligned}
 &= 111785 + 74128 = 185913 \text{ mm}^4 \\
 I_2 &= \frac{1}{2}(I_{x_c} + I_{y_c}) - \frac{1}{2}\sqrt{(I_{x_c} - I_{y_c})^2 + 4I_{x_c y_c}^2} = \frac{1}{2}(167215 + 56355) - \\
 &+ \frac{1}{2}\sqrt{(167215 - 56355)^2 + 4(-49218)^2} = \frac{1}{2} \cdot 223570 - \frac{1}{2}\sqrt{110860^2 + 4(-49218)^2} = \\
 &= 111785 - 74128 = 37657 \text{ mm}^4
 \end{aligned}$$

Sprawdzenie

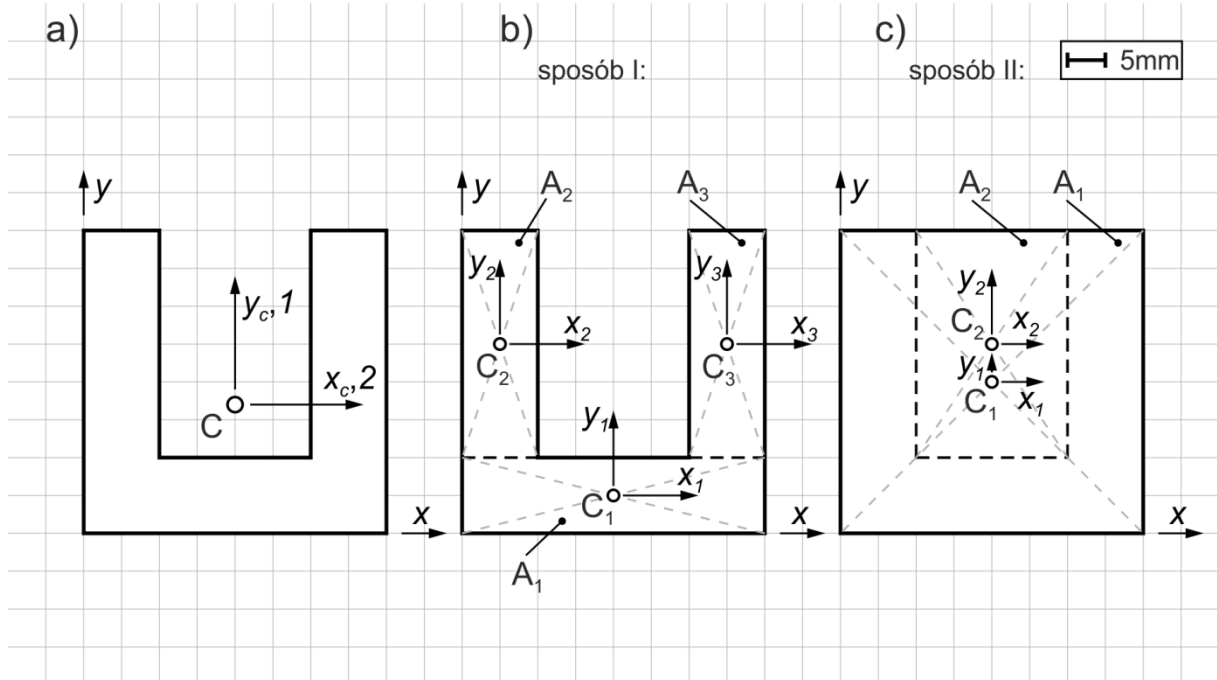
$$I_1 + I_2 = I_{x_c} + I_{y_c} \Rightarrow 185913 + 37657 = 167215 + 56355 \Rightarrow 223570 = 223570$$

PRZYKŁAD 1.2

Wyznaczyć pole powierzchni, położenie środka geometrycznego oraz wartości głównych centralnych momentów bezwładności figury płaskiej (rys. 1.7a).

Dokładność rozwiązania:

- pole powierzchni, momenty statyczne i bezwładności do liczby całkowitej,
- współrzędne środka geometrycznego do jednego miejsca po przecinku.



Rys. 1.7

ROZWIĄZANIE

Poszukiwane wielkości można wyznaczyć dwoma sposobami. W pierwszym (rys. 1.7b), figurę dzielimy na proste figury składowe (w tym przypadku dwa prostokąty A_1 i A_2). W drugim (rys. 1.7c), figurę rozpatrujemy jako różnicę trzech prostokątów, większego (A_1) i dwóch mniejszych (A_2 i A_3).

Pole powierzchni

sposób I:

$$A_1 = 10 \cdot 25 = 250 \text{ mm}^2$$

$$A_2 = 40 \cdot 10 = 400 \text{ mm}^2$$

$$A = A_1 + A_2 = 250 + 400 = 650 \text{ mm}^2$$

sposób II:

$$A_1 = 40 \cdot 35 = 1400 \text{ mm}^2$$

$$A_2 = A_3 = 15 \cdot 25 = 375 \text{ mm}^2$$

$$A = A_1 - A_2 - A_3 = 1400 - 375 - 375 = 650 \text{ mm}^2$$

Momenty statyczne

sposób I:

$$S_x = A_1 \cdot y_1 + A_2 \cdot y_2 = 250 \cdot 12.5 + 400 \cdot 30 = 3125 + 12000 = 15125 \text{ mm}^3$$

$$S_y = A_1 \cdot x_1 + A_2 \cdot x_2 = 250 \cdot 20 + 400 \cdot 20 = 5000 + 8000 = 13000 \text{ mm}^3$$

sposób II:

$$\begin{aligned} S_x &= A_1 \cdot y_1 - A_2 \cdot y_2 - A_3 \cdot y_3 = 1400 \cdot 17.5 - 375 \cdot 12.5 - 375 \cdot 12.5 = \\ &= 24500 - 4687.5 - 4687.5 = 15125 \text{ mm}^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_y &= A_1 \cdot x_1 - A_2 \cdot x_2 - A_3 \cdot x_3 = 1400 \cdot 20 - 375 \cdot 7.5 - 375 \cdot 32.5 = \\ &= 28000 - 2812.5 - 12187.5 = 13000 \text{ mm}^3 \end{aligned}$$

Współrzędne środka geometrycznego

$$x_c = \frac{S_y}{A} = \frac{13000}{650} = 20.0 \text{ mm}$$

$$y_c = \frac{S_x}{A} = \frac{15125}{650} = 23.3 \text{ mm}$$

Momenty bezwładności figur składowych względem osi przechodzących przez ich środki geometryczne

sposób I (tabela 1.1 → prostokąt):

$$I_{x_1} = \frac{10 \cdot 25^3}{12} = 13021 \text{ mm}^4$$

$$I_{y_1} = \frac{25 \cdot 10^3}{12} = 2083 \text{ mm}^4$$

$$I_{x_2} = \frac{40 \cdot 10^3}{12} = 3333 \text{ mm}^4$$

$$I_{y_2} = \frac{10 \cdot 40^3}{12} = 53333 \text{ mm}^4$$

sposób II (tabela 1.1 → prostokąt):

$$I_{x_1} = \frac{40 \cdot 35^3}{12} = 142917 \text{ mm}^4 \qquad I_{y_1} = \frac{35 \cdot 40^3}{12} = 186667 \text{ mm}^4$$

$$I_{x_2} = I_{x_3} = \frac{15 \cdot 25^3}{12} = 19531 \text{ mm}^4 \qquad I_{y_2} = I_{y_3} = \frac{25 \cdot 15^3}{12} = 7031 \text{ mm}^4$$

Centralne momenty bezwładności (wykorzystanie twierdzenia Steinera) całej figury

sposób I:

$$I_{x_c} = [I_{x_1} + A_1 \cdot (y_1 - y_c)^2] + [I_{x_2} + A_2 \cdot (y_2 - y_c)^2] = [13021 + 250 \cdot (12.5 - 23.3)^2] +$$

$$+ [3333 + 400 \cdot (30 - 23.3)^2] = [13021 + 250 \cdot 116.64] + [3333 + 400 \cdot 44.89] =$$

$$= 42181 + 21289 = 63470 \text{ mm}^4$$

$$I_{y_c} = [I_{y_1} + A_1 \cdot (x_1 - x_c)^2] + [I_{y_2} + A_2 \cdot (x_2 - x_c)^2] = [2083 + 250 \cdot (20 - 20)^2] +$$

$$+ [53333 + 400 \cdot (20 - 20)^2] = 2083 + 53333 = 55416 \text{ mm}^4$$

sposób II:

$$I_{x_c} = [I_{x_1} + A_1 \cdot (y_1 - y_c)^2] - [I_{x_2} + A_2 \cdot (y_2 - y_c)^2] - [I_{x_3} + A_3 \cdot (y_3 - y_c)^2] =$$

$$= [142917 + 1400 \cdot (17.5 - 23.3)^2] - [19531 + 375 \cdot (12.5 - 23.3)^2] -$$

$$+ [19531 + 375 \cdot (12.5 - 23.3)^2] = [142917 + 1400 \cdot 33.64] - [19531 + 375 \cdot 116.64] -$$

$$+ [19531 + 375 \cdot 116.64] = 190013 - 63271 - 63271 = 63471 \text{ mm}^4$$

$$I_{y_c} = [I_{y_1} + A_1 \cdot (x_1 - x_c)^2] - [I_{y_2} + A_2 \cdot (x_2 - x_c)^2] - [I_{y_3} + A_3 \cdot (x_3 - x_c)^2] =$$

$$= [186667 + 1400 \cdot (20 - 20)^2] - [7031 + 375 \cdot (7.5 - 20)^2] -$$

$$+ [7031 + 375 \cdot (32.5 - 20)^2] = 186667 - [7031 + 375 \cdot 156.25] -$$

$$+ [7031 + 375 \cdot 156.25] = 186667 - 65624.75 - 65624.75 = 55418 \text{ mm}^4$$

Różnice wartości wyznaczonych sposobem I i II wynikają z założonych dokładności rozwiązania.

Momenty odśrodkowe figur składowych względem osi przechodzących przez ich środki geometryczne

sposób I (tabela 1.1 → prostokąt):

$$I_{x_1 y_1} = I_{x_2 y_2} = 0$$

sposób II (tabela 1.1 → prostokąt):

$$I_{x_1 y_1} = I_{x_2 y_2} = I_{x_3 y_3} = 0$$

Centralny moment odśrodkowy całej figury

sposób I:

$$I_{x_c y_c} = \left[I_{x_1 y_1} + A_1 \cdot (x_1 - x_c) \cdot (y_1 - y_c) \right] + \left[I_{x_2 y_2} + A_2 \cdot (x_2 - x_c) \cdot (y_2 - y_c) \right] = \\ = [0 + 250 \cdot (20 - 20) \cdot (12.5 - 23.3)] + [0 + 400 \cdot (20 - 20) \cdot (30 - 23.5)] = 0$$

sposób II:

$$I_{x_c y_c} = \left[I_{x_1 y_1} + A_1 \cdot (x_1 - x_c) \cdot (y_1 - y_c) \right] - \left[I_{x_2 y_2} + A_2 \cdot (x_2 - x_c) \cdot (y_2 - y_c) \right] - \\ + \left[I_{x_3 y_3} + A_3 \cdot (x_3 - x_c) \cdot (y_3 - y_c) \right] = [0 + 1400 \cdot (20 - 20) \cdot (17.5 - 23.3)] - \\ + [0 + 375 \cdot (7.5 - 20) \cdot (12.5 - 23.3)] - [0 + 375 \cdot (32.5 - 20) \cdot (12.5 - 23.3)] = \\ = 0 - [375 \cdot (-12.5) \cdot (-10.8)] - [375 \cdot 12.5 \cdot (-10.8)] = -50625 + 50625 = 0$$

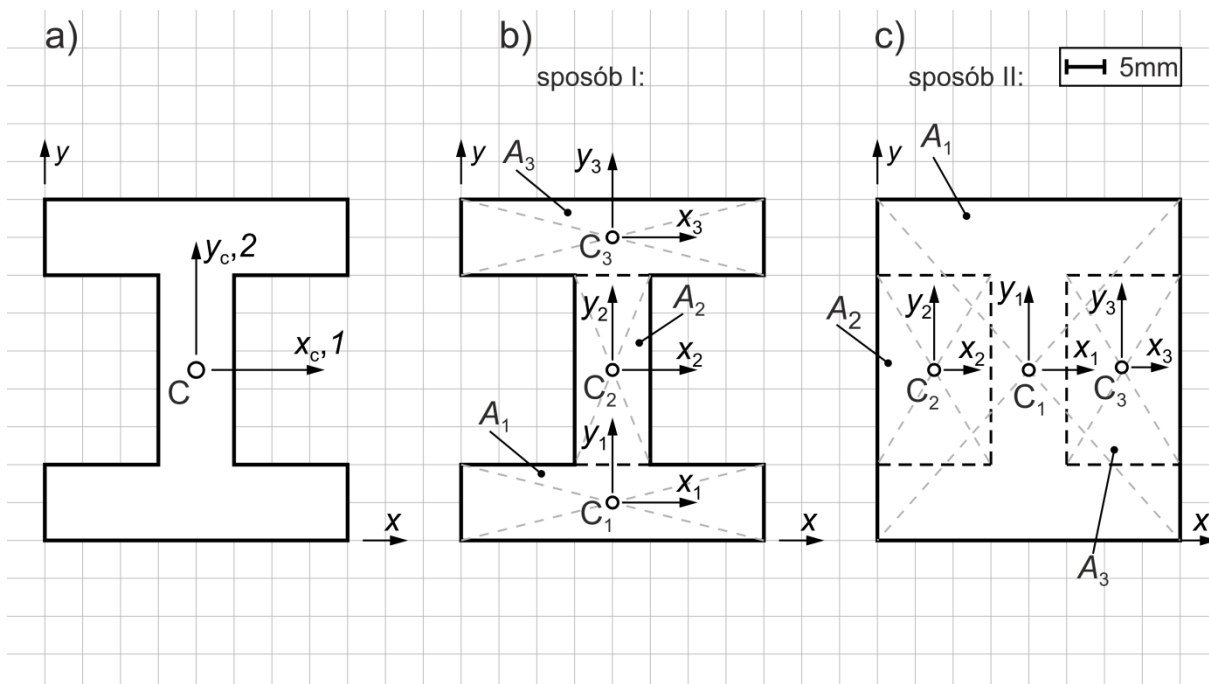
Dla rozpatrywanej monosymetrycznej figury płaskiej momenty centralne są równocześnie głównymi centralnymi momentami bezwładności ($I_{x_c y_c} = 0$).

PRZYKŁAD 1.3

Wyznaczyć pole powierzchni, położenie środka geometrycznego oraz wartości głównych centralnych momentów bezwładności figury płaskiej (rys. 1.8a).

Dokładność rozwiązania:

- pole powierzchni, momenty statyczne i bezwładności do liczby całkowitej,
- współrzędne środka geometrycznego do jednego miejsca po przecinku.



Rys. 1.8

ROZWIĄZANIE

Poszukiwane wielkości można wyznaczyć dwoma sposobami. W pierwszym (rys. 1.8b), figurę dzielimy na proste figury składowe (w tym przypadku trzy prostokąty o polach A_1 , A_2 i A_3). W drugim (rys. 1.8c), figurę rozpatrujemy jako różnicę trzech prostokątów, większego (A_1) i dwóch mniejszych (A_2 i A_3).

Pole powierzchni

sposób I:

$$A_1 = A_3 = 40 \cdot 10 = 400 \text{ mm}^2$$

$$A_2 = 10 \cdot 25 = 250 \text{ mm}^2$$

$$A = A_1 + A_2 + A_3 = 400 + 250 + 400 = 1050 \text{ mm}^2$$

sposób II:

$$A_1 = 40 \cdot 45 = 1800 \text{ mm}^2$$

$$A_2 = A_3 = 15 \cdot 25 = 375 \text{ mm}^2$$

$$A = A_1 - A_2 - A_3 = 1800 - 375 - 375 = 1050 \text{ mm}^2$$

Momenty statyczne

sposób I:

$$\begin{aligned} S_x &= A_1 \cdot y_1 + A_2 \cdot y_2 + A_3 \cdot y_3 = 400 \cdot 5 + 250 \cdot 22.5 + 400 \cdot 40 = \\ &= 2000 + 5625 + 16000 = 23625 \text{ mm}^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_y &= A_1 \cdot x_1 + A_2 \cdot x_2 + A_3 \cdot x_3 = 400 \cdot 20 + 250 \cdot 20 + 400 \cdot 20 = \\ &= 8000 + 5000 + 8000 = 21000 \text{ mm}^3 \end{aligned}$$

sposób II:

$$\begin{aligned} S_x &= A_1 \cdot y_1 - A_2 \cdot y_2 - A_3 \cdot y_3 = 1800 \cdot 22.5 - 375 \cdot 22.5 - 375 \cdot 22.5 = \\ &= 40500 - 8437.5 - 8437.5 = 23625 \text{ mm}^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_y &= A_1 \cdot x_1 - A_2 \cdot x_2 - A_3 \cdot x_3 = 1800 \cdot 20 - 375 \cdot 7.5 - 375 \cdot 32.5 = \\ &= 36000 - 2812.5 - 12187.5 = 21000 \text{ mm}^3 \end{aligned}$$

Współrzędne środka geometrycznego

$$x_c = \frac{S_y}{A} = \frac{21000}{1050} = 20.0 \text{ mm}$$

$$y_c = \frac{S_x}{A} = \frac{23625}{1050} = 22.5 \text{ mm}$$

Momenty bezwładności figur składowych względem osi przechodzących przez ich środki geometryczne

sposób I (tabela 1.1 → prostokąt):

$$I_{x_1} = I_{x_3} = \frac{40 \cdot 10^3}{12} = 3333 \text{ mm}^4$$

$$I_{y_1} = I_{y_2} = \frac{10 \cdot 40^3}{12} = 53333 \text{ mm}^4$$

$$I_{x_2} = \frac{10 \cdot 25^3}{12} = 13021 \text{ mm}^4$$

$$I_{y_2} = \frac{25 \cdot 10^3}{12} = 2083 \text{ mm}^4$$

sposób II (tabela 1.1 → prostokąt):

$$I_{x_1} = \frac{40 \cdot 45^3}{12} = 303750 \text{ mm}^4$$

$$I_{y_1} = \frac{45 \cdot 40^3}{12} = 240000 \text{ mm}^4$$

$$I_{x_2} = I_{x_3} = \frac{15 \cdot 25^3}{12} = 19531 \text{ mm}^4$$

$$I_{y_2} = I_{y_3} = \frac{25 \cdot 15^3}{12} = 7031 \text{ mm}^4$$

Centralne momenty bezwładności (wykorzystanie twierdzenia Steinera) całej figury

sposób I:

$$\begin{aligned} I_{x_c} &= [I_{x_1} + A_1 \cdot (y_1 - y_c)^2] + [I_{x_2} + A_2 \cdot (y_2 - y_c)^2] + [I_{x_3} + A_3 \cdot (y_3 - y_c)^2] = \\ &= [3333 + 400 \cdot (5 - 22.5)^2] + [13021 + 250 \cdot (22.5 - 22.5)^2] + \\ &+ [3333 + 400 \cdot (40 - 22.5)^2] = [3333 + 400 \cdot 306.25] + [13021 + 0] + \\ &+ [13333 + 400 \cdot 306.25] = 125833 + 13021 + 125833 = 264687 \text{ mm}^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{y_c} &= [I_{y_1} + A_1 \cdot (x_1 - x_c)^2] + [I_{y_2} + A_2 \cdot (x_2 - x_c)^2] + [I_{y_3} + A_3 \cdot (x_3 - x_c)^2] = \\ &= [53333 + 400 \cdot (20 - 20)^2] + [2083 + 250 \cdot (20 - 20)^2] + \\ &+ [53333 + 400 \cdot (20 - 20)^2] = 53333 + 2083 + 53333 = 108749 \text{ mm}^4 \end{aligned}$$

sposób II:

$$\begin{aligned} I_{x_c} &= [I_{x_1} + A_1 \cdot (y_1 - y_c)^2] - [I_{x_2} + A_2 \cdot (y_2 - y_c)^2] - [I_{x_3} + A_3 \cdot (y_3 - y_c)^2] = \\ &= [303750 + 1800 \cdot (22.5 - 22.5)^2] - [19531 + 375 \cdot (22.5 - 22.5)^2] - \\ &+ [19531 + 375 \cdot (22.5 - 22.5)^2] = 303750 - 19531 - 19531 = 264688 \text{ mm}^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{y_c} &= [I_{y_1} + A_1 \cdot (x_1 - x_c)^2] - [I_{y_2} + A_2 \cdot (x_2 - x_c)^2] - [I_{y_3} + A_3 \cdot (x_3 - x_c)^2] = \\ &= [240000 + 1800 \cdot (20 - 20)^2] - [7031 + 375 \cdot (7.5 - 20)^2] - \\ &+ [7031 + 375 \cdot (32.5 - 20)^2] = 240000 - [7031 + 375 \cdot 156.25] - \\ &+ [7031 + 375 \cdot 156.25] = 240000 - 65624.75 - 65624.75 = 108751 \text{ mm}^4 \end{aligned}$$

Różnice wartości wyznaczonych sposobem I i II wynikają z założonych dokładności rozwiązania.

Momenty odśrodkowe figur składowych względem osi przechodzących przez ich środki geometryczne

sposób I (tabela 1.1 → prostokąt):

$$I_{x_1y_1} = I_{x_2y_2} = I_{x_3y_3} = 0$$

sposób II (tabela 1.1 → prostokąt):

$$I_{x_1y_1} = I_{x_2y_2} = I_{x_3y_3} = 0$$

Centralny moment odśrodkowy całej figury

sposób I:

$$\begin{aligned} I_{x_cy_c} &= [I_{x_1y_1} + A_1 \cdot (x_1 - x_c) \cdot (y_1 - y_c)] + [I_{x_2y_2} + A_2 \cdot (x_2 - x_c) \cdot (y_2 - y_c)] + \\ &+ [I_{x_3y_3} + A_3 \cdot (x_3 - x_c) \cdot (y_3 - y_c)] = [0 + 400 \cdot (20 - 20) \cdot (5 - 22.5)] + \\ &+ [0 + 250 \cdot (20 - 20) \cdot (22.5 - 22.5)] + [0 + 400 \cdot (20 - 20) \cdot (40 - 22.5)] = 0 \end{aligned}$$

sposób II:

$$\begin{aligned} I_{x_cy_c} &= [I_{x_1y_1} + A_1 \cdot (x_1 - x_c) \cdot (y_1 - y_c)] - [I_{x_2y_2} + A_2 \cdot (x_2 - x_c) \cdot (y_2 - y_c)] - \\ &+ [I_{x_3y_3} + A_3 \cdot (x_3 - x_c) \cdot (y_3 - y_c)] = [0 + 1800 \cdot (20 - 20) \cdot (22.5 - 22.5)] - \\ &+ [0 + 375 \cdot (7.5 - 20) \cdot (22.5 - 22.5)] - [0 + 375 \cdot (32.5 - 20) \cdot (22.5 - 22.5)] = 0 \end{aligned}$$

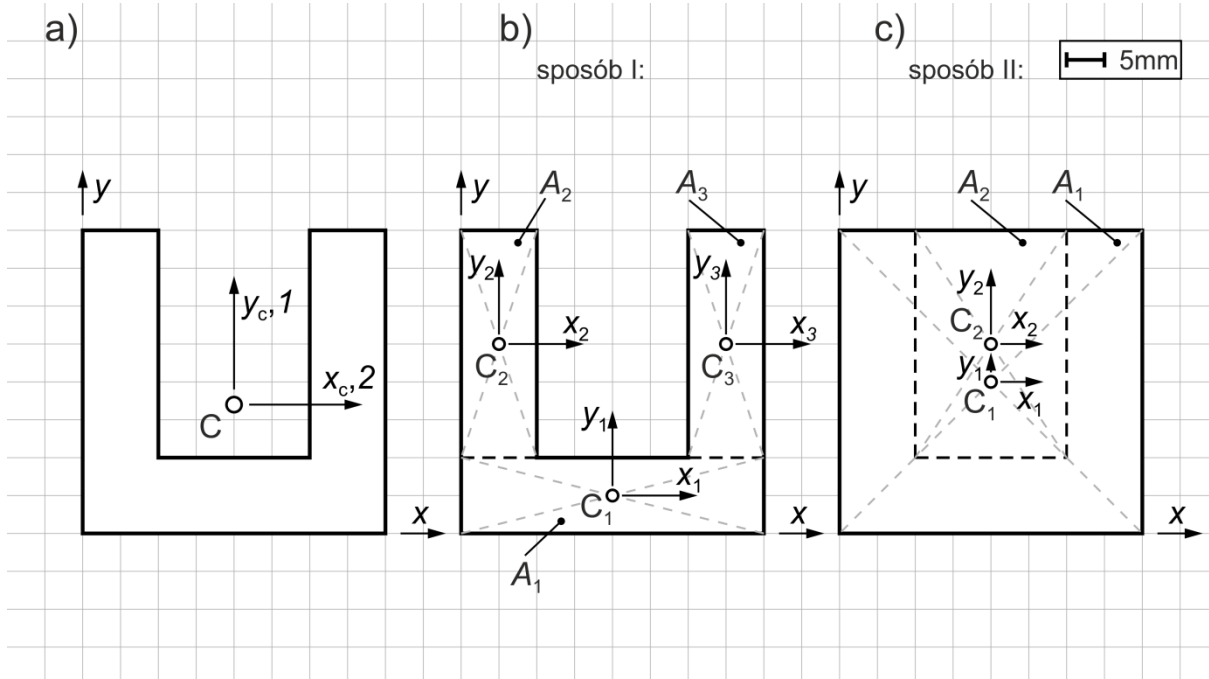
Dla rozpatrywanej monosymetrycznej figury płaskiej momenty centralne są równocześnie głównymi centralnymi momentami bezwładności ($I_{x_cy_c} = 0$).

PRZYKŁAD 1.4

Wyznaczyć pole powierzchni, położenie środka geometrycznego oraz wartości głównych centralnych momentów bezwładności figury płaskiej (rys. 1.9a).

Dokładność rozwiązania:

- pole powierzchni, momenty statyczne i bezwładności do liczby całkowitej,
- współrzędne środka geometrycznego do jednego miejsca po przekroju.



Rys. 1.9

ROZWIĄZANIE

Poszukiwane wielkości można wyznaczyć dwoma sposobami. W pierwszym (rys. 1.9b), figurę dzielimy na proste figury składowe (w tym przypadku trzy prostokąty A_1 , A_2 i A_3). W drugim (rys. 1.9c), figurę rozpatrujemy jako różnicę dwóch prostokątów, większego (A_1) i mniejszego (A_2).

Pole powierzchni

sposób I:

$$A_1 = 40 \cdot 10 = 400 \text{ mm}^2$$

$$A_2 = A_3 = 10 \cdot 30 = 300 \text{ mm}^2$$

$$A = A_1 + A_2 + A_3 = 400 + 300 + 300 = 1000 \text{ mm}^2$$

sposób II:

$$A_1 = 40 \cdot 40 = 1600 \text{ mm}^2$$

$$A_2 = 20 \cdot 30 = 600 \text{ mm}^2$$

$$A = A_1 - A_2 = 1600 - 600 = 1000 \text{ mm}^2$$

Momenty statyczne

sposób I:

$$S_x = A_1 \cdot y_1 + A_2 \cdot y_2 + A_3 \cdot y_3 = 400 \cdot 5 + 300 \cdot 25 + 300 \cdot 25 = \\ = 2000 + 7500 + 7500 = 17000 \text{ mm}^3$$

$$S_y = A_1 \cdot x_1 + A_2 \cdot x_2 + A_3 \cdot x_3 = 400 \cdot 20 + 300 \cdot 5 + 300 \cdot 35 = \\ = 8000 + 1500 + 10500 = 20000 \text{ mm}^3$$

sposób II:

$$S_x = A_1 \cdot y_1 - A_2 \cdot y_2 = 1600 \cdot 20 - 600 \cdot 25 = 32000 - 15000 = 17000 \text{ mm}^3$$

$$S_y = A_1 \cdot x_1 - A_2 \cdot x_2 = 1600 \cdot 20 - 600 \cdot 20 = 32000 - 12000 = 20000 \text{ mm}^3$$

Współrzędne środka geometrycznego

$$x_c = \frac{S_y}{A} = \frac{20000}{1000} = 20.0 \text{ mm}$$

$$y_c = \frac{S_x}{A} = \frac{17000}{1000} = 17.0 \text{ mm}$$

Momenty bezwładności figur składowych względem osi przechodzących przez ich środki geometryczne

sposób I (tabela 1.1 → prostokąt):

$$I_{x_1} = \frac{40 \cdot 10^3}{12} = 3333 \text{ mm}^4$$

$$I_{y_1} = \frac{10 \cdot 40^3}{12} = 53333 \text{ mm}^4$$

$$I_{x_2} = I_{x_3} = \frac{10 \cdot 30^3}{12} = 22500 \text{ mm}^4$$

$$I_{y_2} = I_{y_3} = \frac{30 \cdot 10^3}{12} = 2500 \text{ mm}^4$$

sposób II (tabela 1.1 → prostokąt):

$$I_{x_1} = \frac{40 \cdot 40^3}{12} = 213333 \text{ mm}^4$$

$$I_{y_1} = \frac{40 \cdot 40^3}{12} = 213333 \text{ mm}^4$$

$$I_{x_2} = \frac{20 \cdot 30^3}{12} = 45000 \text{ mm}^4$$

$$I_{y_2} = \frac{30 \cdot 20^3}{12} = 20000 \text{ mm}^4$$

Centralne momenty bezwładności (wykorzystanie twierdzenia Steinera) całej figury

sposób I:

$$I_{x_c} = [I_{x_1} + A_1 \cdot (y_1 - y_c)^2] + [I_{x_2} + A_2 \cdot (y_2 - y_c)^2] + [I_{x_3} + A_3 \cdot (y_3 - y_c)^2] = \\ = [3333 + 400 \cdot (5 - 17)^2] + [22500 + 300 \cdot (25 - 17)^2] + \\ + [22500 + 300 \cdot (25 - 17)^2] = [3333 + 400 \cdot 144] + [22500 + 300 \cdot 64] + \\ + [22500 + 300 \cdot 64] = 60933 + 41700 + 41700 = 144333 \text{ mm}^4$$

$$I_{y_c} = [I_{y_1} + A_1 \cdot (x_1 - x_c)^2] + [I_{y_2} + A_2 \cdot (x_2 - x_c)^2] + [I_{y_3} + A_3 \cdot (x_3 - x_c)^2] = \\ = [53333 + 400 \cdot (20 - 20)^2] + [2500 + 300 \cdot (5 - 20)^2] + [2500 + 300 \cdot (35 - 20)^2] =$$

$$= 53333 + [2500 + 300 \cdot 225] + [2500 + 300 \cdot 225] = 53333 + 70000 + 70000 =$$

$$= 193333 \text{ mm}^4$$

sposób II:

$$I_{x_c} = [I_{x_1} + A_1 \cdot (y_1 - y_c)^2] - [I_{x_2} + A_2 \cdot (y_2 - y_c)^2] = [213333 + 1600 \cdot (20 - 17)^2] -$$

$$+ [45000 + 600 \cdot (25 - 17)^2] = [213333 + 1600 \cdot 9] - [45000 + 600 \cdot 64] =$$

$$= 227733 - 83400 = 144333 \text{ mm}^4$$

$$I_{y_c} = [I_{y_1} + A_1 \cdot (x_1 - x_c)^2] - [I_{y_2} + A_2 \cdot (x_2 - x_c)^2] = [213333 + 1600 \cdot (20 - 20)^2] -$$

$$+ [20000 + 600 \cdot (20 - 20)^2] = 213333 - 20000 = 193333 \text{ mm}^4$$

Momenty odśrodkowe figur składowych względem osi przechodzących przez ich środki geometryczne

sposób I (tabela 1.1 → prostokąt):

$$I_{x_1y_1} = I_{x_2y_2} = I_{x_3y_3} = 0$$

sposób II (tabela 1.1 → prostokąt):

$$I_{x_1y_1} = I_{x_2y_2} = 0$$

Centralny moment odśrodkowy całej figury

sposób I:

$$I_{x_cy_c} = [I_{x_1y_1} + A_1 \cdot (x_1 - x_c) \cdot (y_1 - y_c)] + [I_{x_2y_2} + A_2 \cdot (x_2 - x_c) \cdot (y_2 - y_c)] +$$

$$+ [I_{x_3y_3} + A_3 \cdot (x_3 - x_c) \cdot (y_3 - y_c)] = [0 + 400 \cdot (20 - 20) \cdot (5 - 17)] +$$

$$+ [0 + 300 \cdot (5 - 20) \cdot (25 - 17)] + [0 + 300 \cdot (35 - 20) \cdot (25 - 17)] =$$

$$= 0 + [300 \cdot (-15) \cdot 8] + [300 \cdot 15 \cdot 8] = -36000 + 36000 = 0$$

sposób II:

$$I_{x_cy_c} = [I_{x_1y_1} + A_1 \cdot (x_1 - x_c) \cdot (y_1 - y_c)] - [I_{x_2y_2} + A_2 \cdot (x_2 - x_c) \cdot (y_2 - y_c)] =$$

$$= [0 + 1600 \cdot (20 - 20) \cdot (20 - 17)] - [0 + 600 \cdot (20 - 20) \cdot (25 - 17)] = 0$$

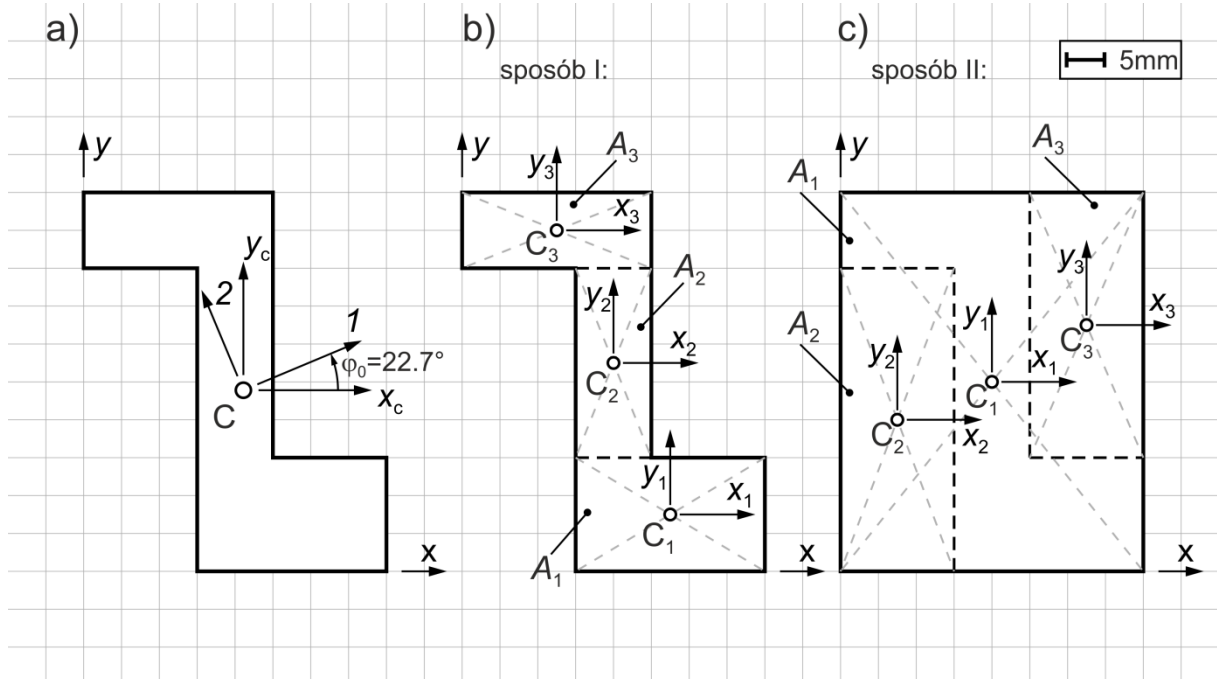
Dla rozpatrywanej monosymetrycznej figury płaskiej momenty centralne są równocześnie głównymi centralnymi momentami bezwładności ($I_{x_cy_c} = 0$).

PRZYKŁAD 1.5

Wyznaczyć pole powierzchni, położenie środka geometrycznego oraz wartości głównych centralnych momentów bezwładności figury płaskiej (rys. 1.10a).

Dokładność rozwiązania:

- pole powierzchni, momenty statyczne i bezwładności: do liczby całkowitej,
- współrzędne środka geometrycznego do jednego miejsca po przecinku.



Rys. 1.10

ROZWIĄZANIE

Poszukiwane wielkości można wyznaczyć dwoma sposobami. W pierwszym (rys. 1.10b), figurę dzielimy na proste figury składowe (w tym przypadku trzy prostokąty A_1 , A_2 i A_3). W drugim (rys. 1.10c), figurę rozpatrujemy jako różnicę trzech prostokątów, większego (A_1) i dwóch mniejszych (A_2 i A_3).

Pole powierzchni

sposób I:

$$A_1 = 25 \cdot 15 = 375 \text{ mm}^2$$

$$A_2 = 10 \cdot 25 = 250 \text{ mm}^2$$

$$A_3 = 25 \cdot 10 = 250 \text{ mm}^2$$

$$A = A_1 + A_2 + A_3 = 375 + 250 + 250 = 875 \text{ mm}^2$$

sposób II:

$$A_1 = 40 \cdot 50 = 2000 \text{ mm}^2$$

$$A_2 = 15 \cdot 40 = 600 \text{ mm}^2$$

$$A_3 = 15 \cdot 35 = 525 \text{ mm}^2$$

$$A = A_1 - A_2 - A_3 = 2000 - 600 - 525 = 875 \text{ mm}^2$$

Momenty statyczne

sposób I:

$$S_x = A_1 \cdot y_1 + A_2 \cdot y_2 + A_3 \cdot y_3 = 375 \cdot 7.5 + 250 \cdot 27.5 + 250 \cdot 45 = \\ = 2812.5 + 6875 + 11250 = 20938 \text{ mm}^3$$

$$S_y = A_1 \cdot x_1 + A_2 \cdot x_2 + A_3 \cdot x_3 = 375 \cdot 27.5 + 250 \cdot 20 + 250 \cdot 12.5 = \\ = 10312.5 + 5000 + 3125 = 18438 \text{ mm}^3$$

sposób II:

$$S_x = A_1 \cdot y_1 - A_2 \cdot y_2 - A_3 \cdot y_3 = 2000 \cdot 25 - 600 \cdot 20 - 525 \cdot 32.5 = \\ = 50000 - 12000 - 17062.5 = 20938 \text{ mm}^3$$

$$S_y = A_1 \cdot x_1 - A_2 \cdot x_2 - A_3 \cdot x_3 = 2000 \cdot 20 - 600 \cdot 7.5 - 525 \cdot 32.5 = \text{mm}^3 \\ = 40000 - 4500 - 17062.5 = 18438 \text{ mm}^3$$

Współrzędne środka geometrycznego

$$x_c = \frac{S_y}{A} = \frac{18438}{875} = 21.1 \text{ mm}$$

$$y_c = \frac{S_x}{A} = \frac{20938}{875} = 23.9 \text{ mm}$$

Momenty bezwładności figur składowych względem osi przechodzących przez ich środki geometryczne

sposób I (tabela 1.1 → prostokąt):

$$I_{x_1} = \frac{25 \cdot 15^3}{12} = 7031 \text{ mm}^4$$

$$I_{y_1} = \frac{15 \cdot 25^3}{12} = 19531 \text{ mm}^4$$

$$I_{x_2} = \frac{10 \cdot 25^3}{12} = 13021 \text{ mm}^4$$

$$I_{y_2} = \frac{25 \cdot 10^3}{12} = 2083 \text{ mm}^4$$

$$I_{x_3} = \frac{25 \cdot 10^3}{12} = 2083 \text{ mm}^4$$

$$I_{y_3} = \frac{10 \cdot 25^3}{12} = 13021 \text{ mm}^4$$

sposób II (tabela 1.1 → prostokąt):

$$I_{x_1} = \frac{40 \cdot 50^3}{12} = 416667 \text{ mm}^4$$

$$I_{y_1} = \frac{50 \cdot 40^3}{12} = 266667 \text{ mm}^4$$

$$I_{x_2} = \frac{15 \cdot 40^3}{12} = 80000 \text{ mm}^4$$

$$I_{y_2} = \frac{40 \cdot 15^3}{12} = 11250 \text{ mm}^4$$

$$I_{x_3} = \frac{15 \cdot 35^3}{12} = 53594 \text{ mm}^4$$

$$I_{y_3} = \frac{35 \cdot 15^3}{12} = 9844 \text{ mm}^4$$

Centralne momenty bezwładności (wykorzystanie twierdzenia Steinera) całej figury

sposób I:

$$\begin{aligned} I_{x_c} &= [I_{x_1} + A_1 \cdot (y_1 - y_c)^2] + [I_{x_2} + A_2 \cdot (y_2 - y_c)^2] + [I_{x_3} + A_3 \cdot (y_3 - y_c)^2] = \\ &= [7031 + 375 \cdot (7.5 - 23.9)^2] + [13021 + 250 \cdot (27.5 - 23.9)^2] + \\ &+ [2083 + 250 \cdot (45 - 23.9)^2] = [7031 + 375 \cdot 268.96] + [13021 + 250 \cdot 12.96] + \\ &+ [2083 + 250 \cdot 445.21] = 107891 + 16261 + 113385.5 = 237538 \text{ mm}^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{y_c} &= [I_{y_1} + A_1 \cdot (x_1 - x_c)^2] + [I_{y_2} + A_2 \cdot (x_2 - x_c)^2] + [I_{y_3} + A_3 \cdot (x_3 - x_c)^2] = \\ &= [19531 + 375 \cdot (27.5 - 21.1)^2] + [2083 + 250 \cdot (20 - 21.1)^2] + \\ &+ [13021 + 250 \cdot (12.5 - 21.1)^2] = [19531 + 375 \cdot 40.96] + [2083 + 250 \cdot 1.21] + \\ &+ [13021 + 250 \cdot 73.96] = 34891 + 2385.5 + 31511 = 68788 \text{ mm}^4 \end{aligned}$$

sposób II:

$$\begin{aligned} I_{x_c} &= [I_{x_1} + A_1 \cdot (y_1 - y_c)^2] - [I_{x_2} + A_2 \cdot (y_2 - y_c)^2] - [I_{x_3} + A_3 \cdot (y_3 - y_c)^2] = \\ &= [416667 + 2000 \cdot (25 - 23.9)^2] - [80000 + 600 \cdot (20 - 23.9)^2] - \\ &+ [53594 + 525 \cdot (32.5 - 23.9)^2] = [416667 + 2000 \cdot 1.21] - [80000 + 600 \cdot 15.21] - \\ &+ [53594 + 525 \cdot 73.96] = 419087 - 89126 - 92423 = 237538 \text{ mm}^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{y_c} &= [I_{y_1} + A_1 \cdot (x_1 - x_c)^2] - [I_{y_2} + A_2 \cdot (x_2 - x_c)^2] - [I_{y_3} + A_3 \cdot (x_3 - x_c)^2] = \\ &= [266667 + 2000 \cdot (20 - 21.1)^2] - [11250 + 600 \cdot (7.5 - 21.1)^2] - \\ &+ [9844 + 525 \cdot (32.5 - 21.1)^2] = [266667 + 2000 \cdot 1.21] - [11250 + 600 \cdot 184.96] - \\ &+ [9844 + 525 \cdot 129.96] = 269087 - 122226 - 78073 = 68788 \text{ mm}^4 \end{aligned}$$

Momenty odśrodkowe figur składowych względem osi przechodzących przez ich środki geometryczne

sposób I (tabela 1.1 → prostokąt):

$$I_{x_1y_1} = I_{x_2y_2} = I_{x_3y_3} = 0$$

sposób II (tabela 1.1 → prostokąt):

$$I_{x_1y_1} = I_{x_2y_2} = I_{x_3y_3} = 0$$

Centralny moment odśrodkowy całej figury

sposób I:

$$\begin{aligned} I_{x_c y_c} &= [I_{x_1 y_1} + A_1 \cdot (x_1 - x_c) \cdot (y_1 - y_c)] + [I_{x_2 y_2} + A_2 \cdot (x_2 - x_c) \cdot (y_2 - y_c)] + \\ &+ [I_{x_3 y_3} + A_3 \cdot (x_3 - x_c) \cdot (y_3 - y_c)] = [0 + 375 \cdot (27.5 - 21.1) \cdot (7.5 - 23.9)] + \\ &+ [0 + 250 \cdot (20 - 21.1) \cdot (27.5 - 23.9)] + [0 + 250 \cdot (12.5 - 21.1) \cdot (45 - 23.9)] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= [375 \cdot 6.4 \cdot (-136.4)] + [250 \cdot (-1.1) \cdot 3.6] + [250 \cdot (-8.6) \cdot 21.1] = \\
 &= -39360 - 990 - 645365 = -85715 \text{ mm}^4
 \end{aligned}$$

sposób II:

$$\begin{aligned}
 I_{x_c y_c} &= \left[I_{x_1 y_1} + A_1 \cdot (x_1 - x_c) \cdot (y_1 - y_c) \right] - \left[I_{x_2 y_2} + A_2 \cdot (x_2 - x_c) \cdot (y_2 - y_c) \right] - \\
 &+ \left[I_{x_3 y_3} + A_3 \cdot (x_3 - x_c) \cdot (y_3 - y_c) \right] = [0 + 2000 \cdot (20 - 21.1) \cdot (25 - 23.9)] - \\
 &+ [0 + 600 \cdot (7.5 - 21.1) \cdot (20 - 23.9)] - [0 + 525 \cdot (32.5 - 21.1) \cdot (32.5 - 23.9)] = \\
 &= [2000 \cdot (-1.1) \cdot 1.1] - [600 \cdot (-13.6) \cdot (-13.9)] - [525 \cdot 11.4 \cdot 8.6] = \\
 &= -2420 - 31824 - 51471 = -85715 \text{ mm}^4
 \end{aligned}$$

Główne centralne momenty bezwładności

$$\begin{aligned}
 \varphi_0 &= \frac{1}{2} \left(\arctg \frac{2I_{x_c y_c}}{I_{y_c} - I_{x_c}} \right) = \frac{1}{2} \left(\arctg \frac{2 \cdot (-85715)}{68788 - 237538} \right) = \frac{1}{2} \left(\arctg \frac{-171430}{-168750} \right) = \frac{1}{2} (\arctg 1.0159) = \\
 &= \frac{1}{2} \cdot 45.452^\circ = 22.7^\circ
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \frac{1}{2} (I_{x_c} + I_{y_c}) + \frac{1}{2} \sqrt{(I_{x_c} - I_{y_c})^2 + 4I_{x_c y_c}^2} = \frac{1}{2} (237538 + 68788) + \\
 &+ \frac{1}{2} \sqrt{(237538 - 68788)^2 + 4(-85715)^2} = \frac{1}{2} \cdot 306326 + \frac{1}{2} \sqrt{168750^2 + 4(-85715)^2} = \\
 &= 153163 + 120276 = 273439 \text{ mm}^4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \frac{1}{2} (I_{x_c} + I_{y_c}) - \frac{1}{2} \sqrt{(I_{x_c} - I_{y_c})^2 + 4I_{x_c y_c}^2} = \frac{1}{2} (237538 + 68788) - \\
 &+ \frac{1}{2} \sqrt{(237538 - 68788)^2 + 4(-85715)^2} = \frac{1}{2} \cdot 306326 - \frac{1}{2} \sqrt{168750^2 + 4(-85715)^2} = \\
 &= 153163 - 120276 = 32887 \text{ mm}^4
 \end{aligned}$$

Sprawdzenie

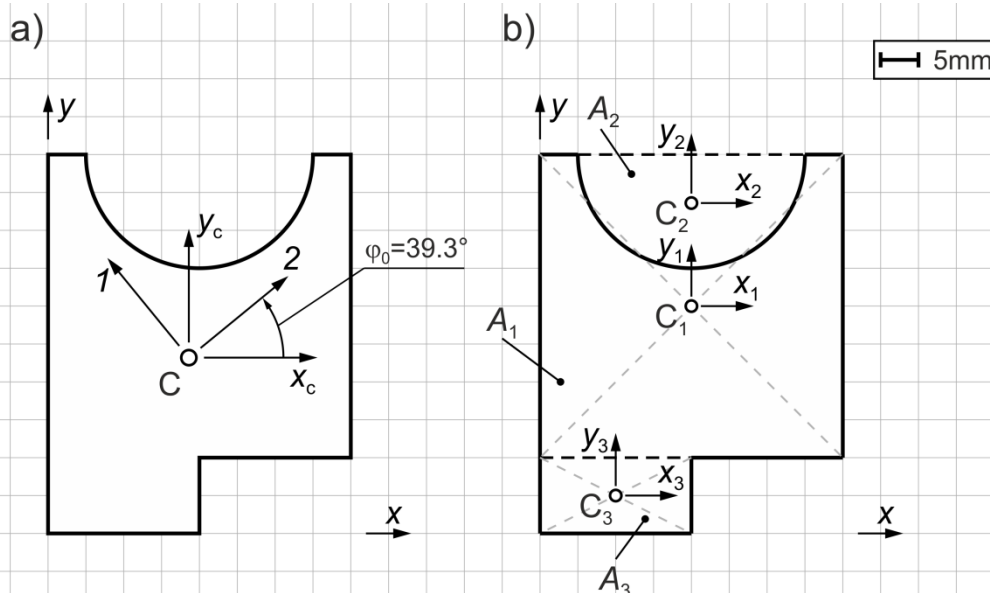
$$I_1 + I_2 = I_{x_c} + I_{y_c} \Rightarrow 273439 + 32887 = 237538 + 68788 \Rightarrow 306326 = 306326$$

PRZYKŁAD 1.6

Wyznaczyć pole powierzchni, położenie środka geometrycznego oraz wartości głównych centralnych momentów bezwładności figury płaskiej (rys. 1.11a).

Dokładność rozwiązania:

- pole powierzchni, momenty statyczne i bezwładności do liczby całkowitej,
- współrzędne środka geometrycznego do jednego miejsca po przekroju.



Rys. 1.11

ROZWIĄZANIE

Rozpatrywaną figurę można potraktować jako połączenie dwóch prostokątów (dużego A_1 i małego A_2), w których wycięto półkole (rys. 1.11b).

Pole powierzchni

$$A_1 = 40 \cdot 40 = 1600 \text{ mm}^2$$

$$A_2 = \frac{\pi \cdot 30^2}{8} = 353 \text{ mm}^2$$

$$A_3 = 20 \cdot 10 = 200 \text{ mm}^2$$

$$A = A_1 - A_2 + A_3 = 1600 - 353 + 200 = 1447 \text{ mm}^2$$

Momenty statyczne

$$\begin{aligned} S_x &= A_1 \cdot y_1 - A_2 \cdot y_2 + A_3 \cdot y_3 = 1600 \cdot 30 - 353 \cdot 43.6 + 200 \cdot 5 = \\ &= 48000 - 15390.8 + 1000 = 33609 \text{ mm}^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_y &= A_1 \cdot x_1 - A_2 \cdot x_2 + A_3 \cdot x_3 = 1600 \cdot 20 - 353 \cdot 20 + 200 \cdot 10 = \\ &= 32000 - 7060 + 2000 = 26940 \text{ mm}^3 \end{aligned}$$

Współrzędne środka geometrycznego

$$x_c = \frac{S_y}{A} = \frac{26940}{1447} = 18.6 \text{ mm}$$

$$y_c = \frac{S_x}{A} = \frac{33609}{1447} = 23.2 \text{ mm}$$

Momenty bezwładności figur składowych względem osi przechodzących przez ich środki geometryczne

(tabela 1.1 → prostokąt i półkole)

$$I_{x_1} = \frac{40 \cdot 40^3}{12} = 213333 \text{ mm}^4$$

$$I_{y_1} = \frac{40 \cdot 40^3}{12} = 213333 \text{ mm}^4$$

$$I_{x_2} = \left(\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi} \right) 15^4 = 5556 \text{ mm}^4$$

$$I_{y_2} = \frac{\pi \cdot 15^4}{8} = 19880 \text{ mm}^4$$

$$I_{x_3} = \frac{20 \cdot 10^3}{12} = 1667 \text{ mm}^4$$

$$I_{y_3} = \frac{10 \cdot 20^3}{12} = 6667 \text{ mm}^4$$

Centralne momenty bezwładności (wykorzystanie twierdzenia Steinera) całej figury

$$\begin{aligned} I_{x_c} &= [I_{x_1} + A_1 \cdot (y_1 - y_c)^2] - [I_{x_2} + A_2 \cdot (y_2 - y_c)^2] + [I_{x_3} + A_3 \cdot (y_3 - y_c)^2] = \\ &= [213333 + 1600 \cdot (30 - 23.2)^2] - [5556 + 353 \cdot (43.6 - 23.2)^2] + \\ &+ [1667 + 200 \cdot (5 - 23.2)^2] = [213333 + 1600 \cdot 46.24] - [5556 + 353 \cdot 416.16] + \\ &+ [1667 + 200 \cdot 331.24] = 287317 - 152460.48 + 67915 = 202772 \text{ mm}^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{y_c} &= [I_{y_1} + A_1 \cdot (x_1 - x_c)^2] - [I_{y_2} + A_2 \cdot (x_2 - x_c)^2] + [I_{y_3} + A_3 \cdot (x_3 - x_c)^2] = \\ &= [213333 + 1600 \cdot (20 - 18.6)^2] - [19880 + 353 \cdot (20 - 18.6)^2] + \\ &+ [6667 + 200 \cdot (10 - 18.6)^2] = [213333 + 1600 \cdot 1.96] - [19880 + 353 \cdot 1.96] + \\ &+ [6667 + 200 \cdot 73.96] = 216469 - 20571.9 + 21459 = 217356 \text{ mm}^4 \end{aligned}$$

Momenty odśrodkowe figur składowych względem osi przechodzących przez ich środki geometryczne

(tabela 1.1 → prostokąt i półkole)

$$I_{x_1 y_1} = I_{x_2 y_2} = I_{x_3 y_3} = 0$$

Centralny moment odśrodkowy całej figury

$$\begin{aligned} I_{x_c y_c} &= [I_{x_1 y_1} + A_1 \cdot (x_1 - x_c) \cdot (y_1 - y_c)] - [I_{x_2 y_2} + A_2 \cdot (x_2 - x_c) \cdot (y_2 - y_c)] + \\ &+ [I_{x_3 y_3} + A_3 \cdot (x_3 - x_c) \cdot (y_3 - y_c)] = [0 + 1600 \cdot (20 - 18.6) \cdot (30 - 23.2)] - \\ &+ [0 + 353 \cdot (20 - 18.6) \cdot (43.6 - 23.2)] + [0 + 200 \cdot (10 - 18.6) \cdot (5 - 23.2)] = \\ &= [1600 \cdot 1.4 \cdot 6.8] - [353 \cdot 1.4 \cdot 20.4] + [200 \cdot (-8.6) \cdot (-18.2)] = \\ &= 15232 - 10081.68 + 31304 = 36454 \text{ mm}^4 \end{aligned}$$

Główne centralne momenty bezwładności

$$\begin{aligned}\varphi_0 &= \frac{1}{2} \left(\operatorname{arctg} \frac{2I_{x_c y_c}}{I_{y_c} - I_{x_c}} \right) = \frac{1}{2} \left(\operatorname{arctg} \frac{2 \cdot 36454}{217356 - 202772} \right) = \frac{1}{2} \left(\operatorname{arctg} \frac{72908}{14584} \right) = \frac{1}{2} (\operatorname{arctg} 4.9992) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot 78.688^\circ = 39.3^\circ\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}I_1 &= \frac{1}{2} (I_{x_c} + I_{y_c}) + \frac{1}{2} \sqrt{(I_{x_c} - I_{y_c})^2 + 4I_{x_c y_c}^2} = \frac{1}{2} (202772 + 217356) + \\ &+ \frac{1}{2} \sqrt{(202772 - 217356)^2 + 4 \cdot 36454^2} = \frac{1}{2} \cdot 420128 + \frac{1}{2} \sqrt{(-14584)^2 + 4 \cdot 36454^2} = \\ &= 210064 + 37176 = 247240 \text{ mm}^4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}I_2 &= \frac{1}{2} (I_{x_c} + I_{y_c}) - \frac{1}{2} \sqrt{(I_{x_c} - I_{y_c})^2 + 4I_{x_c y_c}^2} = \frac{1}{2} (202772 + 217356) - \\ &+ \frac{1}{2} \sqrt{(202772 - 217356)^2 + 4 \cdot 36454^2} = \frac{1}{2} \cdot 420128 - \frac{1}{2} \sqrt{(-14584)^2 + 4 \cdot 36454^2} = \\ &= 210064 - 37176 = 172888 \text{ mm}^4\end{aligned}$$

Sprawdzenie

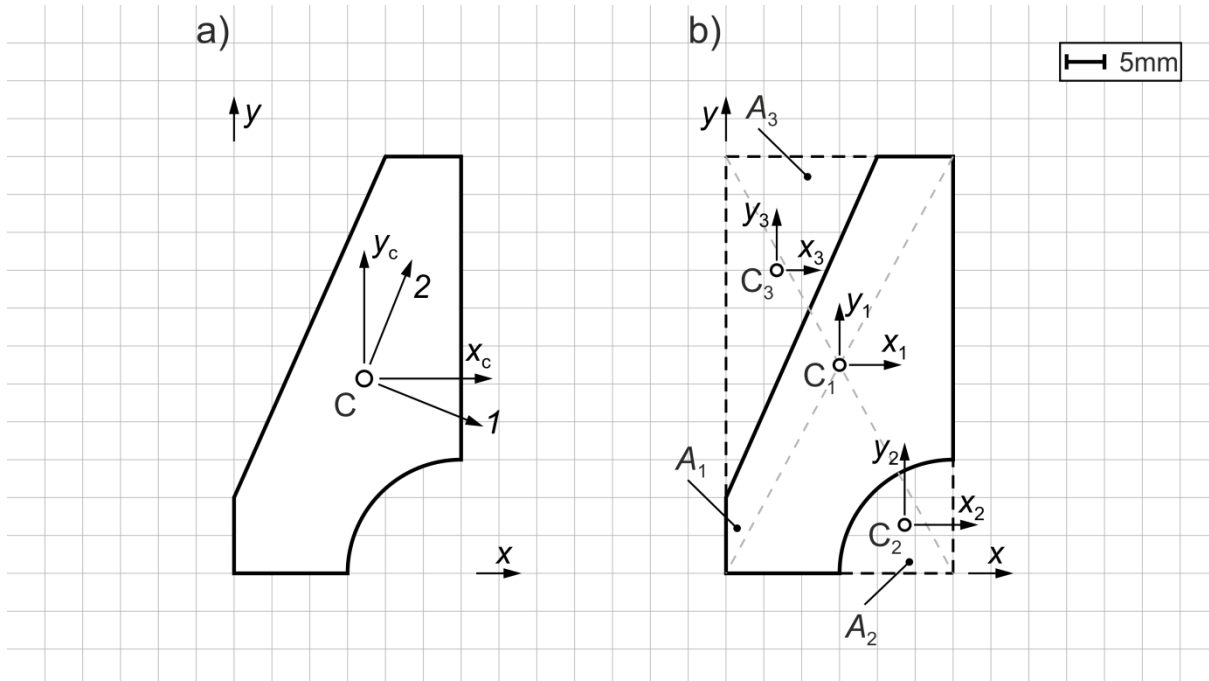
$$I_1 + I_2 = I_{x_c} + I_{y_c} \Rightarrow 247240 + 172888 = 202772 + 217356 \Rightarrow 420128 = 420128$$

PRZYKŁAD 1.7

Wyznaczyć pole powierzchni, położenie środka geometrycznego oraz wartości głównych centralnych momentów bezwładności figury płaskiej (rys. 1.12a).

Dokładność rozwiązania:

- pole powierzchni, momenty statyczne i bezwładności do liczby całkowitej,
- współrzędne środka geometrycznego do jednego miejsca po przekroju.



Rys. 1.12

ROZWIĄZANIE

Rozpatrywaną figurę można potraktować jako duży prostokąt (A_1), w którym wycięty jest 90-stopniowy wycinek koła (A_2) i trójkąt prostokątny (A_3 ; rys. 12b).

Pole powierzchni

$$A_1 = 30 \cdot 55 = 1650 \text{ mm}^2$$

$$A_2 = \frac{\pi \cdot 15^2}{4} = 177 \text{ mm}^2$$

$$A_3 = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 45 = 450 \text{ mm}^2$$

$$A = A_1 - A_2 - A_3 = 1650 - 177 - 450 = 1023 \text{ mm}^2$$

Momenty statyczne

$$\begin{aligned} S_x &= A_1 \cdot y_1 - A_2 \cdot y_2 - A_3 \cdot y_3 = 1650 \cdot 27.5 - 177 \cdot \frac{4 \cdot 15}{3\pi} - 450 \cdot 40 = \\ &= 45375 - 1127 - 18000 = 26248 \text{ mm}^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_y &= A_1 \cdot x_1 - A_2 \cdot x_2 - A_3 \cdot x_3 = 1650 \cdot 15 - 177 \cdot \left(30 - \frac{4 \cdot 15}{3\pi}\right) + 450 \cdot 6.7 = \\ &= 24750 - 4177 - 3015 = 17558 \text{ mm}^3 \end{aligned}$$

Współrzędne środka geometrycznego

$$x_c = \frac{S_y}{A} = \frac{17558}{1023} = 17.2 \text{ mm}$$

$$y_c = \frac{S_x}{A} = \frac{26248}{1023} = 25.7 \text{ mm}$$

Momenty bezwładności figur składowych względem osi przechodzących przez ich środki geometryczne

(tabela 1.1 → prostokąt, półkole i trójkąt prostokątny)

$$I_{x_1} = \frac{30 \cdot 55^3}{12} = 415938 \text{ mm}^4$$

$$I_{y_1} = \frac{55 \cdot 30^3}{12} = 123750 \text{ mm}^4$$

$$I_{x_2} = \left(\frac{\pi}{16} - \frac{4}{9\pi} \right) 15^4 = 2778 \text{ mm}^4$$

$$I_{y_2} = \left(\frac{\pi}{16} - \frac{4}{9\pi} \right) 15^4 = 2778 \text{ mm}^4$$

$$I_{x_3} = \frac{20 \cdot 45^3}{36} = 50625 \text{ mm}^4$$

$$I_{y_3} = \frac{45 \cdot 20^3}{12} = 10000 \text{ mm}^4$$

Centralne momenty bezwładności (wykorzystanie twierdzenia Steinera) całej figury

$$\begin{aligned} I_{x_c} &= [I_{x_1} + A_1 \cdot (y_1 - y_c)^2] - [I_{x_2} + A_2 \cdot (y_2 - y_c)^2] - [I_{x_3} + A_3 \cdot (y_3 - y_c)^2] = \\ &= [415938 + 1650 \cdot (27.5 - 25.7)^2] - [2778 + 177 \cdot (6.4 - 25.7)^2] - \\ &+ [50625 + 450 \cdot (40 - 25.7)^2] = [415938 + 1650 \cdot 3.24] - [2778 + 177 \cdot 372.49] - \\ &+ [50625 + 450 \cdot 204.49] = 421284 - 68708.7 - 142645.5 = 209930 \text{ mm}^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{y_c} &= [I_{y_1} + A_1 \cdot (x_1 - x_c)^2] - [I_{y_2} + A_2 \cdot (x_2 - x_c)^2] - [I_{y_3} + A_3 \cdot (x_3 - x_c)^2] = \\ &= [123750 + 1650 \cdot (15 - 17.2)^2] - [2778 + 177 \cdot (23.6 - 17.2)^2] - \\ &+ [10000 + 450 \cdot (6.7 - 17.2)^2] = [123750 + 1650 \cdot 4.84] - [2778 + 177 \cdot 40.96] - \\ &+ [10000 + 450 \cdot 110.25] = 131736 - 10027.9 - 59612.5 = 62096 \text{ mm}^4 \end{aligned}$$

Momenty odśrodkowe figur składowych względem osi przechodzących przez ich środki geometryczne

(tabela 1.1 → prostokąt, półkole i trójkąt prostokątny)

$$I_{x_1 y_1} = 0$$

$$I_{x_2 y_2} = \left(\frac{4}{9\pi} - \frac{1}{8} \right) \cdot 15^4 = 834 \text{ mm}^4$$

$$I_{x_3 y_3} = \frac{20^2 \cdot 45^2}{72} = 11250 \text{ mm}^4$$

Centralny moment odśrodkowy całej figury

$$\begin{aligned} I_{x_c y_c} &= [I_{x_1 y_1} + A_1 \cdot (x_1 - x_c) \cdot (y_1 - y_c)] - [I_{x_2 y_2} + A_2 \cdot (x_2 - x_c) \cdot (y_2 - y_c)] - \\ &+ [I_{x_3 y_3} + A_3 \cdot (x_3 - x_c) \cdot (y_3 - y_c)] = [0 + 1650 \cdot (15 - 17.2) \cdot (27.5 - 25.7)] - \\ &+ [834 + 177 \cdot (23.6 - 17.2) \cdot (6.4 - 25.7)] - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +[11250 + 450 \cdot (6.7 - 17.2) \cdot (40 - 25.7)] = \\
& = [1650 \cdot (-2.2) \cdot 1.8] - [834 + 177 \cdot 6.4 \cdot (-19.3)] - [11250 + 450 \cdot (-10.5) \cdot 14.3] = \\
& = -6534 + 21029 + 56317.5 = 70813 \text{ mm}^4
\end{aligned}$$

Główne centralne momenty bezwładności

$$\begin{aligned}
\varphi_0 &= \frac{1}{2} \left(\arctg \frac{2I_{x_c y_c}}{I_{y_c} - I_{x_c}} \right) = \frac{1}{2} \left(\arctg \frac{2 \cdot 70813}{62096 - 209930} \right) = \frac{1}{2} \left(\arctg \frac{141626}{-147834} \right) = \frac{1}{2} (\arctg(-0.9580)) = \\
&= \frac{1}{2} \cdot (-43.71^\circ) = -21.9^\circ
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_1 &= \frac{1}{2} (I_{x_c} + I_{y_c}) + \frac{1}{2} \sqrt{(I_{x_c} - I_{y_c})^2 + 4I_{x_c y_c}^2} = \frac{1}{2} (209930 + 62096) + \\
&+ \frac{1}{2} \sqrt{(209930 - 62096)^2 + 4 \cdot 70813^2} = 136013 + \frac{1}{2} \sqrt{147834^2 + 4 \cdot 70813^2} = \\
&= 136013 + 102363 = 238376 \text{ mm}^4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_2 &= \frac{1}{2} (I_{x_c} + I_{y_c}) - \frac{1}{2} \sqrt{(I_{x_c} - I_{y_c})^2 + 4I_{x_c y_c}^2} = \frac{1}{2} (209930 + 62096) - \\
&+ \frac{1}{2} \sqrt{(209930 - 62096)^2 + 4 \cdot 70813^2} = 136013 - \frac{1}{2} \sqrt{147834^2 + 4 \cdot 70813^2} = \\
&= 136013 - 102363 = 33650 \text{ mm}^4
\end{aligned}$$

Sprawdzenie

$$I_1 + I_2 = I_{x_c} + I_{y_c} \Rightarrow 238376 + 33650 = 209930 + 62096 \Rightarrow 272026 = 272026$$

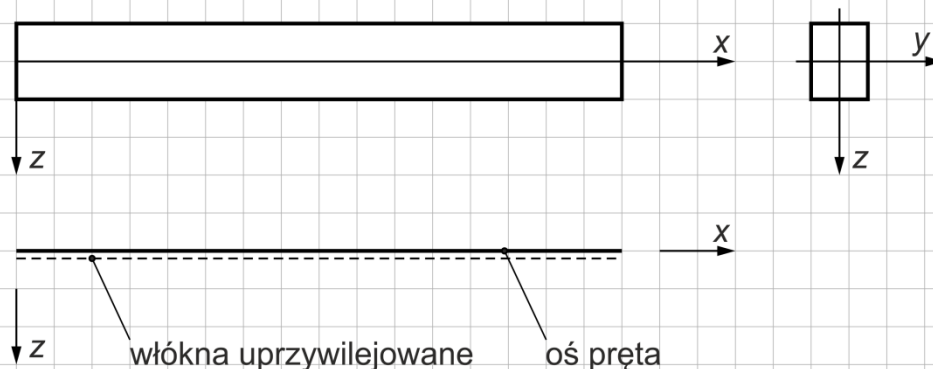
2.

WIELKOŚCI PRZEKROJOWE W PRĘTACH PROSTYCH

Pręt jest elementem maszyn, którego długość jest o rząd większa od wymiarów przekroju poprzecznego. Pręt o osi prostoliniowej i stałym przekroju poprzecznym nazywany jest prętem pryzmatycznym. Pręt pryzmatyczny, którego podpory są na jednym lub dwóch końcach pręta, nazywamy prętem prostym.

Pręt prosty może być rozciągany, ściskany, skręcany lub poddany ścinaniu technicznemu. Pręt prosty poddany zginaniu lub zginaniu ze ścinaniem nazywamy również belką prostą. W dalszych rozważaniach używamy określenia pręt prosty, mając na myśli pręt lub belkę prostą.

Pręt prosty można traktować jako zbiór połączonych ze sobą włókien materialnych równoległych do osi pręta. Włókna najbardziej oddalone od osi pręta po stronie dodatniej osi z nazywane są włóknami uprzywilejowanymi (rys. 2.1). Na schemacie statycznym pręt przedstawiamy za pomocą osi pręta. Pręt rozpatrujemy w układzie kartezjańskim xyz , gdzie x – oś podłużna, y, z – główne centralne osie bezwładności przekroju poprzecznego pręta. W układach płaskich zginanie jest w płaszczyźnie xz .



Rys. 2.1

Pręty mogą być obciążone siłami skupionymi (rys. 2.2a), obciążeniami równomiernie rozłożonymi (rys. 2.2b) lub momentami skupionymi o wektorach działających prostopadle lub wzdłuż osi pręta (rys. 2.2c). Jednostką podstawową SI siły skupionej jest [N], obciążenia

równomiernie rozłożonego [N/m], a momentu skupionego [N·m]. Są to podstawowe typy obciążeń.

Pręt obciążony prostopadłe do jego osi nazywany jest również belką.

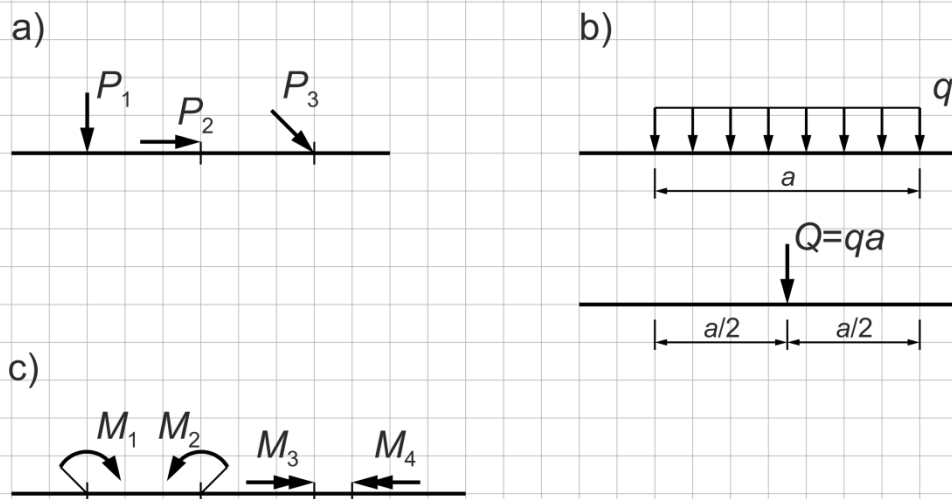
Pod wpływem obciążeń zewnętrznych, w przekrojach pręta występują wielkości przekrojowe: siła osiowa (podłużna), siła tnąca (poprzeczna), moment gnący (zginający) i/lub moment skręcający.

Siłą osiową N w danym przekroju nazywamy sumę rzutów sił zewnętrznych działających po jednej stronie przekroju na kierunek osi pręta. Siła osiowa rozciągająca jest dodatnia, a ściskająca ujemna (rys. 2.4).

Momentem skręcającym M_s w danym przekroju nazywamy sumę momentów obciążeń zewnętrznych działających po jednej stronie przekroju względem osi pręta. Moment skręcający jest dodatni, jeśli ma zwrot zgodny z osią x po prawej stronie przekroju (rys. 2.4).

Momentem zginającym M w danym przekroju nazywamy sumę momentów obciążeń zewnętrznych działających po jednej stronie przekroju względem osi y w środku geometrycznym tego przekroju. Moment zginający jest dodatni, jeśli rozciąga włókna uprzywilejowane (ma zwrot zgodny z osią y po prawej stronie przekroju) (rys. 2.4).

Siłą tnącą T w danym przekroju nazywamy sumę rzutów sił zewnętrznych działających po jednej stronie przekroju na kierunek osi z (rys. 2.4). Siła tnąca jest dodatnia, jeśli jest zgodna ze zwrotem osi z po prawej stronie przekroju poprzecznego.



Rys. 2.2

Przed przystąpieniem do wyznaczania wielkości przekrojowych konieczne jest wyznaczenie reakcji na podporach płaskich (rys. 2.3). Wartości reakcji wyznacza się z równań równowagi statycznej, które dla układu płaskiego przyjmują postać:

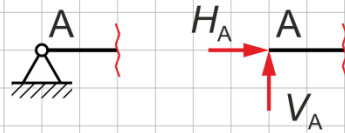
$$\sum P_{ix} = 0 \quad , \quad \sum P_{iz} = 0 \quad , \quad \sum M_i = 0 \quad (2.1)$$

Równania (2.1a) i (2.1b) postulują zerowanie się sumy rzutów sił na osie, odpowiednio x i z . Równanie (2.1c) postuluje zerowanie się sumy momentów względem wybranej osi (x lub y).

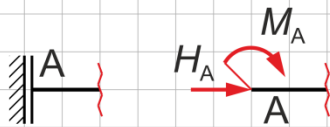
podpora przegubowo-przesuwna



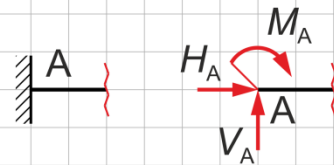
podpora przegubowa



podpora sztywno-przesuwna



podpora sztywna



Rys. 2.3

dotąd wartości wielkości przekrojowych

siła osiowa



moment skręcający



moment zginający



siła tnąca

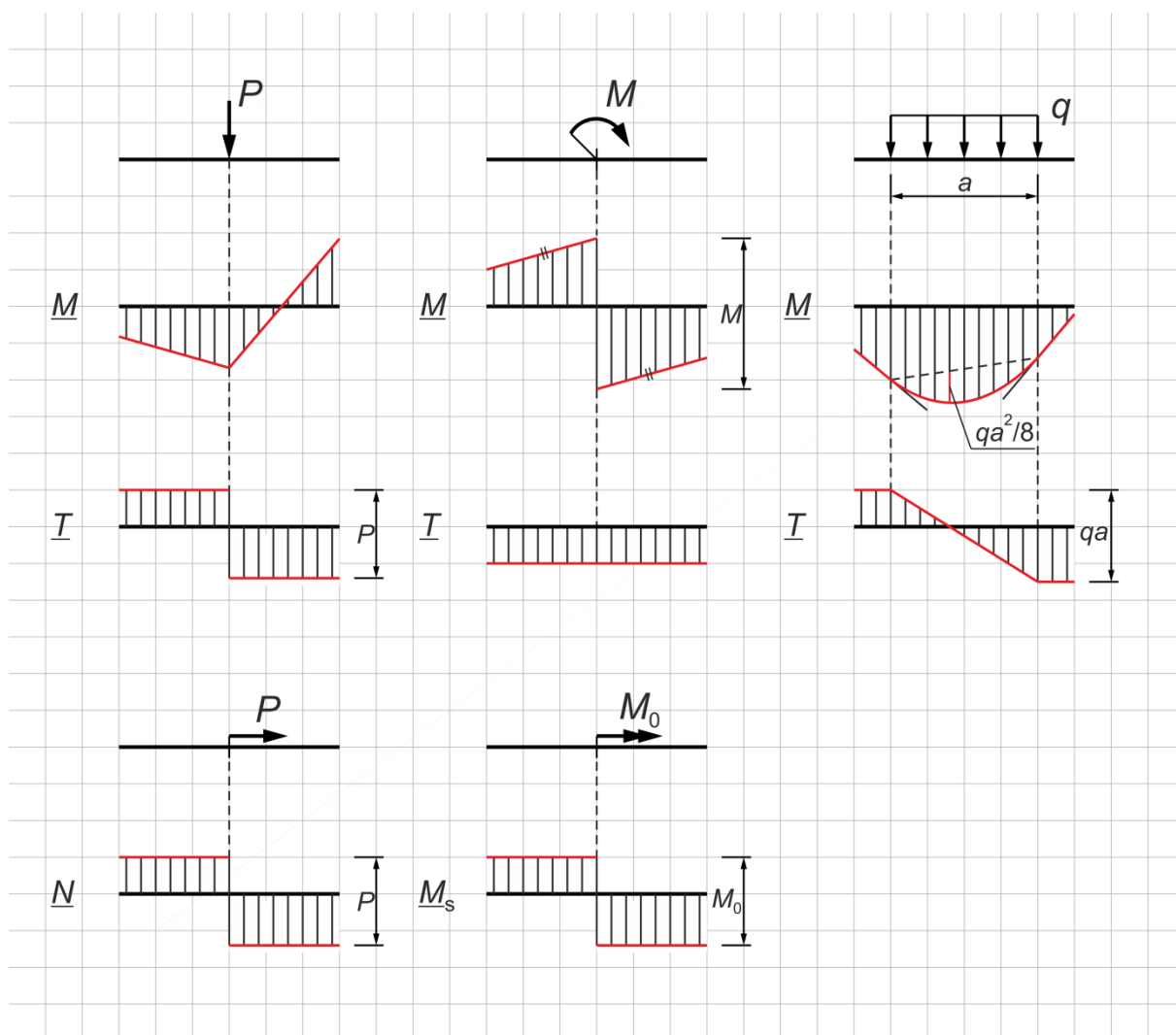


Rys. 2.4

Moment zginający M i siłę tnącą T można wyznaczyć dwiema metodami, tj. metodą przepisów funkcyjnych i metodą rzędnych charakterystycznych.

W metodzie przepisów funkcyjnych wyznacza się funkcje $M(x)$ i $T(x)$ dla kolejnych przedziałów belki, a następnie oblicza się tzw. rzędne charakterystyczne (rzędne niezbędne do sporządzenia wykresów M i T).

W metodzie rzędnych charakterystycznych pomija się wyznaczanie funkcji $M(x)$ i $T(x)$, wyznacza się od razu rzędne charakterystyczne, wykorzystując cechy charakterystyczne wykresów wielkości przekrojowych (rys. 2.5).



Rys. 2.5

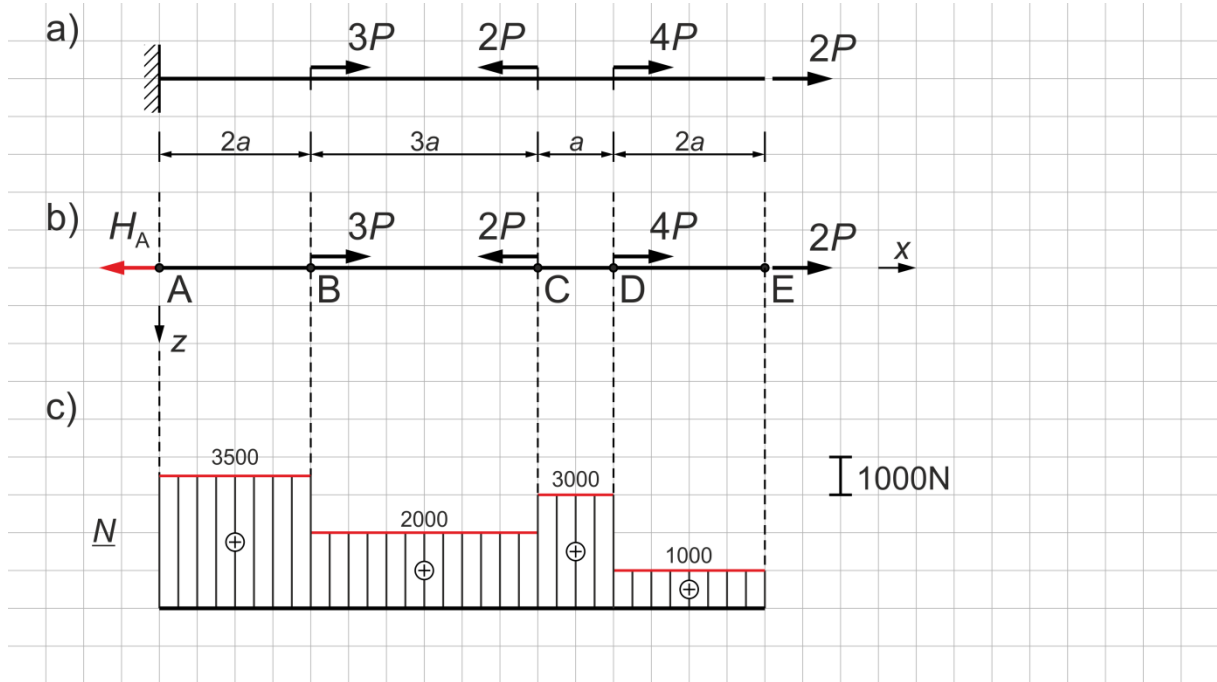
PRZYKŁAD 2.1

Wyznaczyć wykresy wielkości przekrojowych dla pręta przedstawionego na rys. 2.6a.

Dane:

$$a = 0.5 \text{ m}$$

$$P = 500 \text{ N}$$



Rys. 2.6

ROZWIĄZANIE

Schemat statyczny pokazano na rys. 2.6a. Pręt sztywno zamocowany na lewym końcu jest rozciągany lub ściskany. Siły czynne wywołują tylko siłę osiową N . Rysujemy schemat obliczeniowy (rys. 2.6b) i wyznaczamy reakcję H_A na podporze A z równania równowagi statycznej suma rzutów sił na oś x .

Reakcja podłużna

$$\sum P_{ix} = 0: \quad -H_A + 3P - 2P + 4P + 2P = 0$$

$$H_A = 3P - 2P + 4P + 2P = 7P = 7 \cdot 500 = 3500 \text{ N}$$

Wartości siły osiowej (wykres siły osiowej na rys. 2.6c)

od lewej:

$$N_{AB} = H_A = 7P = 7 \cdot 500 = 3500 \text{ N}$$

$$N_{BC} = H_A - 3P = 7P - 3P = 4P = 4 \cdot 500 = 2000 \text{ N}$$

$$N_{CD} = H_A - 3P + 2P = 7P - 3P + 2P = 6P = 6 \cdot 500 = 3000 \text{ N}$$

$$N_{DE} = H_A - 3P + 2P - 4P = 7P - 3P + 2P - 4P = 2P = 2 \cdot 500 = 1000 \text{ N}$$

od prawej:

$$N_{AB} = 3P - 2P + 4P + 2P = 7P = 7 \cdot 500 = 3500 \text{ N}$$

$$N_{BC} = -2P + 4P + 2P = 4P = 4 \cdot 500 = 2000 \text{ N}$$

$$N_{CD} = 4P + 2P = 6P = 6 \cdot 500 = 3000 \text{ N}$$

$$N_{DE} = 2P = 2P = 2 \cdot 500 = 1000 \text{ N}$$

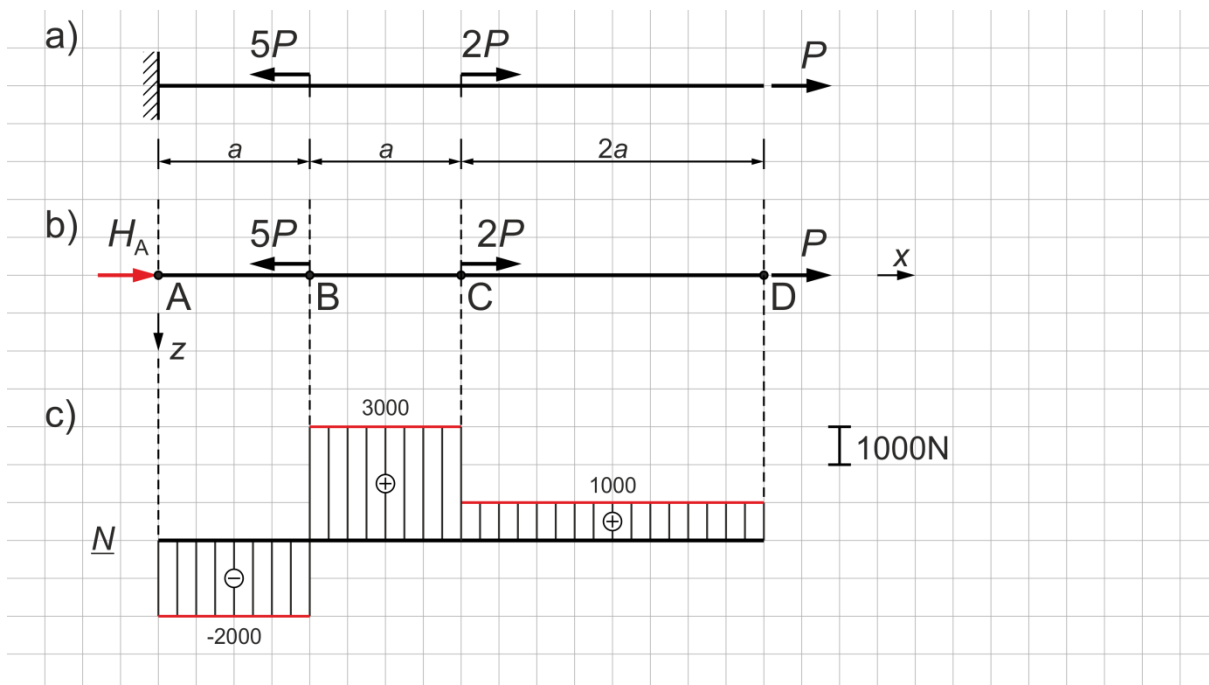
PRZYKŁAD 2.2

Wyznaczyć wykresy wielkości przekrojowych dla pręta przedstawionego na rys. 2.7a.

Dane:

$$a = 1.0 \text{ m}$$

$$P = 1000 \text{ N}$$



Rys. 2.7

ROZWIĄZANIE

Schemat statyczny pokazano na rys. 2.7a. Pręt sztywno zamocowany na lewym końcu jest rozciągany lub ściskany. Siły czynne wywołują tylko siłę osiową N . Rysujemy schemat obliczeniowy (rys. 2.7b) i wyznaczamy reakcję H_A na podporze A z równania równowagi statycznej suma rzutów sił na oś x .

Reakcja podłużna

$$\sum P_{ix} = 0: \quad H_A - 5P + 2P + P = 0$$

$$H_A = 5P - 2P - P = 2P = 2 \cdot 1000 = 2000 \text{ N}$$

Wartości siły osiowej (wykres siły osiowej na rys. 2.7c)

od lewej:

$$N_{AB} = -H_A = -2P = -2 \cdot 1000 = -2000 \text{ N}$$

$$N_{BC} = -H_A + 5P = -2P + 5P = 3P = 3 \cdot 1000 = 3000 \text{ N}$$

$$N_{CD} = -H_A + 5P - 2P = -2P + 5P - 2P = P = 1000 \text{ N}$$

od prawej:

$$N_{AB} = -5P + 2P + P = -2P = -2 \cdot 1000 = -2000 \text{ N}$$

$$N_{BC} = 2P + P = 3P = 3 \cdot 1000 = 3000 \text{ N}$$

$$N_{CD} = P = 1000 \text{ N}$$

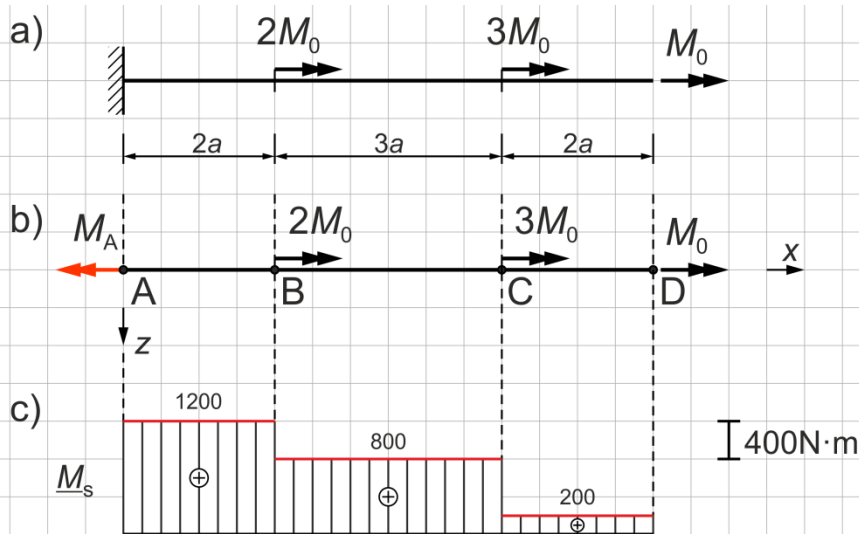
PRZYKŁAD 2.3

Wyznaczyć wykresy wielkości przekrojowych dla pręta przedstawionego na rys. 2.8a.

Dane:

$$a = 0.5 \text{ m}$$

$$M_0 = 200 \text{ N}\cdot\text{m}$$



Rys. 2.8

ROZWIĄZANIE

Schemat statyczny pokazano na rys. 2.8a. Pręt sztywno zamocowany na lewym końcu jest skręcany. Momenty czynne wywołują tylko moment skręcający M_s . Rysujemy schemat obliczeniowy (rys. 2.8b) i wyznaczamy reakcję momentową M_A na podporze A z równania równowagi statycznej suma momentów względem osi x .

Reakcja momentowa

$$\sum M_x = 0: \quad -M_A + 2M_0 + 3M_0 + M_0 = 0$$

$$M_A = 2M_0 + 3M_0 + M_0 = 6M_0 = 6 \cdot 200 = 1200 \text{ N}\cdot\text{m}$$

Wartości momentu skręcającego (wykres momentu skręcającego na rys. 2.8c)

od lewej:

$$M_{s,AB} = M_A = 6M_0 = 6 \cdot 200 = 1200 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$M_{s,BC} = M_A - 2M_0 = 6M_0 - 2M_0 = 4M_0 = 4 \cdot 200 = 800 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$M_{s,CD} = M_A - 2M_0 - 3M_0 = 6M_0 - 2M_0 - 3M_0 = M_0 = 200 \text{ N}\cdot\text{m}$$

od prawej:

$$M_{s,AB} = 2M_0 + 3M_0 + M_0 = 6M_0 = 6 \cdot 200 = 1200 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$M_{s,BC} = 3M_0 + M_0 = 4M_0 = 4 \cdot 200 = 800 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$M_{s,CD} = M_0 = 200 \text{ N}\cdot\text{m}$$

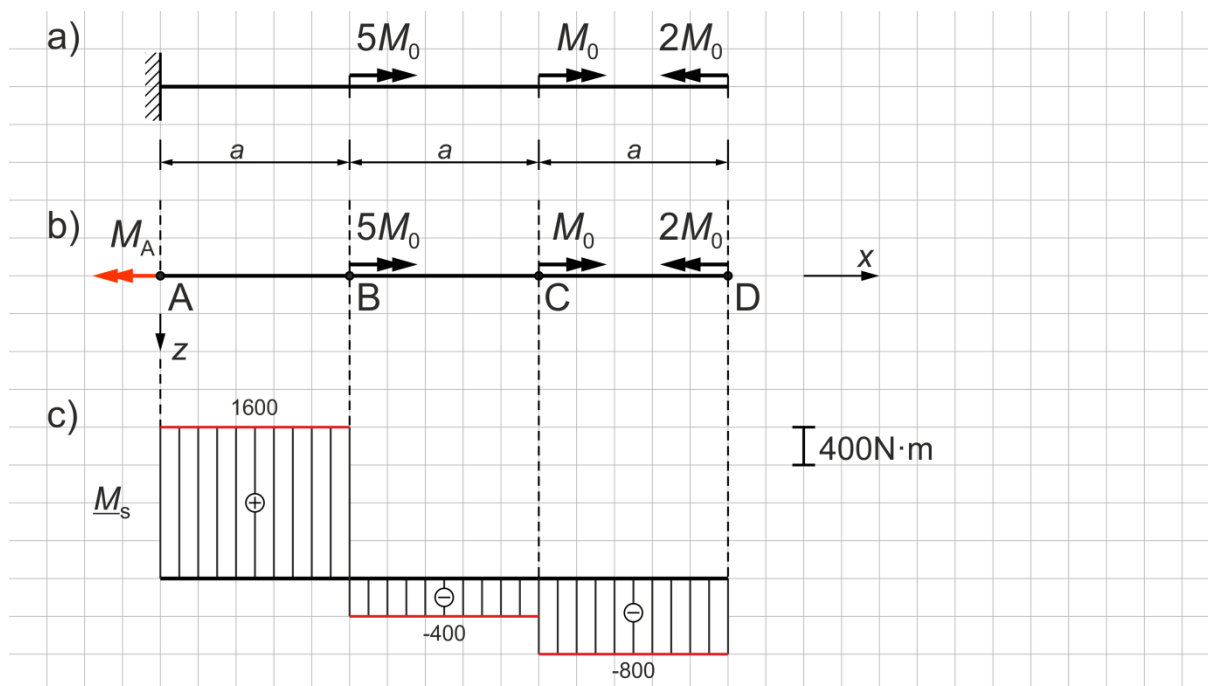
PRZYKŁAD 2.4

Wyznaczyć wykresy wielkości przekrojowych dla pręta przedstawionego na rys. 2.9a.

Dane:

$$a = 1.0 \text{ m}$$

$$M_0 = 400 \text{ N}\cdot\text{m}$$



Rys. 2.9

ROZWIĄZANIE

Schemat statyczny pokazano na rys. 2.9a. Pręt sztywno zamocowany na lewym końcu jest skręcany. Momenty czynne wywołują tylko moment skręcający M_s . Rysujemy schemat obliczeniowy (rys. 2.9b) i wyznaczamy reakcję momentową M_A na podporze A z równania równowagi statycznej suma momentów względem osi x .

Reakcja momentowa

$$\sum M_x = 0: \quad -M_A + 5M_0 + M_0 - 2M_0 = 0$$

$$M_A = 5M_0 + M_0 - 2M_0 = 4M_0 = 4 \cdot 400 = 1600 \text{ N}\cdot\text{m}$$

Wartości momentu skręcającego (wykres momentu skręcającego na rys. 2.9c)

od lewej:

$$M_{s,AB} = M_A = 4M_0 = 4 \cdot 400 = 1600 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$M_{s,BC} = M_A - 5M_0 = 4M_0 - 5M_0 = -M_0 = -400 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$M_{s,CD} = M_A - 5M_0 - M_0 = 4M_0 - 5M_0 - M_0 = -2M_0 = -2 \cdot 400 = -800 \text{ N}\cdot\text{m}$$

od prawej:

$$M_{s,AB} = 5M_0 + M_0 - 2M_0 = 4M_0 = 4 \cdot 400 = 1600 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$M_{s,BC} = M_0 - 2M_0 = -M_0 = -400 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$M_{s,CD} = -2M_0 = -2 \cdot 400 = -800 \text{ N}\cdot\text{m}$$

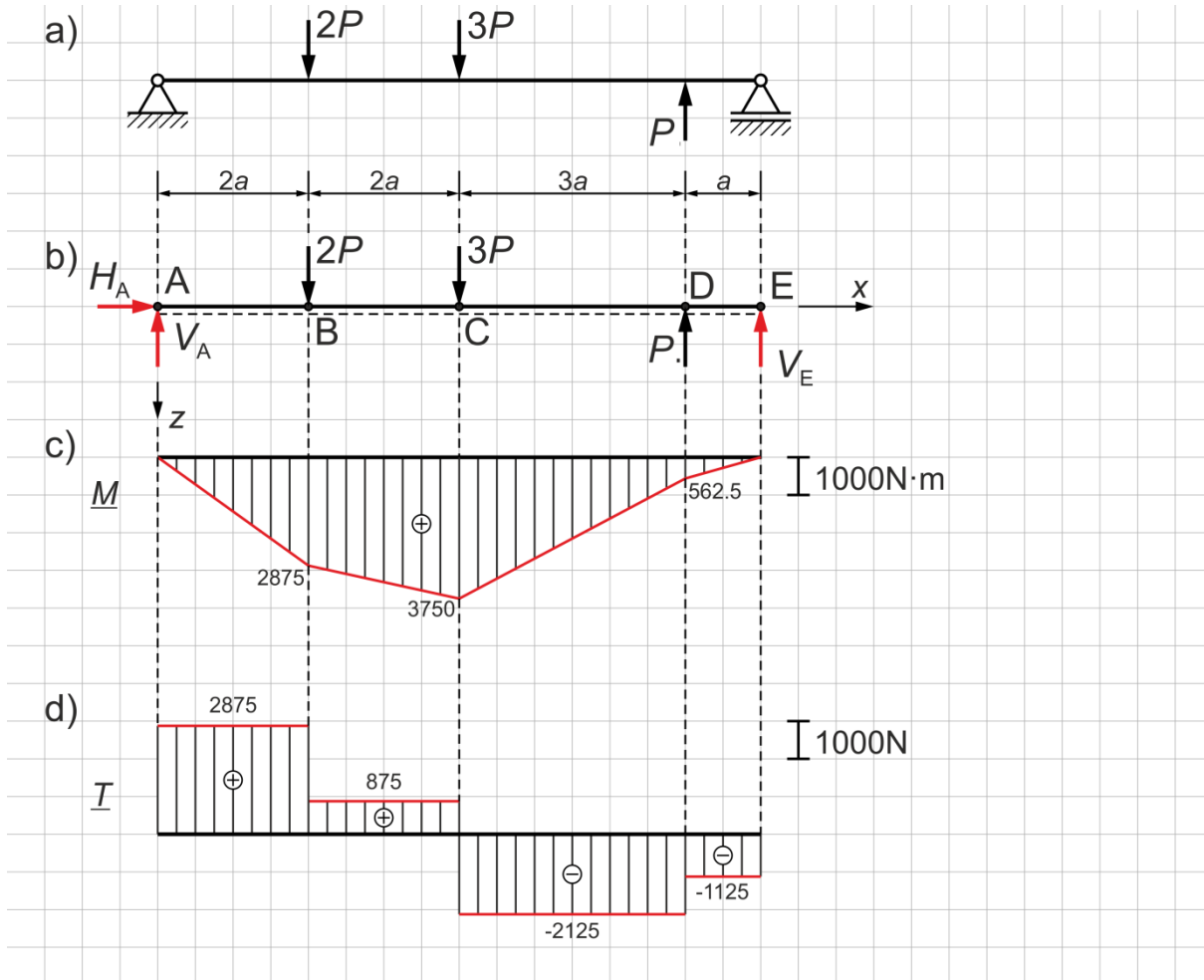
PRZYKŁAD 2.5

Wyznaczyć wykresy wielkości przekrojowych dla belki przedstawionej na rys. 2.10a.

Dane:

$$a = 0.5 \text{ m}$$

$$P = 1000 \text{ N}$$



Rys. 2.10

ROZWIĄZANIE

Schemat statyczny pokazano na rys. 2.10a. Belka swobodnie podparta jest zginana i ścinana w płaszczyźnie pionowej. Obciążenia zewnętrzne (siły skupione pionowe) wywołują moment zginający i siłę tnącą. Rysujemy schemat obliczeniowy (rys. 2.10b) i wyznaczamy reakcje z równań równowagi statycznej.

Reakcje

$$\sum P_{ix} = 0: \quad H_A = 0$$

$$\sum M_A = 0: \quad -2P \cdot 2a - 3P \cdot 4a + P \cdot 7a + V_E \cdot 8a = 0$$

$$-4Pa - 12Pa + 7Pa + V_E \cdot 8a = 0$$

$$-9Pa + V_E \cdot 8a = 0$$

$$V_E = \frac{9Pa}{8a} = 1.125P = 1.125 \cdot 1000 = 1125 \text{ N}$$

$$\sum P_{iz} = 0: \quad -V_A + 2P + 3P - P - V_E = 0$$

$$-V_A + 4P - V_E = 0$$

$$V_A = 4P - V_E = 4P - 1.125P = 2.875P = 2.875 \cdot 1000 = 2875 \text{ N}$$

Równanie sprawdzające

$$\sum M_C = 0: \quad -V_A \cdot 4a + 2P \cdot 2a + P \cdot 3a + V_E \cdot 4a = 0$$

$$-2.875P \cdot 4a + 4Pa + 3Pa + 1.125P \cdot 4a = 0$$

$$-11.5Pa + 4Pa + 3Pa + 4.5Pa = 0 \quad \rightarrow \quad 0 = 0$$

Wartości momentów zginających (rys. 2.10c)

od lewej:

$$M_A = 0$$

$$M_B = V_A \cdot 2a = 2.875P \cdot 2a = 5.75Pa = 5.75 \cdot 1000 \cdot 0.5 = 2875 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$M_C = V_A \cdot 4a - 2P \cdot 2a = 2.875P \cdot 4a - 4Pa = 11.5Pa - 4Pa = 7.5Pa = \\ = 7.5 \cdot 1000 \cdot 0.5 = 3750 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$M_D = V_A \cdot 7a - 2P \cdot 5a - 3P \cdot 3a = 2.875P \cdot 7a - 10Pa - 9Pa = \\ = 20.125Pa - 10Pa - 9Pa = 1.125Pa = 1.125 \cdot 1000 \cdot 0.5 = 562.5 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$M_E = V_A \cdot 8a - 2P \cdot 6a - 3P \cdot 4a + P \cdot a = 2.875P \cdot 8a - 12Pa - 12Pa + Pa = \\ = 23Pa - 12Pa - 12Pa + Pa = 0$$

od prawej:

$$M_A = -2P \cdot 2a - 3P \cdot 4a + P \cdot 7a + V_E \cdot 8a = -4Pa - 12Pa + 7Pa + 1.125P \cdot 8a = \\ = -4Pa - 12Pa + 7Pa + 9Pa = 0$$

$$M_B = -3P \cdot 2a + P \cdot 5a + V_E \cdot 6a = -6Pa + 5Pa + 1.125P \cdot 6a = \\ = -6Pa + 5Pa + 6.75Pa = 5.75Pa = 5.75 \cdot 1000 \cdot 0.5 = 2875 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$M_C = P \cdot 3a + V_E \cdot 4a = 3Pa + 1.125P \cdot 4a = 3Pa + 4.5Pa = 7.5Pa = \\ = 7.5 \cdot 1000 \cdot 0.5 = 3750 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$M_D = V_E \cdot a = 1.125Pa = 1.125 \cdot 1000 \cdot 0.5 = 562.5 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$M_E = 0$$

Wartości sił tnących (rys. 2.10d)

od lewej:

$$T_{AB} = V_A = 2.875P = 2.875 \cdot 1000 = 2875 \text{ N}$$

$$T_{BC} = V_A - 2P = 2.875P - 2P = 0.875P = 0.875 \cdot 1000 = 875 \text{ N}$$

$$T_{CD} = V_A - 2P - 3P = 2.875P - 2P - 3P = -2.125 \cdot 1000 = -2125 \text{ N}$$

$$T_{DE} = V_A - 2P - 3P + P = 2.875P - 2P - 3P + P = -1.125P =$$

$$= -1.125 \cdot 1000 = -1125 \text{ N}$$

od prawej:

$$T_{AB} = 2P + 3P - P - V_E = 2P + 3P - P - 1.125P = 2.875P = 2.875 \cdot 1000 = 2875 \text{ N}$$

$$T_{BC} = 3P - P - V_E = 3P - P - 1.125P = 0.875P = 0.875 \cdot 1000 = 875 \text{ N}$$

$$T_{CD} = -P - V_E = -P - 1.125P = -2.125P = -2.125 \cdot 1000 = -2125 \text{ N}$$

$$T_{DE} = -V_E = -1.125P = -1.125 \cdot 1000 = -1125 \text{ N}$$

PRZYKŁAD 2.6

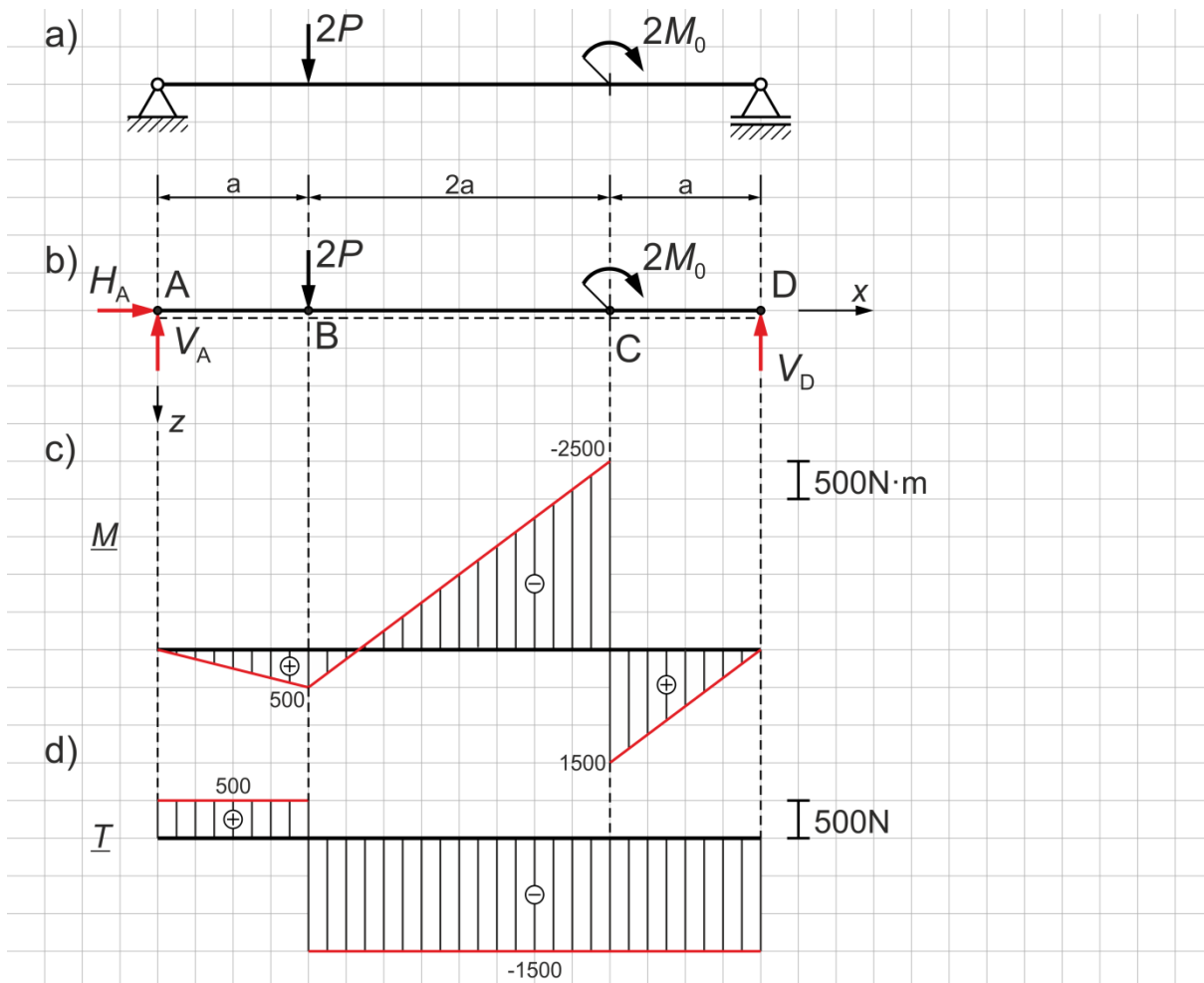
Wyznaczyć wykresy wielkości przekrojowych dla belki przedstawionej na rys. 2.11a.

Dane:

$$a = 1.0 \text{ m}$$

$$P = 1000 \text{ N}$$

$$M_0 = 2Pa = 2000 \text{ N}\cdot\text{m}$$



Rys. 2.11

ROZWIĄZANIE

Schemat statyczny pokazano na rys. 2.11a. Belka swobodnie podparta jest zginana i ścinana w płaszczyźnie pionowej. Obciążenia zewnętrzne (siły skupione pionowe i moment skupiony) wywołują moment zginający i siłę tnącą. Rysujemy schemat obliczeniowy (rys. 2.11b) i wyznaczamy reakcje z równań równowagi statycznej.

Reakcje

$$\sum P_{ix} = 0: \quad H_A = 0$$

$$\sum M_A = 0: \quad -2P \cdot a - 2M_0 + V_D \cdot 4a = 0$$

$$-2Pa - 2 \cdot 2Pa + V_D \cdot 4a = 0$$

$$-2Pa - 4Pa + V_D \cdot 4a = 0$$

$$-6Pa + V_D \cdot 4a = 0 \quad \rightarrow \quad V_D \cdot 4a = 6Pa \quad | :4a$$

$$V_D = 1.5P = 1.5 \cdot 1000 = 1500 \text{ N}$$

$$\sum P_{iz} = 0: \quad -V_A + 2P - V_D = 0$$

$$V_A = 2P - V_D = 2P - 1.5P = 0.5P = 0.5 \cdot 1000 = 500 \text{ N}$$

Równanie sprawdzające

$$\sum M_D = 0: \quad -V_A \cdot 4a + 2P \cdot 3a - 2M_0 = 0$$

$$-0.5P \cdot 4a + 6Pa - 2 \cdot 2Pa = 0$$

$$-2Pa + 6Pa - 4Pa = 0 \quad \rightarrow \quad 0 = 0$$

Wartości momentów zginających (rys. 2.11c)

od lewej:

$$M_A = 0$$

$$M_B = V_A \cdot a = 0.5P \cdot a = 0.5 \cdot 1000 \cdot 1 = 500 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$M_C^l = V_A \cdot 3a - 2P \cdot 2a = 0.5P \cdot 3a - 4Pa = 1.5Pa - 4Pa = -2.5Pa =$$

$$= -2.5 \cdot 1000 \cdot 1 = -2500 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$M_C^p = V_A \cdot 3a - 2P \cdot 2a + 2M_0 = 0.5P \cdot 3a - 4Pa + 2 \cdot 2Pa = 1.5Pa - 4Pa + 4Pa =$$

$$= 1.5Pa = 1.5 \cdot 1000 \cdot 1 = 1500 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$M_D = V_A \cdot 4a - 2P \cdot 3a + 2M_0 = 0.5P \cdot 4a - 6Pa + 2 \cdot 2Pa = 2Pa - 6Pa + 4Pa = 0$$

od prawej:

$$M_A = -2P \cdot a - 2M_0 + V_D \cdot 4a = -2Pa - 2 \cdot 2Pa + 1.5P \cdot 4a = -2Pa - 4Pa + 6Pa = 0$$

$$M_B = -2M_0 + V_D \cdot 3a = -2 \cdot 2Pa + 1.5P \cdot 3a = -4Pa + 4.5Pa = 0.5Pa =$$

$$= 0.5 \cdot 1000 \cdot 1 = 500 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$M_C^l = -2M_0 + V_D \cdot a = -2 \cdot 2Pa + 1.5P \cdot a = -4Pa + 1.5Pa = -2.5Pa =$$

$$= -2.5 \cdot 1000 \cdot 1 = -2500 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$M_C^P = V_D \cdot a = 1.5P \cdot a = 1.5 \cdot 1000 \cdot 1 = -1500 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$M_D = 0$$

Wartości sił tnących (rys. 2.11d)

od lewej:

$$T_{AB} = V_A = 0.5P = 0.5 \cdot 1000 = 500 \text{ N}$$

$$T_{BD} = V_A - 2P = 0.5P - 2P = -1.5P = -1.5 \cdot 1000 = -1500 \text{ N}$$

od prawej:

$$T_{AB} = 2P - V_D = 2P - 1.5P = 0.5P = 0.5 \cdot 1000 = 500 \text{ N}$$

$$T_{BD} = -V_D = -1.5P = -1.5 \cdot 1000 = -1500 \text{ N}$$

PRZYKŁAD 2.7

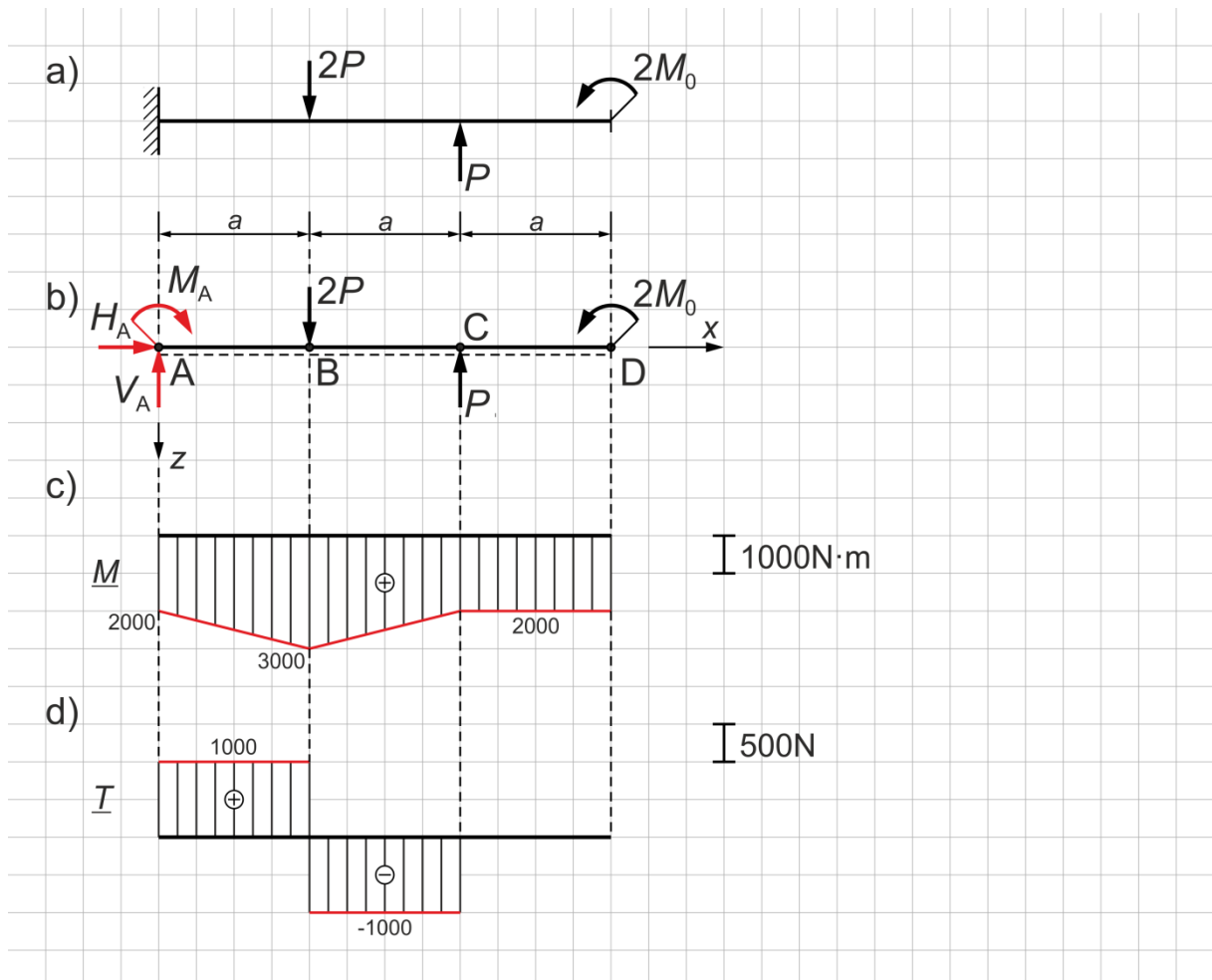
Wyznaczyć wykresy wielkości przekrojowych dla belki przedstawionej na rys. 2.12a.

Dane:

$$a = 1.0 \text{ m}$$

$$P = 1000 \text{ N}$$

$$M_0 = Pa = 1000 \text{ N}\cdot\text{m}$$



Rys. 2.12

ROZWIĄZANIE

Schemat statyczny pokazano na rys. 2.12a. Wspornik jest zginany i ścinany w płaszczyźnie pionowej. Obciążenia zewnętrzne (siły skupione pionowe i momenty skupione) wywołują moment zginający i siłę tnącą. Rysujemy schemat obliczeniowy (rys. 2.12b) i wyznaczamy reakcje z równań równowagi statycznej.

Reakcje

$$\sum P_{ix} = 0: \quad H_A = 0$$

$$\sum P_{iz} = 0: \quad -V_A + 2P - P = 0$$

$$V_A = 2P - P = P = 1000 \text{ N}$$

$$\begin{aligned}\sum M_A = 0: \quad & -M_A - 2P \cdot a + P \cdot 2a + 2M_0 = 0 \\ & M_A = -2Pa + 2Pa + 2 \cdot Pa = 2Pa = 2 \cdot 1000 \cdot 1 = 2000 \text{ N}\cdot\text{m}\end{aligned}$$

Równanie sprawdzające

$$\begin{aligned}\sum M_B = 0: \quad & -M_A - V_A \cdot a + P \cdot a + 2M_0 = 0 \\ & -2Pa - Pa + Pa + 2Pa = 0 \quad \rightarrow \quad 0 = 0\end{aligned}$$

Wartości momentów zginających (rys. 2.12c)

od lewej:

$$\begin{aligned}M_A^l &= 0 \\ M_A^p &= M_A = 2Pa = 2 \cdot 1000 \cdot 1 = 2000 \text{ N}\cdot\text{m} \\ M_B &= M_A + V_A \cdot a = 2Pa + Pa = 3Pa = 3 \cdot 1000 \cdot 1 = 3000 \text{ N}\cdot\text{m} \\ M_C &= M_A + V_A \cdot 2a - 2P \cdot a = 2Pa + P \cdot 2a - 2Pa = 2Pa = 2 \cdot 1000 \cdot 1 = 2000 \text{ N}\cdot\text{m} \\ M_D^l &= M_A + V_A \cdot 3a - 2P \cdot 2a + P \cdot a = 2Pa + P \cdot 3a - 4Pa + Pa = 2Pa = \\ &= 2 \cdot 1000 \cdot 1 = 2000 \text{ N}\cdot\text{m} \\ M_D^p &= M_A + V_A \cdot 3a - 2P \cdot 2a + P \cdot a - 2M_0 = 2Pa + P \cdot 3a - 4Pa + Pa - 2 \cdot Pa = \\ &= 2Pa + 3Pa - 4Pa + Pa - 2Pa = 0\end{aligned}$$

od prawej:

$$\begin{aligned}M_A^l &= -M_A - 2P \cdot a + P \cdot 2a + 2M_0 = -2Pa - 2Pa + 2Pa + 2Pa = 0 \\ M_A^p &= -2P \cdot a + P \cdot 2a + 2M_0 = -2Pa + 2Pa + 2Pa = 2Pa = 2 \cdot 1000 \cdot 1 = 2000 \text{ N}\cdot\text{m} \\ M_B &= P \cdot a + 2M_0 = Pa + 2Pa = 3Pa = 3 \cdot 1000 \cdot 1 = 3000 \text{ N}\cdot\text{m} \\ M_C &= 2M_0 = 2Pa = 2 \cdot 1000 \cdot 1 = 2000 \text{ N}\cdot\text{m} \\ M_D^l &= 2M_0 = 2Pa = 2 \cdot 1000 \cdot 1 = 2000 \text{ N}\cdot\text{m} \\ M_D^p &= 0\end{aligned}$$

Wartości sił tnących (rys. 2.12d)

od lewej:

$$\begin{aligned}T_{AB} &= V_A = P = 1000 \text{ N} \\ T_{BC} &= V_A - 2P = P - 2P = -P = -1000 \text{ N} \\ T_{CD} &= V_A - 2P + P = P - 2P + P = 0\end{aligned}$$

od prawej:

$$T_{AB} = 2P - P = P = 1000 \text{ N}$$

$$T_{BC} = -P = -1000 \text{ N}$$

$$T_{CD} = 0$$

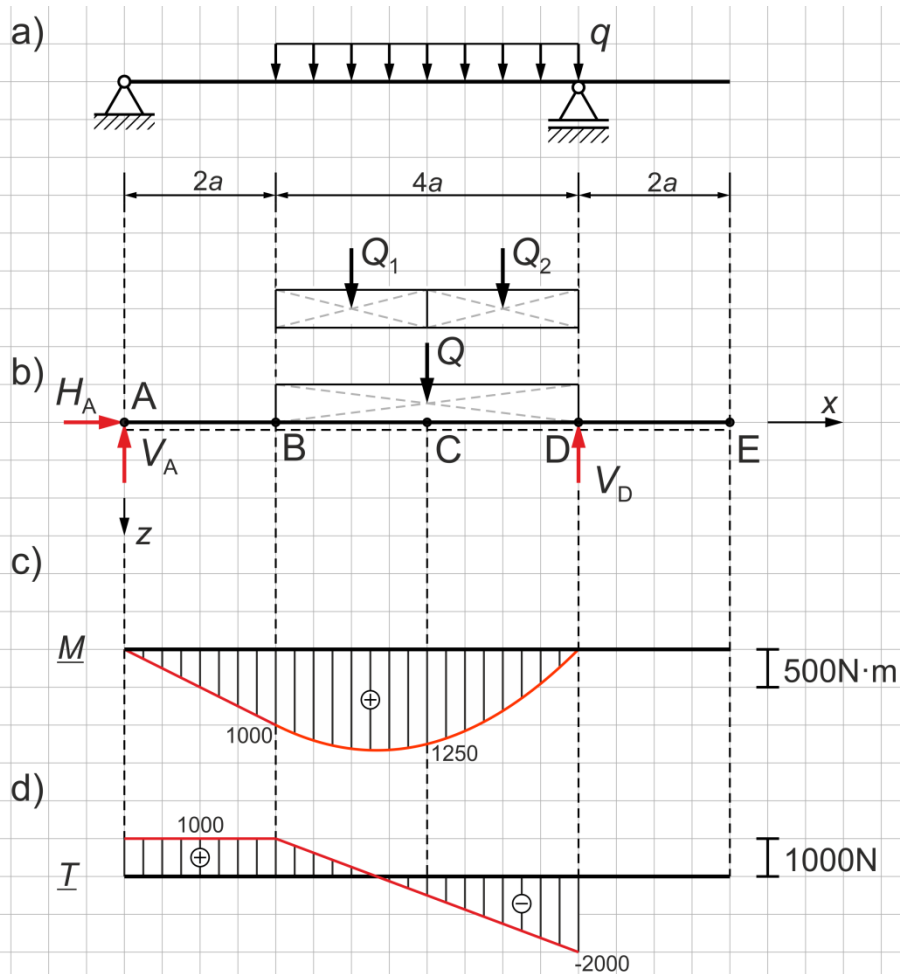
PRZYKŁAD 2.8

Wyznaczyć wykresy wielkości przekrojowych dla belki przedstawionej na rys. 2.13a.

Dane:

$$a = 0.5 \text{ m}$$

$$q = 1500 \text{ N/m}$$



Rys. 2.13

ROZWIĄZANIE

Schemat statyczny pokazano na rys. 2.13a. Belka wspornikowa jest zginana i ścinana w płaszczyźnie pionowej. Obciążenia zewnętrzne (siły skupione pionowe i obciążenie rozłożone) wywołują moment zginający i siłę tnącą. Rysujemy schemat obliczeniowy (rys. 2.13b) i wyznaczamy reakcje z równań równowagi statycznej.

Wypadkowe obciążenia rozłożonego

$$Q = q \cdot 4a = 1500 \cdot 4 \cdot 0.5 = 3000 \text{ N}$$

$$Q_1 = Q_2 = q \cdot 2a = 1500 \cdot 2 \cdot 0.5 = 1500 \text{ N}$$

Reakcje

$$\sum P_{ix} = 0: \quad H_A = 0$$

$$\sum M_A = 0: \quad -Q \cdot 4a + V_D \cdot 6a = 0$$

$$V_D \cdot 6a = Q \cdot 4a = q \cdot 4a \cdot 4a = q \cdot 16a^2 \quad | : 6a$$

$$V_D = \frac{16qa^2}{6a} = \frac{8}{3}qa = \frac{8}{3} \cdot 1500 \cdot 0.5 = 2000 \text{ N}$$

$$\sum P_{iz} = 0: \quad -V_A + Q - V_D = 0$$

$$\begin{aligned} V_A = Q - V_D &= q \cdot 4a - \frac{8}{3}qa = \frac{12}{3}qa - \frac{8}{3}qa = \frac{4}{3}qa = \\ &= \frac{4}{3} \cdot 1500 \cdot 0.5 = 1000 \text{ N} \end{aligned}$$

Równanie sprawdzające

$$\sum M_B = 0: \quad -V_A \cdot 2a - Q \cdot 2a + V_D \cdot 4a = 0$$

$$-\frac{4}{3}qa \cdot 2a - q \cdot 4a \cdot 2a + \frac{8}{3}qa \cdot 4a = 0$$

$$-\frac{8}{3}qa^2 - 8qa^2 + \frac{32}{3}qa^2 = 0$$

$$-\frac{8}{3}qa^2 - \frac{24}{3}qa^2 + \frac{32}{3}qa^2 = \rightarrow 0 = 0$$

Wartości momentów zginających (rys. 2.13c)

od lewej:

$$M_A = 0$$

$$M_B = V_A \cdot 2a = \frac{4}{3}qa \cdot 2a = \frac{8}{3}qa^2 = \frac{8}{3} \cdot 1500 \cdot 0.5^2 = 1000 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$\begin{aligned} M_C = V_A \cdot 4a - Q_1 \cdot a &= \frac{4}{3}qa \cdot 4a - q \cdot 2a \cdot a = \frac{16}{3}qa^2 - 2qa^2 = \frac{16}{3}qa^2 - \frac{6}{3}qa^2 = \\ &= \frac{10}{3}qa^2 = \frac{10}{3} \cdot 1500 \cdot 0.5^2 = 1250 \text{ N}\cdot\text{m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_D = V_A \cdot 6a - Q \cdot 2a &= \frac{4}{3}qa \cdot 6a - q \cdot 4a \cdot 2a = \frac{24}{3}qa^2 - 8qa^2 = \\ &= \frac{24}{3}qa^2 - \frac{24}{3}qa^2 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_E = V_A \cdot 8a - Q \cdot 4a + V_D \cdot 2a &= \frac{4}{3}qa \cdot 8a - q \cdot 4a \cdot 4a + \frac{8}{3}qa \cdot 2a = \\ &= \frac{32}{3}qa^2 - 16qa^2 + \frac{16}{3}qa^2 = \frac{32}{3}qa^2 - \frac{48}{3}qa^2 + \frac{16}{3}qa^2 = 0 \end{aligned}$$

od prawej:

$$M_A = -Q \cdot 4a + V_D \cdot 6a = -q \cdot 4a \cdot 4a + \frac{8}{3}qa \cdot 6a = -16qa^2 + \frac{48}{3}qa^2 =$$

$$= -\frac{48}{3}qa^2 + \frac{48}{3}qa^2 = 0$$

$$M_B = -Q \cdot 2a + V_D \cdot 4a = -q \cdot 4a \cdot 2a + \frac{8}{3}qa \cdot 4a = -8qa^2 + \frac{32}{3}qa^2 =$$

$$= -\frac{24}{3}qa^2 + \frac{32}{3}qa^2 = \frac{8}{3}qa^2 = \frac{8}{3} \cdot 1500 \cdot 0.5^2 = 1000 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$M_C = -Q_2 \cdot a + V_D \cdot 2a = -q \cdot 2a \cdot a + \frac{8}{3}qa \cdot 2a = -2qa^2 + \frac{16}{3}qa^2 =$$

$$= -\frac{6}{3}qa^2 + \frac{16}{3}qa^2 = \frac{10}{3}qa^2 = \frac{10}{3} \cdot 1500 \cdot 0.5^2 = 1250 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$M_D = 0$$

$$M_E = 0$$

Wartości sił tnących (rys. 2.13d)

od lewej:

$$T_{AB} = V_A = \frac{4}{3}qa = \frac{4}{3} \cdot 1500 \cdot 0.5 = 1000 \text{ N}$$

$$T_D^l = V_A - Q = \frac{4}{3}qa - q \cdot 4a = \frac{4}{3}qa - \frac{12}{3}qa = -\frac{8}{3}qa = -\frac{8}{3} \cdot 1500 \cdot 0.5 = -2000 \text{ N}$$

$$T_D^p = V_A - Q + V_D = \frac{4}{3}qa - q \cdot 4a + \frac{8}{3}qa = \frac{4}{3}qa - \frac{12}{3}qa + \frac{8}{3}qa = 0$$

$$T_{DE} = V_A - Q + V_D = \frac{4}{3}qa - q \cdot 4a + \frac{8}{3}qa = \frac{4}{3}qa - \frac{12}{3}qa + \frac{8}{3}qa = 0$$

od prawej:

$$T_{AB} = Q - V_D = q \cdot 4a - \frac{8}{3}qa = \frac{12}{3}qa - \frac{8}{3}qa = \frac{4}{3}qa = \frac{4}{3} \cdot 1500 \cdot 0.5 = 1000 \text{ N}$$

$$T_D^l = -V_D = -\frac{8}{3}qa = -\frac{8}{3} \cdot 1500 \cdot 0.5 = -2000 \text{ N}$$

$$T_D^p = 0$$

$$T_{DE} = 0$$

PRZYKŁAD 2.9

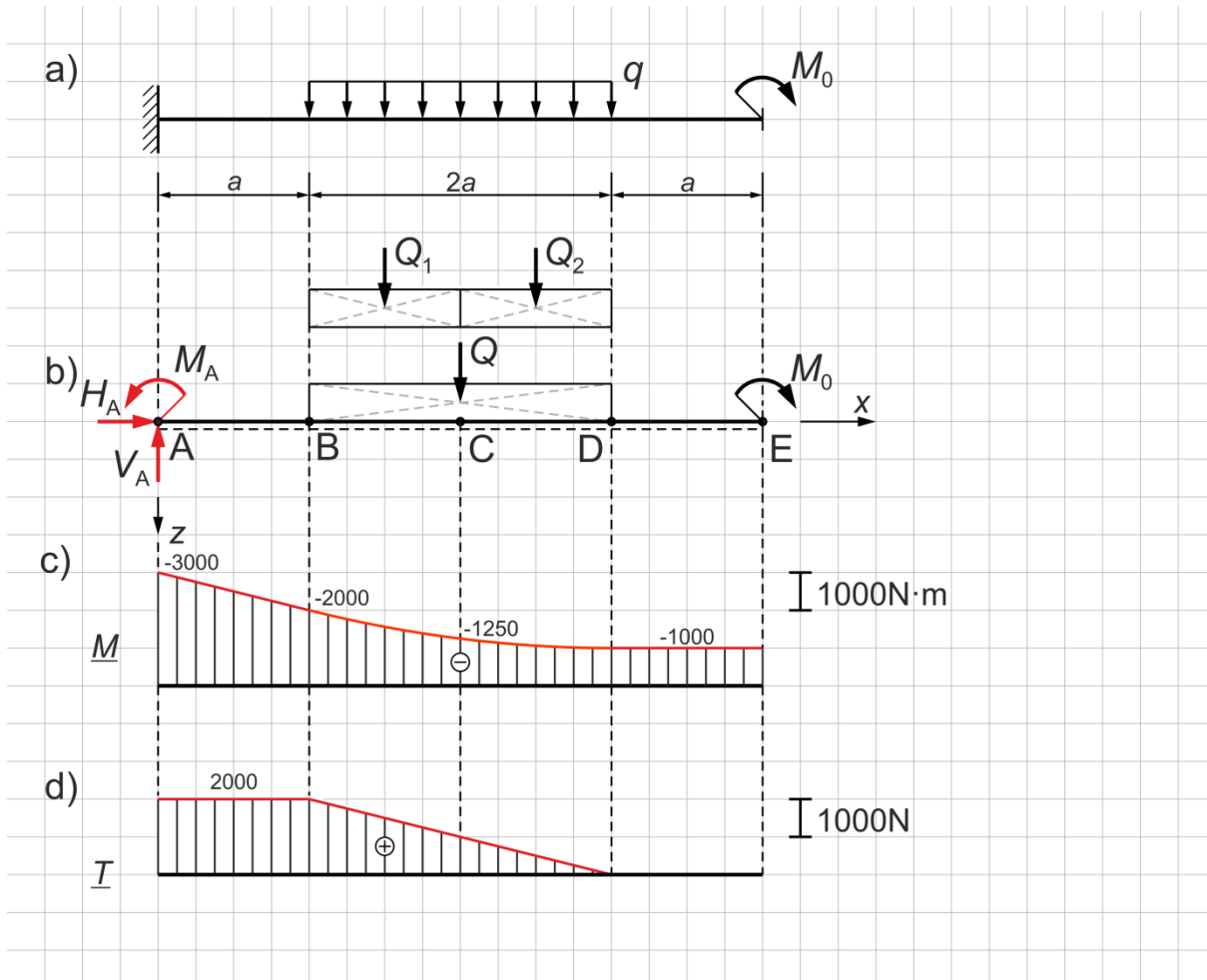
Wyznaczyć wykresy wielkości przekrojowych dla belki przedstawionej na rys. 2.14a.

Dane:

$$a = 0.5 \text{ m}$$

$$q = 2000 \text{ N/m}$$

$$M_0 = 2qa^2 = 1000 \text{ N}\cdot\text{m}$$



Rys. 2.14

ROZWIĄZANIE

Schemat statyczny pokazano na rys. 2.14a. Wspornik jest zginany i ścinany w płaszczyźnie pionowej. Obciążenia zewnętrzne (siła skupiona pionowa, obciążenie rozłożone, momenty skupione) wywołują moment zginający i siłę tnącą. Rysujemy schemat obliczeniowy (rys. 2.14b) i wyznaczamy reakcje z równań równowagi statycznej.

Wypadkowe obciążenia rozłożonego

$$Q = q \cdot 2a = 2000 \cdot 2 \cdot 0.5 = 2000 \text{ N}$$

$$Q_1 = Q_2 = q \cdot a = 2000 \cdot 0.5 = 1000 \text{ N}$$

Reakcje

$$\sum P_{ix} = 0: \quad H_A = 0$$

$$\sum P_{iz} = 0: \quad -V_A + Q = 0$$

$$V_A = Q = q \cdot 2a = 2000 \cdot 2 \cdot 0.5 = 2000 \text{ N}$$

$$\sum M_A = 0: \quad M_A - Q \cdot 2a - M_0 = 0$$

$$\begin{aligned} M_A &= Q \cdot 2a + M_0 = q \cdot 2a \cdot 2a + 2qa^2 = 4qa^2 + 2qa^2 = 6qa^2 = \\ &= 6 \cdot 2000 \cdot 0.5^2 = 3000 \text{ N}\cdot\text{m} \end{aligned}$$

Równanie sprawdzające

$$\sum M_B = 0: \quad M_A - V_A \cdot a - Q \cdot a - M_0 = 0$$

$$6qa^2 - 2qa \cdot a - q \cdot 2a \cdot a - 2qa^2 = 0$$

$$6qa^2 - 2qa^2 - 2qa^2 - 2qa^2 = 0 \quad \rightarrow \quad 0 = 0$$

Wartości momentów zginających (rys. 2.14c)

od lewej:

$$M_A^1 = 0$$

$$M_A^p = -M_A = -6qa^2 = -6 \cdot 2000 \cdot 0.5^2 = -3000 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$\begin{aligned} M_B &= -M_A + V_A \cdot a = -6qa^2 + 2qa \cdot a = -6qa^2 + 2qa^2 = -4qa^2 = \\ &= -4 \cdot 2000 \cdot 0.5^2 = -2000 \text{ N}\cdot\text{m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_C &= -M_A + V_A \cdot 2a - Q_1 \cdot 0.5a = -6qa^2 + 2qa \cdot 2a - qa \cdot 0.5a = \\ &= -6qa^2 + 4qa^2 - 0.5qa^2 = -2.5qa^2 = -2.5 \cdot 2000 \cdot 0.5^2 = -1250 \text{ N}\cdot\text{m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_D &= -M_A + V_A \cdot 3a - Q \cdot a = -6qa^2 + 2qa \cdot 3a - 2qa \cdot a = -6qa^2 + 6qa^2 - 2qa^2 = \\ &= -2qa^2 = -2 \cdot 2000 \cdot 0.5^2 = -1000 \text{ N}\cdot\text{m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_E^1 &= -M_A + V_A \cdot 4a - Q \cdot 2a = -6qa^2 + 2qa \cdot 4a - 2qa \cdot 2a = \\ &= -6qa^2 + 8qa^2 - 4qa^2 = -2qa^2 = -2 \cdot 2000 \cdot 0.5^2 = -1000 \text{ N}\cdot\text{m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_E^p &= -M_A + V_A \cdot 4a - Q \cdot 2a + M_0 = -6qa^2 + 2qa \cdot 4a - 2qa \cdot 2a + 2qa^2 = \\ &= -6qa^2 + 8qa^2 - 4qa^2 + 2qa^2 = 0 \end{aligned}$$

od prawej:

$$M_A^1 = M_A - Q \cdot 2a - M_0 = 6qa^2 - 2qa \cdot 2a - 2qa^2 = 6qa^2 - 4qa^2 - 2qa^2 = 0$$

$$\begin{aligned} M_A^p &= -Q \cdot 2a - M_0 = -2qa \cdot 2a - 2qa^2 = -4qa^2 - 2qa^2 = -6qa^2 = \\ &= -6 \cdot 2000 \cdot 0.5^2 = -3000 \text{ N}\cdot\text{m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_B &= -Q \cdot a - M_0 = -2qa \cdot a - 2qa^2 = -2qa^2 - 2qa^2 = -4qa^2 = \\ &= -4 \cdot 2000 \cdot 0.5^2 = -2000 \text{ N}\cdot\text{m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}M_C &= -Q_1 \cdot 0.5a - M_0 = -qa \cdot 0.5a - 2qa^2 = -0.5qa^2 - 2qa^2 = -2.5qa^2 = \\ &= -2.5 \cdot 2000 \cdot 0.5^2 = -1250 \text{ N}\cdot\text{m}\end{aligned}$$

$$M_D = -M_0 = -2qa^2 = -2 \cdot 2000 \cdot 0.5^2 = -1000 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$M_E^l = -M_0 = -2qa^2 = -2 \cdot 2000 \cdot 0.5^2 = -1000 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$M_E^p = 0$$

Wartości sił tnących (rys. 2.14d)

od lewej:

$$T_{AB} = V_A = 2qa = 2 \cdot 2000 \cdot 0.5 = 2000 \text{ N}$$

$$T_{DE} = V_A - Q = 2qa - 2qa = 0$$

od prawej:

$$T_{AB} = Q = 2qa = 2 \cdot 2000 \cdot 0.5 = 2000 \text{ N}$$

$$T_{DE} = 0$$

PRZYKŁAD 2.10

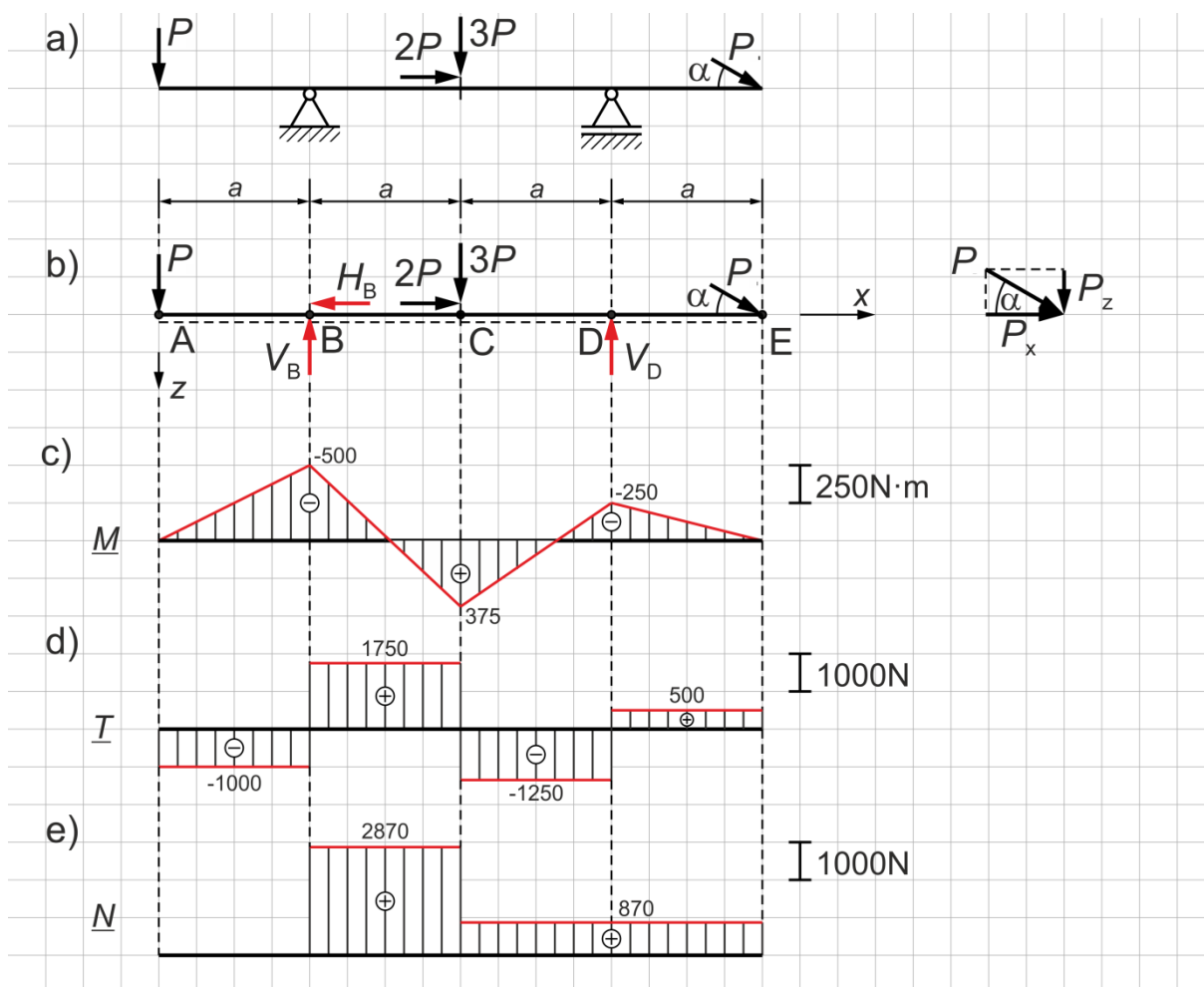
Wyznaczyć wykresy wielkości przekrojowych dla belki przedstawionej na rys. 2.15a.

Dane:

$$a = 0.5 \text{ m}$$

$$P = 1000 \text{ N}$$

$$\alpha = 30^\circ$$



Rys. 2.15

ROZWIĄZANIE

Schemat statyczny pokazano na rys. 2.15a. Belka wspornikowa jest zginana, ścinana i rozciągana lub ściskana. Obciążenia zewnętrzne (siły skupione) wywołują moment zginający, siłę tnącą i siłę osiową. Rysujemy schemat obliczeniowy (rys. 2.15b) i wyznaczamy reakcje z równań równowagi statycznej.

Siłę działającą pod kątem α do osi belki należy rozłożyć na dwie składowe względem osi x i z :

$$P_x = P \cdot \cos \alpha = P \cdot \cos 30^\circ = P \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = P \cdot 0.87 = 1000 \cdot 0.87 = 870 \text{ N}$$

$$P_z = P \cdot \sin \alpha = P \cdot \sin 30^\circ = P \cdot 0.5 = 1000 \cdot 0.5 = 500 \text{ N}$$

Reakcje

$$\begin{aligned}\sum P_{ix} = 0: & -H_B + 2P + P_x = 0 \\ & -H_B + 2P + P \cdot \cos \alpha = 0 \\ & -H_B + 2P + 0.87P = 0 \text{ N} \\ & H_B = 2P + 0.87P = 2.87P = 2.87 \cdot 1000 = 2870 \text{ N}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum M_B = 0: & P \cdot a - 3P \cdot a + V_D \cdot 2a - P_z \cdot 3a = 0 \\ & P \cdot a - 3P \cdot a + V_D \cdot 2a - P \sin \alpha \cdot 3a = 0 \\ & Pa - 3Pa + V_D \cdot 2a - 0.5P \cdot 3a = 0 \\ & V_D \cdot 2a = -Pa + 3Pa + 0.5P \cdot 3a = -Pa + 3Pa + 1.5Pa \\ & V_D \cdot 2a = 3.5Pa \quad | : 2a \\ & V_D = 1.75P = 1.75 \cdot 1000 = 1750 \text{ N}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum P_{iz} = 0: & P - V_B + 3P - V_D + P_z = 0 \\ & V_B = P + 3P - V_D + P_z \\ & V_B = P + 3P - 1.75P + P \sin \alpha \\ & V_B = P + 3P - 1.75P + 0.5P = 2.75P = 2750 \text{ N}\end{aligned}$$

Równanie sprawdzające

$$\begin{aligned}\sum M_A = 0: & V_B \cdot a - 3P \cdot 2a + V_D \cdot 3a - P_z \cdot 4a = 0 \\ & 2.75Pa - 6Pa + 1.75P \cdot 3a - P \sin \alpha \cdot 4a = 0 \\ & 2.75Pa - 6Pa + 5.25Pa - 0.5P \cdot 4a = 0 \\ & 2.75Pa - 6Pa + 5.25Pa - 2Pa = 0 \quad \rightarrow \quad 0 = 0\end{aligned}$$

Wartości momentów zginających (rys. 2.15c)

od lewej:

$$M_A = 0$$

$$M_B = -P \cdot a = -1000 \cdot 0.5 = -500 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$M_C = -P \cdot 2a + V_B \cdot a = -2Pa + 2.75Pa = 0.75Pa = 750 \cdot 0.5 = 375 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$\begin{aligned}M_D &= -P \cdot 3a + V_B \cdot 2a - 3P \cdot a = -3Pa + 2.75P \cdot 2a - 3Pa = -3Pa + 5.5Pa - 3Pa = \\ &= -0.5Pa = -0.5 \cdot 1000 \cdot 0.5 = -250 \text{ N}\cdot\text{m}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}M_E &= -P \cdot 4a + V_B \cdot 3a - 3P \cdot 2a + V_D \cdot a = -4Pa + 2.75P \cdot 3a - 6Pa + 1.75P \cdot a = \\ &= -4Pa + 8.25Pa - 6Pa + 1.75Pa = 0\end{aligned}$$

od prawej:

$$\begin{aligned}M_A &= V_B \cdot a - 3P \cdot 2a + V_D \cdot 3a - P_z \cdot 4a = 2.75P \cdot a - 6Pa + 1.75P \cdot 3a - 0.5P \cdot 4a = \\ &= 2.75Pa - 6Pa + 5.25Pa - 2Pa = 0\end{aligned}$$

$$M_B = -3P \cdot a + V_D \cdot 2a - P_z \cdot 3a = -3Pa + 1.75P \cdot 2a - 0.5P \cdot 3a = \\ = -3Pa + 3.5Pa - 1.5Pa = -Pa = -1000 \cdot 0.5 = -500 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$M_C = V_D \cdot a - P_z \cdot 2a = 1.75P \cdot a - 0.5P \cdot 2a = 1.75Pa - Pa = 0.75Pa = \\ = 0.75 \cdot 1000 \cdot 0.5 = 375 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$M_D = -P_z \cdot a = -0.5P \cdot a = -0.5 \cdot 1000 \cdot 0.5 = -250 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$M_E = 0$$

Wartości sił tnących (rys. 2.15d)

od lewej:

$$T_{AB} = -P = -1000 \text{ N}$$

$$T_{BC} = -P + V_B = -P + 2.75P = 1.75P = 1.75 \cdot 1000 = 1750 \text{ N}$$

$$T_{CD} = -P + V_B - 3P = -P + 2.75P - 3P = -1.25P = -1.25 \cdot 1000 = -1250 \text{ N}$$

$$T_{DE} = -P + V_B - 3P + V_D = -P + 2.75P - 3P + 1.75P = 0.5P = 0.5 \cdot 1000 = 500 \text{ N}$$

od prawej:

$$T_{AB} = -V_B + 3P - V_D + P_z = -2.75P + 3P - 1.75P + 0.5P = -P = -1000 \text{ N}$$

$$T_{BC} = 3P - V_D + P_z = 3P - 1.75P + 0.5P = 1.75P = 1.75 \cdot 1000 = 1750 \text{ N}$$

$$T_{CD} = -V_D + P_z = -1.75P + 0.5P = -1.25P = -1.25 \cdot 1000 = -1250 \text{ N}$$

$$T_{DE} = P_z = 0.5P = 0.5 \cdot 1000 = 500 \text{ N}$$

Wartości sił osiowych (rys. 2.15e)

od lewej:

$$N_{AB} = 0$$

$$N_{BC} = H_B = 2.87P = 2.87 \cdot 1000 = 2870 \text{ N}$$

$$N_{CE} = H_B - 2P = 2.87P - 2P = 0.87P = 0.87 \cdot 1000 = 870 \text{ N}$$

od prawej:

$$N_{AB} = -H_B + 2P + P_x = -2.87P + 2P + 0.87P = 0 \text{ N}$$

$$N_{BC} = 2P + P_x = 2P + 0.87P = 2.87P = 2.87 \cdot 1000 = 2870 \text{ N}$$

$$N_{CE} = P_x = 0.87P = 0.87 \cdot 1000 = 870 \text{ N}$$

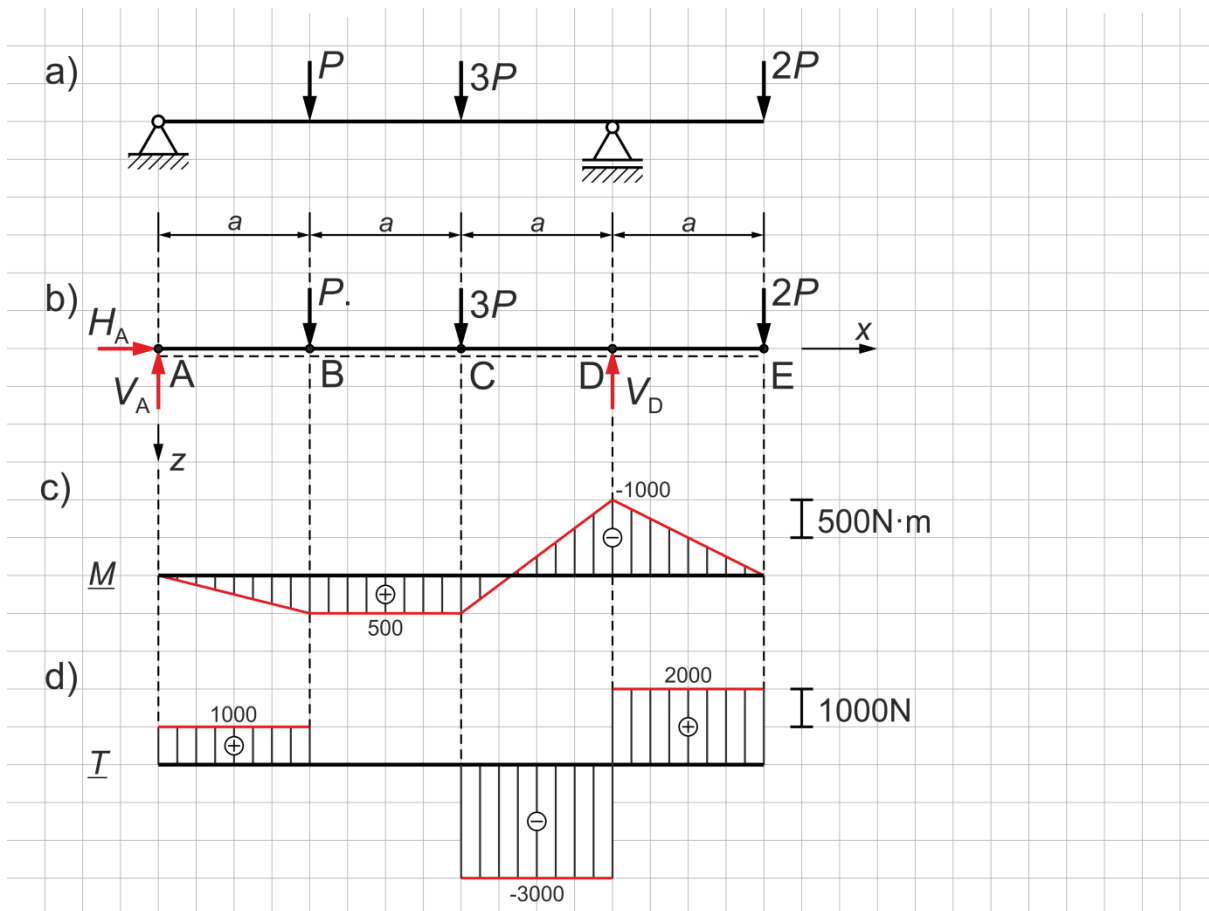
PRZYKŁAD 2.11

Wyznaczyć wykresy wielkości przekrojowych dla belki przedstawionej na rys. 2.16a.

Dane:

$$a = 0.5 \text{ m}$$

$$P = 1000 \text{ N}$$



Rys. 2.16

ROZWIĄZANIE

Schemat statyczny pokazano na rys. 2.16a. Belka wspornikowa jest zginana i ścinana w płaszczyźnie pionowej. Obciążenia zewnętrzne (siły skupione pionowe) wywołują moment zginający i siłę tnącą. Rysujemy schemat obliczeniowy (rys. 2.16b) i wyznaczamy reakcje z równań równowagi statycznej.

Reakcje podporowe

$$\sum P_{ix} = 0: \quad H_A = 0$$

$$\sum M_A = 0: \quad -P \cdot a - 3P \cdot 2a + V_D \cdot 3a - 2P \cdot 4a = 0$$

$$V_D \cdot 3a = Pa + 6Pa + 8Pa$$

$$V_D \cdot 3a = 15Pa$$

$$V_D = 5P = 5 \cdot 1000 = 5000 \text{ N}$$

$$\sum P_{iz} = 0: \quad -V_A + P + 3P - V_D + 2P = 0$$

$$V_A = P + 3P - V_D + 2P$$

$$V_A = P + 3P - 5P + 2P = P = 1000 \text{ N}$$

Równanie sprawdzające

$$\sum M_B = 0: \quad -V_A \cdot a - 3P \cdot a + V_D \cdot 2a - 2P \cdot 3a = 0$$

$$-P \cdot a - 3Pa + 5P \cdot 2a - 6Pa = 0$$

$$-Pa - 3Pa + 10Pa - 6Pa \rightarrow 0 = 0$$

Wartości momentów zginających (rys. 2.16c)

od lewej:

$$M_A = 0$$

$$M_B = V_A \cdot a = P \cdot a = 1000 \cdot 0.5 = 500 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$M_C = V_A \cdot 2a - Pa = P \cdot 2a - Pa = Pa = 1000 \cdot 0.5 = 500 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$M_D = V_A \cdot 3a - P \cdot 2a - 3P \cdot a = P \cdot 3a - 2Pa - 3Pa = -2Pa = \\ = -2 \cdot 1000 \cdot 0.5 = -1000 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$M_E = V_A \cdot 4a - P \cdot 3a - 3P \cdot 2a + V_D \cdot a = P \cdot 4a - 3Pa - 6Pa + 5P \cdot a = 0$$

od prawej:

$$M_A = -Pa - 3P \cdot 2a + V_D \cdot 3a - 2P \cdot 4a = -Pa - 6Pa + 5P \cdot 3a - 8Pa = \\ = -Pa - 6Pa + 15Pa - 8Pa = 0$$

$$M_B = -3P \cdot a + V_D \cdot 2a - 2P \cdot 3a = -3Pa + 5P \cdot 2a - 6Pa = \\ = -3Pa + 10Pa - 6Pa = Pa = 1000 \cdot 0.5 = 500 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$M_C = V_D \cdot a - 2P \cdot 2a = 5P \cdot a - 4Pa = Pa = 1000 \cdot 0.5 = 500 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$M_D = -2P \cdot a = -2 \cdot 1000 \cdot 0.5 = -1000 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$M_E = 0$$

Wartości sił tnących (rys. 2.16d)

od lewej:

$$T_{AB} = V_A = P = 1000 \text{ N}$$

$$T_{BC} = V_A - P = P - P = 0$$

$$T_{CD} = V_A - P - 3P = P - P - 3P = -3P = -3 \cdot 1000 = -3000 \text{ N}$$

$$T_{DE} = V_A - P - 3P + V_D = P - P - 3P + 5P = 2P = 2 \cdot 1000 = 2000 \text{ N}$$

od prawej:

$$T_{AB} = P + 3P - V_D + 2P = P + 3P - 5P + 2P = P = 1000 \text{ N}$$

$$T_{BC} = 3P - V_D + 2P = 3P - 5P + 2P = 0$$

$$T_{CD} = -V_D + 2P = -5P + 2P = -3 \cdot 1000 = -3000 \text{ N}$$

$$T_{DE} = 2P = 2 \cdot 1000 = 2000 \text{ N}$$

PRZYKŁAD 2.12

Wyznaczyć wykresy wielkości przekrojowych dla belki przedstawionej rys. 2.17a.

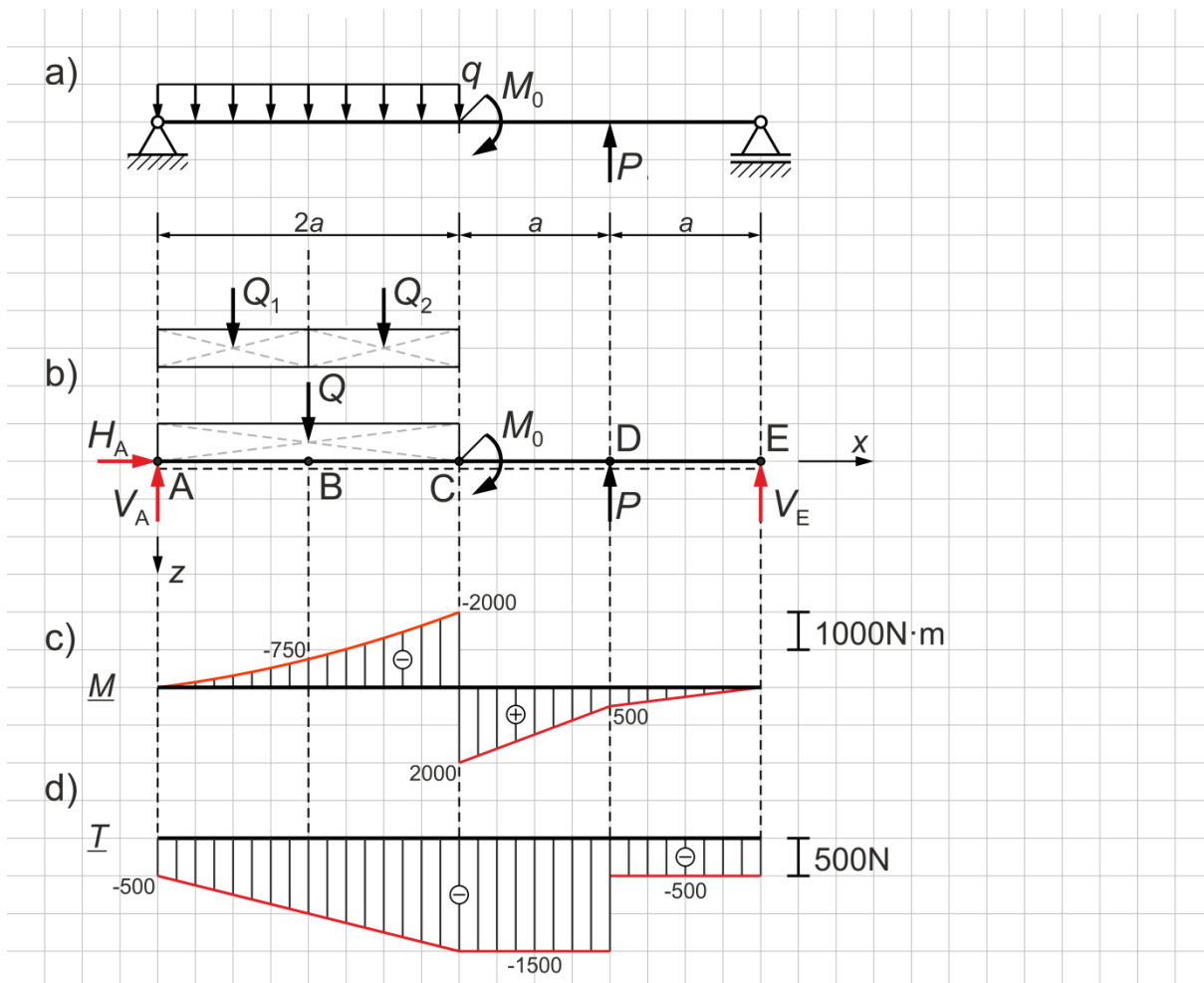
Dane:

$$a = 1 \text{ m}$$

$$P = 1000 \text{ N}$$

$$q = 0.5 \frac{P}{a} = 500 \text{ N/m}$$

$$M_0 = 4Pa = 4000 \text{ N}\cdot\text{m}$$



Rys. 2.17

ROZWIĄZANIE

Schemat statyczny pokazano na rys. 2.17a. Belka swobodnie podparta jest zginana i ścinana w płaszczyźnie pionowej. Obciążenia zewnętrzne (siły skupione pionowe, obciążenie rozłożone, moment skupiony) wywołują moment zginający i siłę tnącą. Rysujemy schemat obliczeniowy (rys. 2.17b) i wyznaczamy reakcje z równań równowagi statycznej.

Wypadkowe obciążenia rozłożonego

$$Q = q \cdot 2a = 500 \cdot 2 \cdot 1 = 1000 \text{ N}$$

$$Q_1 = Q_2 = q \cdot a = 500 \cdot 1 = 500 \text{ N}$$

Reakcje

$$\sum P_{ix} = 0: \quad H_A = 0$$

$$\sum M_A = 0: \quad -Q \cdot a - M_0 + P \cdot 3a + V_E \cdot 4a = 0$$

$$V_E \cdot 4a = Q \cdot a + M_0 - P \cdot 3a$$

$$V_E \cdot 4a = q \cdot 2a \cdot a + 4Pa - 3Pa = 0.5 \frac{P}{a} \cdot 2a \cdot a + 4Pa - 3Pa = \\ = Pa + 4Pa - 3Pa = 2Pa$$

$$V_E = 0.5P = 0.5 \cdot 1000 = 500 \text{ N}$$

$$\sum P_{iz} = 0: \quad -V_A + Q - P - V_E = 0$$

$$V_A = Q - P - V_E = q \cdot 2a - P - 0.5P = 0.5 \frac{P}{a} \cdot 2a - P - 0.5P = -0.5P$$

$$V_A = -0.5P = -0.5 \cdot 1000 = -500 \text{ N}$$

Równanie sprawdzające

$$\sum M_E = 0: \quad -V_A \cdot 4a + Q \cdot 3a - M_0 - P \cdot a = 0$$

$$0.5P \cdot 4a + q \cdot 2a \cdot 3a - 4Pa - Pa = 0$$

$$2Pa + 0.5 \frac{P}{a} \cdot 2a \cdot 3a - 4Pa - Pa = 0$$

$$2Pa + 3Pa - 4Pa - Pa = 0 \quad \rightarrow \quad 0 = 0$$

Wartości momentów zginających (rys. 2.17c)

od lewej:

$$M_A = 0$$

$$M_B = V_A \cdot a - Q_1 \cdot 0.5a = -0.5P \cdot a - q \cdot a \cdot 0.5a = -0.5Pa - 0.5 \frac{P}{a} \cdot a \cdot 0.5a = \\ = -0.5Pa - 0.25Pa = -0.75Pa = -0.75 \cdot 1000 \cdot 1 = -750 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$M_C^I = V_A \cdot 2a - Q \cdot a = -0.5P \cdot 2a - q \cdot 2a \cdot a = -Pa - 0.5 \cdot \frac{P}{a} \cdot 2a \cdot a = -Pa - Pa = \\ = -2Pa = -2 \cdot 1000 \cdot 1 = -2000 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$M_C^P = V_A \cdot 2a - Q \cdot a + M_0 = -0.5P \cdot 2a - q \cdot 2a \cdot a + 4Pa = \\ = -Pa - 0.5 \cdot \frac{P}{a} \cdot 2a \cdot a + 4Pa = -Pa - Pa + 4Pa = 2Pa = 2 \cdot 1000 \cdot 1 = 2000 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$M_D = V_A \cdot 3a - Q \cdot 2a + M_0 = -0.5P \cdot 3a - q \cdot 2a \cdot 2a + 4Pa = \\ = -1.5Pa - 0.5 \cdot \frac{P}{a} \cdot 2a \cdot 2a + 4Pa = -1.5Pa - 2Pa + 4Pa = 0.5Pa = \\ = 0.5 \cdot 1000 \cdot 1 = 500 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$\begin{aligned}
 M_E &= V_A \cdot 4a - Q \cdot 3a + M_0 + P \cdot a = -0.5P \cdot 4a - q \cdot 2a \cdot 3a + 4Pa + Pa = \\
 &= -2Pa - 0.5 \cdot \frac{P}{a} \cdot 2a \cdot 3a + 4Pa + Pa = -2Pa - 3Pa + 4Pa + Pa = 0 \text{ N}\cdot\text{m}
 \end{aligned}$$

od prawej:

$$\begin{aligned}
 M_A &= -Q \cdot a - M_0 + P \cdot 3a + V_E \cdot 4a = -q \cdot 2a \cdot a - 4Pa + 3Pa + 0.5P \cdot 4a = \\
 &= -0.5 \cdot \frac{P}{a} \cdot 2a \cdot a - 4Pa + 3Pa + 2Pa = -Pa - 4Pa + 3Pa + 2Pa = 0 \text{ N}\cdot\text{m}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_B &= -Q_2 \cdot 0.5a - M_0 + P \cdot 2a + V_E \cdot 3a = -q \cdot a \cdot 0.5a - 4Pa + 2Pa + 0.5P \cdot 3a = \\
 &= -0.5 \cdot \frac{P}{a} \cdot a \cdot 0.5a - 4Pa + 2Pa + 1.5P = -0.25Pa - 4Pa + 2Pa + 1.5Pa = \\
 &= -0.75Pa = -0.75 \cdot 1000 \cdot 1 = -750 \text{ N}\cdot\text{m}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_C^l &= -M_0 + P \cdot a + V_E \cdot 2a = -4Pa + Pa + 0.5P \cdot 2a = -4Pa + Pa + Pa = \\
 &= -2Pa = -2 \cdot 1000 \cdot 1 = -2000 \text{ N}\cdot\text{m}
 \end{aligned}$$

$$M_C^p = P \cdot a + V_E \cdot 2a = Pa + 0.5P \cdot 2a = Pa + Pa = 2Pa = 2 \cdot 1000 \cdot 1 = 2000 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$M_D = V_E \cdot a = 0.5P \cdot a = 0.5 \cdot 1000 \cdot 1 = 500 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$M_E = 0$$

Wartości sił tnących (rys. 2.17d)

od lewej:

$$T_A = V_A = -0.5P = -0.5 \cdot 1000 = -500 \text{ N}$$

$$\begin{aligned}
 T_{CD} &= V_A - Q = -0.5P - q \cdot 2a = -0.5P - 0.5 \cdot \frac{P}{a} \cdot 2a = -0.5P - P = -1.5P = \\
 &= -1.5 \cdot 1000 = -1500 \text{ N}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T_{DE} &= V_A - Q + P = -0.5P - q \cdot 2a + P = -0.5P - 0.5 \cdot \frac{P}{a} \cdot 2a + P = \\
 &= -0.5P - P + P = -0.5P = -0.5 \cdot 1000 = -500 \text{ N}
 \end{aligned}$$

od prawej:

$$\begin{aligned}
 T_A &= Q - P - V_E = q \cdot 2a - P - 0.5P = 0.5 \cdot \frac{P}{a} \cdot 2a - P - 0.5P = P - P - 0.5P = \\
 &= -0.5P = -0.5 \cdot 1000 = -500 \text{ N}
 \end{aligned}$$

$$T_{CD} = -P - V_E = -P - 0.5P = -1.5P = -1.5 \cdot 1000 = -1500 \text{ N}$$

$$T_{DE} = -V_E = -0.5P = -0.5 \cdot 1000 = -500 \text{ N}$$

3.

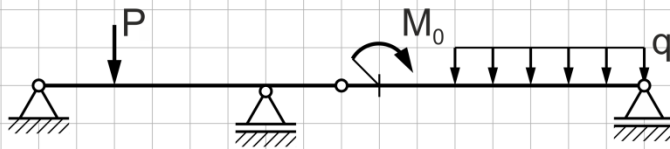
WIELKOŚCI PRZEKROJOWE W BELKACH PRZEGUBOWYCH

Belki przegubowe są układami belek połączonych przegubowo ze sobą i podpartych tak, że cały układ jest geometrycznie niezmienny i statycznie wyznaczalny (przykład na rys. 3.1).

Reakcje w belkach przegubowych (najczęściej wieloprzęsłowych) można wyznaczyć dwoma sposobami:

- 1) sformułowanie trzech równań równowagi statycznej (2.1) dla belki przegubowej oraz dodatkowych równań postulujących zerowanie momentów zginających w przegubach,
- 2) podział belki przegubowej na belki proste, uwzględnienie reakcji w przegubach, sformułowanie równań równowagi statycznej (2.1) dla każdej z belek.

Wielkości przekrojowe w belkach przegubowych obliczane są analogicznie, jak w przypadku belek prostych (rozdział 2).



Rys. 3.1

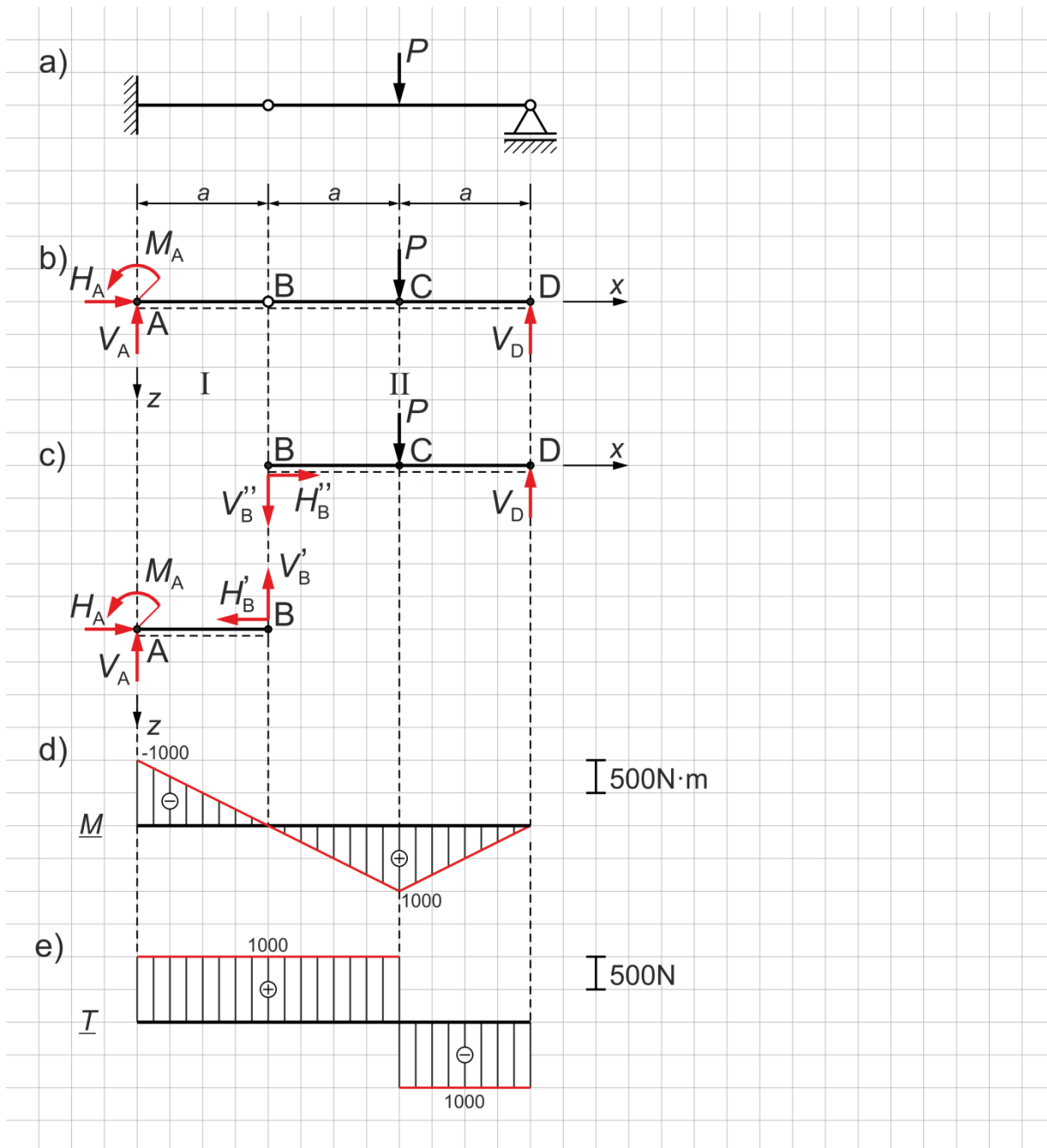
PRZYKŁAD 3.1

Wyznaczyć wykresy wielkości przekrojowych dla belki przegubowej przedstawionej na rys. 3.2a.

Dane:

$$a = 1.0 \text{ m}$$

$$P = 2000 \text{ N}$$



Rys. 3.2

ROZWIĄZANIE

Belka przegubowa poddana jest działaniu siły pionowej. Wielkościami przekrojowymi są moment zginający i siła tnąca.

Przed przystąpieniem do wyznaczania wielkości przekrojowych, należy wyznaczyć reakcje (rys. 3.2b i 3.2c).

Reakcje

sposób I (rys. 3.2b):

- 1) $\sum P_{ix} = 0: \quad H_A = 0$
- 2) $\sum P_{iz} = 0: \quad -V_A + P - V_D = 0$
- 3) $\sum M_A = 0: \quad M_A - P \cdot 2a + V_D \cdot 3a = 0$
- 4) $\sum M_B^p = 0: \quad -P \cdot a + V_D \cdot 2a = 0$

z równania 4)

$$V_D \cdot 2a = Pa \quad /: 2a \quad \rightarrow \quad V_D = 0.5P = 0.5 \cdot 2000 = 1000 \text{ N}$$

z równania 2)

$$-V_A + P - 0.5P = 0 \quad \rightarrow \quad V_A = P - 0.5P = 0.5P = 0.5 \cdot 2000 = 1000 \text{ N}$$

z równania 3)

$$M_A - 2Pa + 0.5P \cdot 3a = 0$$

$$M_A = 2Pa - 1.5Pa = 0.5Pa = 0.5 \cdot 2000 \cdot 1.0 = 1000 \text{ N}\cdot\text{m}$$

Równanie sprawdzające

$$\begin{aligned} \sum M_D = 0: \quad M_A - V_A \cdot 3a + P \cdot a &= 0 \\ 0.5Pa - 0.5P \cdot 3a + Pa &= 0 \\ 0.5Pa - 1.5Pa + Pa &= 0 \quad \rightarrow \quad 0 = 0 \end{aligned}$$

sposób II (rys. 3.2c):

- 1) $H'_B = H''_B$
- 2) $V'_B = V''_B$

belka I

- 3) $\sum P_{ix} = 0: \quad H_A - H'_B = 0 \quad \rightarrow \quad H_A = H'_B$
- 4) $\sum P_{iz} = 0: \quad -V_A - V'_B = 0 \quad \rightarrow \quad V_A = -V'_B$
- 5) $\sum M_A = 0: \quad M_A + V'_B \cdot a = 0 \quad \rightarrow \quad M_A = -V'_B \cdot a$

belka II

- 6) $\sum P_{ix} = 0: \quad H''_B = 0$
- 7) $\sum P_{iz} = 0: \quad V''_B + P - V_D = 0$
- 8) $\sum M_D = 0: \quad V''_B \cdot 2a + P \cdot a = 0 \quad \rightarrow \quad V''_B \cdot 2a = -Pa \quad |: 2a$

$$V''_B = -0.5P = -0.5 \cdot 2000 = -1000 \text{ N}$$

z równania 7)

$$V_D = V_B'' + P = -0.5P + P = 0.5P = 0.5 \cdot 2000 = 1000 \text{ N}$$

z równań 1), 3) i 6)

$$H_B' = 0$$

$$H_A = 0$$

z równań 2) i 4)

$$V_B' = -0.5P = -1000 \text{ N}$$

$$V_A = -V_B' = 0.5P = 0.5 \cdot 2000 = 1000 \text{ N}$$

z równania 5/

$$M_A = -V_B' \cdot a = 0.5P \cdot a = 0.5 \cdot 2000 \cdot 1.0 = 1000 \text{ N}\cdot\text{m}$$

Wartości momentów zginających (rys. 3.2d)

od lewej:

$$M_A^l = 0$$

$$M_A^p = -M_A = -0.5Pa = -0.5 \cdot 2000 \cdot 1.0 = -1000 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$M_B = -M_A + V_A \cdot a = -0.5Pa + 0.5P \cdot a = 0$$

$$M_C = -M_A + V_A \cdot 2a = -0.5Pa + 0.5P \cdot 2a = -0.5Pa + Pa = 0.5Pa = 0.5 \cdot 2000 \cdot 1.0 = 1000 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$M_D = -M_A + V_A \cdot 3a - P \cdot a = -0.5Pa + 0.5P \cdot 3a - Pa = -0.5Pa + 1.5Pa - Pa = 0$$

od prawej:

$$M_A^l = M_A - P \cdot 2a + V_D \cdot 3a = 0.5Pa - 2Pa + 0.5P \cdot 3a = 0.5Pa - 2Pa + 1.5Pa = 0$$

$$M_A^p = -P \cdot 2a + V_D \cdot 3a = -2Pa + 0.5P \cdot 3a = -2Pa + 1.5Pa = -0.5Pa = -0.5 \cdot 2000 \cdot 1.0 = -1000 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$M_B = P \cdot a + V_D \cdot 2a = -Pa + 0.5P \cdot 2a = -Pa + Pa = 0$$

$$M_C = V_D \cdot a = 0.5P \cdot a = 0.5 \cdot 2000 \cdot 1 = 1000 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$M_D = 0$$

Wartości sił tnących (rys. 3.2e)

od lewej:

$$T_{AC} = V_A = 0.5P = 0.5 \cdot 2000 = 1000 \text{ N}$$

$$T_{CD} = V_A - P = 0.5P - P = -0.5P = -0.5 \cdot 2000 = -1000 \text{ N}$$

od prawej:

$$T_{AC} = P - V_D = P - 0.5P = 0.5P = 0.5 \cdot 2000 = 1000 \text{ N}$$

$$T_{CD} = -V_D = -0.5P = -0.5 \cdot 2000 = -1000 \text{ N}$$

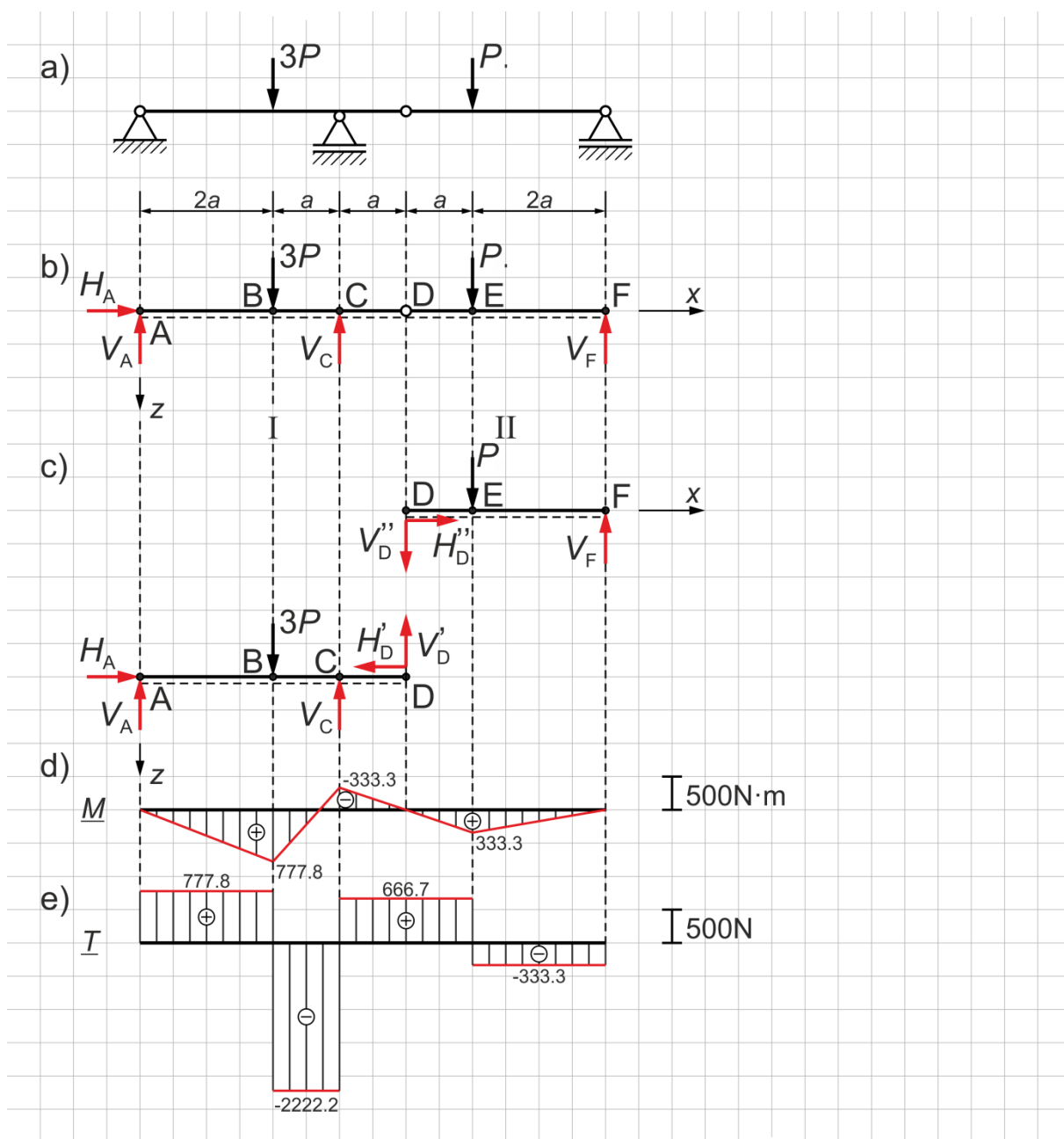
PRZYKŁAD 3.2

Wyznaczyć wartości wielkości przekrojowych w belce przegubowej przedstawionej na rys. 3.3a.

Dane:

$$a = 0.5 \text{ m}$$

$$P = 1000 \text{ N}$$



Rys. 3.3

ROZWIĄZANIE

Belka przegubowa poddana jest działaniu sił pionowych. Wielkościami przekrojowymi są moment zginający i siła tnąca.

Przed przystąpieniem do wyznaczania wielkości przekrojowych, należy wyznaczyć reakcje (rys. 3.3b i 3.3c).

Reakcje

sposób I (rys. 3.3b):

$$1) \sum P_{ix} = 0: H_A = 0$$

$$2) \sum P_{iz} = 0: -V_A + 3P - V_C + P - V_F = 0 \rightarrow -V_A + 4P - V_C - V_F = 0$$

$$3) \sum M_A = 0: -3P \cdot 2a + V_C \cdot 3a - P \cdot 5a + V_F \cdot 7a = 0$$

$$-6Pa + V_C \cdot 3a - 5Pa + V_F \cdot 7a = 0$$

$$-11Pa + V_C \cdot 3a + V_F \cdot 7a = 0$$

$$4) \sum M_D^P = 0: -P \cdot a + V_F \cdot 3a = 0$$

$$V_F \cdot 3a = Pa \quad | : 3a \rightarrow V_F = \frac{1}{3}P = \frac{1}{3} \cdot 1000 = 333.3 \text{ N}$$

z równania 3)

$$-11Pa + V_C \cdot 3a + \frac{1}{3}P \cdot 7a = 0$$

$$-11Pa + V_C \cdot 3a + \frac{7}{3}Pa = 0 \rightarrow -\frac{33}{3}Pa + V_C \cdot 3a + \frac{7}{3}Pa = 0$$

$$-\frac{26}{3}Pa + V_C \cdot 3a = 0$$

$$V_C \cdot 3a = \frac{26}{3}Pa \quad | : 3a \rightarrow V_C = \frac{26}{9}P = 2.9P = 2.9 \cdot 1000 = 2900 \text{ N}$$

z równania 2)

$$-V_A + 4P - \frac{26}{9}P - \frac{1}{3}P = 0 \rightarrow V_A = \frac{36}{9}P - \frac{26}{9}P - \frac{3}{9}P = \frac{7}{9}P = 0.78 \cdot 1000 = 780 \text{ N}$$

Równanie sprawdzające

$$\sum M_F = 0: -V_A \cdot 7a + 3P \cdot 5a - V_C \cdot 4a + P \cdot 2a = 0$$

$$-\frac{7}{9}P \cdot 7a + 15Pa - \frac{26}{9}P \cdot 4a + 2Pa = 0$$

$$-\frac{49}{9}Pa + 15Pa - \frac{104}{9}Pa + 2Pa = 0$$

$$-\frac{49}{9}Pa + \frac{135}{9}Pa - \frac{104}{9}Pa + \frac{18}{9}Pa = 0 \rightarrow 0 = 0$$

sposób II (rys. 3.3c):

$$1) H'_D = H''_D$$

$$2) V_D' = V_D''$$

belka I

$$3) \sum P_{ix} = 0: H_A - H_D' = 0 \rightarrow H_A = H_D'$$

$$4) \sum P_{iz} = 0: -V_A + 3P - V_C - V_D' = 0$$

$$5) \sum M_A = 0: -3P \cdot 2a + V_C \cdot 3a + V_D' \cdot 4a = 0 \rightarrow -6Pa + V_C \cdot 3a + V_D' \cdot 4a = 0$$

belka II

$$6) \sum P_{ix} = 0: H_D'' = 0$$

$$7) \sum P_{iz} = 0: V_D'' + P - V_F = 0$$

$$8) \sum M_F = 0: V_D'' \cdot 3a + P \cdot 2a = 0 \rightarrow V_D'' \cdot 3a = -2Pa \quad | : 3a$$

$$V_D'' = -\frac{2}{3}P = -0.67P = -0.67 \cdot 1000 = -670 \text{ N}$$

z równania 7)

$$-\frac{2}{3}P + P - V_F = 0 \rightarrow -\frac{2}{3}P + \frac{3}{3}P - V_F = 0$$

$$V_F = \frac{1}{3}P = \frac{1}{3} \cdot 1000 = 333.3 \text{ N}$$

z równania 2)

$$V_D' = V_D'' = -\frac{2}{3}P = -0.67 \cdot P = -0.67 \cdot 1000 = -670 \text{ N}$$

z równania 5)

$$-6Pa + V_C \cdot 3a - \frac{2}{3}P \cdot 4a = 0$$

$$-6Pa + V_C \cdot 3a - \frac{8}{3}Pa = 0 \rightarrow -\frac{18}{3}Pa + V_C \cdot 3a - \frac{8}{3}Pa = 0$$

$$-\frac{26}{3}Pa + V_C \cdot 3a = 0 \rightarrow V_C \cdot 3a = \frac{26}{3}Pa \quad | : 3a$$

$$V_C = \frac{26}{9}P = 2.9P = 2.9 \cdot 1000 = 2900 \text{ N}$$

z równania 4)

$$-V_A + 3P - \frac{26}{9}P + \frac{2}{3}P = 0$$

$$-V_A + \frac{27}{9}P - \frac{26}{9}P + \frac{6}{9}P = 0$$

$$-V_A + \frac{7}{9}P = 0$$

$$V_A = \frac{7}{9}P = 0.78P = 0.78 \cdot 1000 = 780 \text{ N}$$

Wartości momentów zginających (rys. 3.3d)

od lewej:

$$M_A = 0$$

$$M_B = V_A \cdot 2a = \frac{7}{9}P \cdot 2a = \frac{14}{9}Pa = \frac{14}{9} \cdot 1000 \cdot 0.5 = 777.8 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$M_C = V_A \cdot 3a - 3P \cdot a = \frac{7}{9}P \cdot 3a - 3Pa = \frac{21}{9}Pa - \frac{27}{9}Pa = -\frac{6}{9}Pa = -\frac{6}{9} \cdot 1000 \cdot 0.5 = -333.3 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$M_D = V_A \cdot 4a - 3P \cdot 2a + V_C \cdot a = \frac{7}{9}P \cdot 4a - 6Pa + \frac{26}{9}P \cdot a = \frac{28}{9}Pa - \frac{54}{9}Pa + \frac{26}{9}P \cdot a = 0$$

$$M_E = V_A \cdot 5a - 3P \cdot 3a + V_C \cdot 2a = \frac{7}{9}P \cdot 5a - 9Pa + \frac{26}{9}P \cdot 2a = \frac{35}{9}Pa - \frac{81}{9}Pa + \frac{52}{9}Pa = \frac{6}{9}Pa = \frac{2}{3} \cdot 1000 \cdot 0.5 = 333.3 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$M_F = V_A \cdot 7a - 3P \cdot 5a + V_C \cdot 4a - P \cdot 2a = \frac{7}{9}P \cdot 7a - 15Pa + \frac{26}{9}P \cdot 4a - 2Pa = \frac{49}{9}Pa - \frac{135}{9}Pa + \frac{104}{9}Pa - \frac{18}{9}Pa = 0$$

od prawej:

$$M_A = -3P \cdot 2a + V_C \cdot 3a - P \cdot 5a + V_F \cdot 7a = -6Pa + \frac{26}{9}P \cdot 3a - 5Pa + \frac{1}{3}P \cdot 7a = -\frac{54}{9}Pa + \frac{78}{9}Pa - \frac{45}{9}Pa + \frac{21}{9}Pa = 0$$

$$M_B = V_C \cdot a - P \cdot 3a + V_F \cdot 5a = \frac{26}{9}Pa - 3Pa + \frac{1}{3}P \cdot 5a = \frac{26}{9}Pa - \frac{27}{9}Pa + \frac{15}{9}Pa = \frac{14}{9}Pa = \frac{14}{9} \cdot 1000 \cdot 0.5 = 777.8 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$M_C = -P \cdot 2a + V_F \cdot 4a = -2Pa + \frac{1}{3}P \cdot 4a = -\frac{6}{3}Pa + \frac{4}{3}Pa = -\frac{2}{3}Pa = -\frac{2}{3} \cdot 1000 \cdot 0.5 = -333.3 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$M_D = -Pa + V_F \cdot 3a = -Pa + \frac{1}{3}P \cdot 3a = -Pa + Pa = 0$$

$$M_E = V_F \cdot 2a = \frac{1}{3}P \cdot 2a = \frac{2}{3}Pa = \frac{2}{3} \cdot 1000 \cdot 0.5 = 333.3 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$M_F = 0$$

Wartości sił tnących (rys. 3.3e)

od lewej:

$$T_{AB} = V_A = \frac{7}{9}P = \frac{7}{9} \cdot 1000 = 777.8 \text{ N}$$

$$T_{BC} = V_A - 3P = \frac{7}{9}P - 3P = \frac{7}{9}P - \frac{27}{9}P = -\frac{20}{9}P = -\frac{20}{9} \cdot 1000 = -2222.2 \text{ N}$$

$$T_{CE} = V_A - 3P + V_C = \frac{7}{9}P - 3P + \frac{26}{9}P = \frac{7}{9}P - \frac{27}{9}P + \frac{26}{9}P = \frac{6}{9}P = \frac{2}{3} \cdot 1000 = 666.7 \text{ N}$$

$$T_{EF} = V_A - 3P + V_C - P = \frac{7}{9}P - 3P + \frac{26}{9}P - P = \frac{7}{9}P - \frac{27}{9}P + \frac{26}{9}P - \frac{9}{9}P =$$

$$= -\frac{3}{9}P = -\frac{1}{3}P = -\frac{1}{3} \cdot 1000 = -333.3 \text{ N}$$

od prawej:

$$\begin{aligned} T_{AB} &= 3P - V_C + P - V_F = 3P - \frac{26}{9}P + P - \frac{1}{3}P = \frac{27}{9}P - \frac{26}{9}P - \frac{9}{9}P - \frac{3}{9}P = \\ &= \frac{7}{9}P = \frac{7}{9} \cdot 1000 = 777.8 \text{ N} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_{BC} &= -V_C + P - V_F = -\frac{26}{9}P + P - \frac{1}{3}P = -\frac{26}{9}P + \frac{9}{9}P - \frac{3}{9}P = -\frac{20}{9}P = \\ &= -\frac{20}{9} \cdot 1000 = -2222.2 \text{ N} \end{aligned}$$

$$T_{CE} = P - V_F = P - \frac{1}{3}P = \frac{2}{3}P = \frac{2}{3} \cdot 1000 = 666.7 \text{ N}$$

$$T_{EF} = -V_F = -\frac{1}{3}P = -\frac{1}{3} \cdot 1000 = -333.3 \text{ N}$$

PRZYKŁAD 3.3

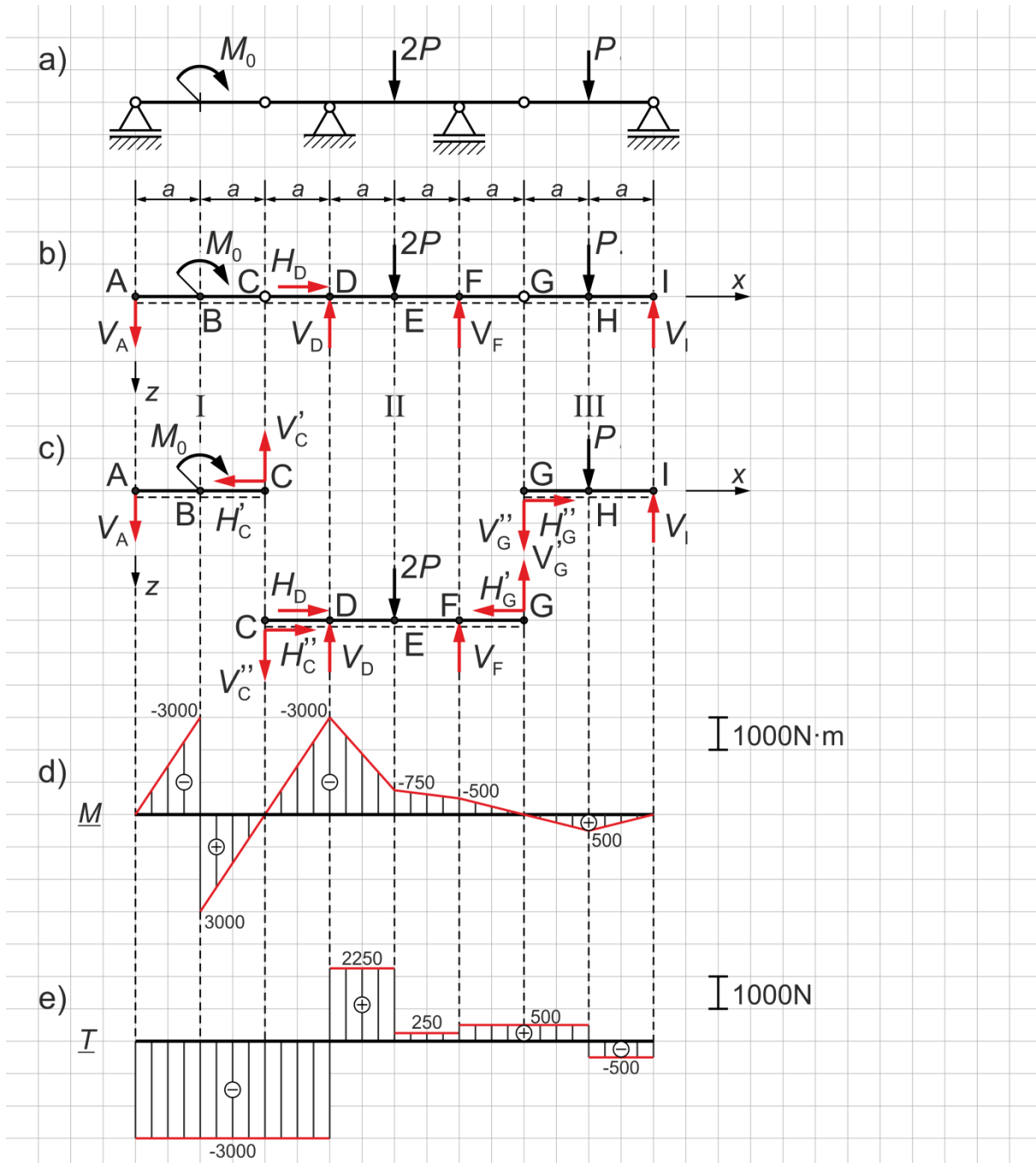
Wyznaczyć wartości wielkości przekrojowych w belce przegubowej przedstawionej na rys. 3.4a.

Dane:

$$a = 1.0 \text{ m}$$

$$P = 1000 \text{ N}$$

$$M_0 = 6Pa = 6000 \text{ N}\cdot\text{m}$$



Rys. 3.4

ROZWIĄZANIE

Belka przegubowa poddana jest działaniu sił pionowych i momentu skupionego. Wielkościami przekrojowymi są moment zginający i siła tnąca.

Przed przystąpieniem do wyznaczania wielkości przekrojowych, należy wyznaczyć reakcje (rys. 3.4b i 3.4c).

Reakcje

sposób I (rys. 3.4b):

$$1) \sum P_{ix} = 0: H_D = 0$$

$$2) \sum P_{iz} = 0: V_A - V_D + 2P - V_F + P - V_I = 0 \rightarrow V_A - V_D + 3P - V_F - V_I = 0$$

$$3) \sum M_D = 0: V_A \cdot 3a - M_0 - 2P \cdot a + V_F \cdot 2a - P \cdot 4a + V_I \cdot 5a = 0$$

$$V_A \cdot 3a - M_0 - 6Pa + V_F \cdot 2a + V_I \cdot 5a = 0$$

$$4) \sum M_C^l = 0: V_A \cdot 2a - M_0 = 0$$

$$5) \sum M_G^p = 0: -P \cdot a + V_I \cdot 2a = 0$$

z równania 4)

$$V_A \cdot 2a = M_0 \rightarrow V_A \cdot 2a = 6Pa \quad |:2a \rightarrow V_A = 3P = 3 \cdot 1000 = 3000 \text{ N}$$

z równania 5)

$$-P \cdot a + V_I \cdot 2a = 0 \rightarrow V_I \cdot 2a = Pa \quad |:2a \rightarrow V_I = \frac{1}{2}P = \frac{1}{2} \cdot 1000 = 500 \text{ N}$$

z równania 3)

$$3P \cdot 3a - 6Pa - 6Pa + V_F \cdot 2a + \frac{1}{2}P \cdot 5a = 0$$

$$9Pa - 6Pa - 6Pa + V_F \cdot 2a + 2.5Pa = 0 \rightarrow V_F \cdot 2a - 0.5Pa = 0$$

$$V_F \cdot 2a = 0.5Pa \quad |:2a \rightarrow V_F = 0.25P = 0.25 \cdot 1000 = 250 \text{ N}$$

z równania 2)

$$3P - V_D + 3P - 0.25P - 0.5P = 0$$

$$5.25P - V_D = 0 \rightarrow V_D = 5.25P = 5.25 \cdot 1000 = 5250 \text{ N}$$

Równanie sprawdzające

$$\sum M_A = 0: -M_0 + V_D \cdot 3a - 2P \cdot 4a + V_F \cdot 5a - P \cdot 7a + V_I \cdot 8a = 0$$

$$-6Pa + 5.25P \cdot 3a - 8Pa + 0.25P \cdot 5a - 7Pa + 0.5P \cdot 8a = 0$$

$$-6Pa + 15.75Pa - 8Pa + 1.25Pa - 7Pa + 4Pa = 0 \rightarrow 0 = 0$$

sposób II (rys. 3.4c):

$$1) H'_C = H''_C$$

$$2) V'_C = V''_C$$

$$3) H'_G = H''_G$$

$$4) V'_G = V''_G$$

belka I

$$5) \sum P_{ix} = 0: -H'_C = 0 \rightarrow H'_C = 0$$

$$6) \sum P_{iz} = 0: V_A - V'_C = 0 \rightarrow V_A = V'_C$$

$$7) \sum M_A = 0: -M_0 + V'_C \cdot 2a = 0 \rightarrow V'_C \cdot 2a = M_0 = 6Pa \quad | : 2a$$

$$V'_C = 3P = 3 \cdot 1000 = 3000 \text{ N}$$

z równania 6)

$$V_A = V'_C = 3P = 3 \cdot 1000 = 3000 \text{ N}$$

belka II

$$8) \sum P_{ix} = 0: H''_C + H_D - H'_G = 0$$

uwzględniając równania 1) i 5)

$$H''_C = 0$$

$$0 + H_D - H'_G = 0 \rightarrow H_D = H'_G$$

$$9) \sum P_{iz} = 0: V''_C - V_D + 2P - V_F - V'_G = 0$$

uwzględniając równania 2) i 6)

$$V'_C = V''_C = V_A = 3P = 3 \cdot 1000 = 3000 \text{ N}$$

$$3P - V_D + 2P - V_F - V'_G = 0 \rightarrow 5P - V_D - V_F - V'_G = 0$$

$$10) \sum M_D = 0: V''_C \cdot a - 2P \cdot a + V_F \cdot 2a + V'_G \cdot 3a = 0$$

$$3P \cdot a - 2P \cdot a + V_F \cdot 2a + V'_G \cdot 3a = 0 \rightarrow Pa + V_F \cdot 2a + V'_G \cdot 3a = 0$$

belka III

$$11) \sum P_{ix} = 0: H''_G = 0$$

$$12) \sum P_{iz} = 0: V''_G + P - V_I = 0$$

$$13) \sum M_I = 0: V''_G \cdot 2a + P \cdot a = 0 \rightarrow V''_G \cdot 2a = -Pa \quad | : 2a$$

$$V''_G = -0.5P = -0.5 \cdot 1000 = -500 \text{ N}$$

z równania 12)

$$-0.5P + P - V_I = 0 \rightarrow 0.5P - V_I = 0$$

$$V_I = 0.5P = 0.5 \cdot 1000 = 500 \text{ N}$$

z równań 4) i 10)

$$V'_G = V''_G = -0.5P = -0.5 \cdot 1000 = -500 \text{ N}$$

$$Pa + V_F \cdot 2a - 0.5P \cdot 3a = 0 \rightarrow Pa + V_F \cdot 2a - 1.5Pa = 0$$

$$-0.5Pa + V_F \cdot 2a = 0 \rightarrow V_F \cdot 2a = 0.5Pa \quad | : 2a$$

$$V_F = 0.25P = 0.25 \cdot 1000 = 250 \text{ N}$$

z równania 9)

$$3P - V_D + 2P - 0.25P + 0.5P = 0$$

$$5.25P - V_D = 0 \rightarrow V_D = 5.25P = 5.25 \cdot 1000 = 5250 \text{ N}$$

Wartości momentów zginających (rys. 3.4d)

od lewej:

$$M_A = 0$$

$$M_B^l = -V_A \cdot a = -3P \cdot a = -3 \cdot 1000 \cdot 1 = -3000 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$M_B^p = -V_A \cdot a + M_0 = -3P \cdot a + 6Pa = 3Pa = 3 \cdot 1000 \cdot 1.0 = 3000 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$M_C = -V_A \cdot 2a + M_0 = -3P \cdot 2a + 6Pa = -6Pa + 6Pa = 0$$

$$M_D = -V_A \cdot 3a + M_0 = -3P \cdot 3a + 6Pa = -9Pa + 6Pa = -3Pa = \\ = -3 \cdot 1000 \cdot 1.0 = -3000 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$M_E = -V_A \cdot 4a + M_0 + V_D \cdot a = -3P \cdot 4a + 6Pa + 5.25P \cdot a = -12Pa + 6Pa + 5.25Pa = \\ = -0.75Pa = -0.75 \cdot 1000 \cdot 1 = -750 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$M_F = -V_A \cdot 5a + M_0 + V_D \cdot 2a - 2P \cdot a = -3P \cdot 5a + 6Pa + 5.25P \cdot 2a - 2Pa = \\ = -15Pa + 6Pa + 10.5Pa - 2Pa = -0.5Pa = -0.5 \cdot 1000 \cdot 1.0 = -500 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$M_G = -V_A \cdot 6a + M_0 + V_D \cdot 3a - 2P \cdot 2a + V_F \cdot a = -3P \cdot 6a + 6Pa + 5.25P \cdot 3a - \\ + 4Pa + 0.25P \cdot a = -18Pa + 6Pa + 15.75Pa - 4Pa + 0.25Pa = 0$$

$$M_H = -V_A \cdot 7a + M_0 + V_D \cdot 4a - 2P \cdot 3a + V_F \cdot 2a = -3P \cdot 7a + 6Pa + 5.25P \cdot 4a - \\ + 6Pa + 0.25P \cdot 2a = -21Pa + 6Pa + 21Pa - 6Pa + 0.5Pa = 0.5Pa = \\ = 0.5 \cdot 1000 \cdot 1.0 = 500 \text{ N}$$

$$M_I = -V_A \cdot 8a + M_0 + V_D \cdot 5a - 2P \cdot 4a + V_F \cdot 3a - P \cdot a = -3P \cdot 8a + 6Pa + \\ + 5.25P \cdot 5a - 8Pa + 0.25P \cdot 3a - Pa = -24Pa + 6Pa + 26.25Pa - 8Pa + \\ + 0.75Pa - Pa = 0$$

od prawej:

$$M_A = -M_0 + V_D \cdot 3a - 2P \cdot 4a + V_F \cdot 5a - P \cdot 7a + V_I \cdot 8a = -6Pa + 5.25P \cdot 3a - 8Pa + \\ + 0.25P \cdot 5a - 7Pa + 0.5P \cdot 8a = -6Pa + 15.75Pa - 8Pa + 1.25Pa - 7Pa + \\ + 4Pa = 0$$

$$M_B^l = -M_0 + V_D \cdot 2a - 2P \cdot 3a + V_F \cdot 4a - P \cdot 6a + V_I \cdot 7a = -6Pa + 5.25P \cdot 2a - 6Pa + \\ + 0.25P \cdot 4a - 6Pa + 0.5P \cdot 7a = -6Pa + 10.5Pa - 6Pa + Pa - 6Pa + 3.5Pa = \\ = -3Pa = -3 \cdot 1000 \cdot 1.0 = -3000 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$M_B^p = V_D \cdot 2a - 2P \cdot 3a + V_F \cdot 4a - P \cdot 6a + V_I \cdot 7a = 5.25P \cdot 2a - 6Pa + 0.25P \cdot 4a - \\ + 6Pa + 0.5P \cdot 7a = 10.5Pa - 6Pa + Pa - 6Pa + 3.5Pa = 3Pa = \\ = 3 \cdot 1000 \cdot 1 = 3000 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$M_C = V_D \cdot a - 2P \cdot 2a + V_F \cdot 3a - P \cdot 5a + V_I \cdot 6a = 5.25P \cdot a - 4Pa + 0.25P \cdot 3a - \\ + 5Pa + 0.5P \cdot 6a = 5.25Pa - 4Pa + 0.75Pa - 5Pa + 3Pa = 0$$

$$M_D = -2P \cdot a + V_F \cdot 2a - P \cdot 4a + V_I \cdot 5a = -2Pa + 0.25P \cdot 2a - 4Pa + 0.5P \cdot 5a = \\ = -2Pa + 0.5Pa - 4Pa + 2.5Pa = -3Pa = -3 \cdot 1000 \cdot 1.0 = -3000 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$M_E = V_F \cdot a - P \cdot 3a + V_I \cdot 4a = 0.25P \cdot a - 3Pa + 0.5P \cdot 4a = 0.25Pa - 3Pa + 2Pa = \\ = -0.75Pa = -0.75 \cdot 1000 \cdot 1.0 = -750 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$M_F = -P \cdot 2a + V_I \cdot 3a = -2Pa + 0.5P \cdot 3a = -2Pa + 1.5Pa = -0.5Pa = \\ = -0.5 \cdot 1000 \cdot 1.0 = -500 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$M_G = -P \cdot a + V_I \cdot 2a = -Pa + 0.5P \cdot 2a = -Pa + Pa = 0$$

$$M_H = V_I \cdot a = 0.5P \cdot a = 0.5 \cdot 1000 \cdot 1.0 = 500 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$M_I = 0$$

Wartości sił tnących (rys. 3.4e)

od lewej:

$$T_{AD} = -V_A = -3P = -3 \cdot 1000 = -3000 \text{ N}$$

$$T_{DE} = -V_A + V_D = -3P + 5.25P = 2.25P = 2.25 \cdot 1000 = 2250 \text{ N}$$

$$T_{EF} = -V_A + V_D - 2P = -3P + 5.25P - 2P = 0.25P = 0.25 \cdot 1000 = 250 \text{ N}$$

$$T_{FH} = -V_A + V_D - 2P + V_F = -3P + 5.25P - 2P + 0.25P = 0.5P = 0.5 \cdot 1000 = 500 \text{ N}$$

$$T_{HI} = -V_A + V_D - 2P + V_F - P = -3P + 5.25P - 2P + 0.25P - P = -0.5P = \\ = -0.5 \cdot 1000 = -500 \text{ N}$$

od prawej:

$$T_{AD} = -V_D + 2P - V_F + P - V_I = -5.25P + 2P - 0.25P + P - 0.5P = -3P = \\ = -3 \cdot 1000 = -3000 \text{ N}$$

$$T_{DE} = 2P - V_F + P - V_I = 2P - 0.25P + P - 0.5P = 2.25P = 2.25 \cdot 1000 = 2250 \text{ N}$$

$$T_{EF} = -V_F + P - V_I = -0.25P + P - 0.5P = 0.25P = 0.25 \cdot 1000 = 250 \text{ N}$$

$$T_{FH} = P - V_I = P - 0.5P = 0.5P = 0.5 \cdot 1000 = 500 \text{ N}$$

$$T_{HI} = -V_I = -0.5P = -0.5 \cdot 1000 = -500 \text{ N}$$

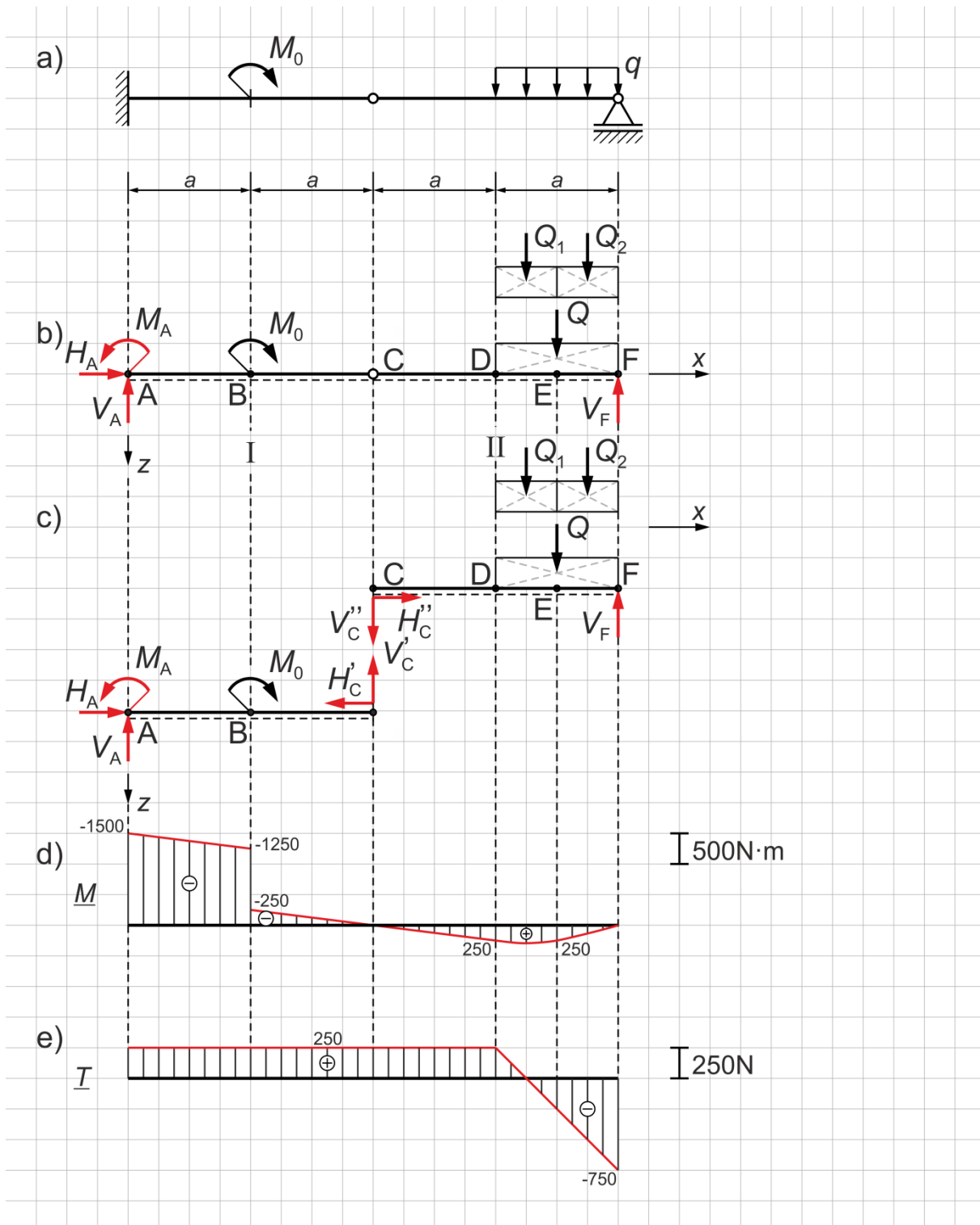
PRZYKŁAD 3.4

Wyznaczyć wykresy wielkości przekrojowych dla belki przegubowej przedstawionej na rys. 3.5a.
Dane:

$$a = 1.0 \text{ m}$$

$$q = 1000 \text{ N/m}$$

$$M_0 = qa^2 = 1000 \text{ N}\cdot\text{m}$$



Rys. 3.5

ROZWIĄZANIE

Belka przegubowa poddana jest działaniu momentu skupionego oraz obciążenia równomiernie rozłożonego na odcinku a . Wielkościami przekrojowymi są moment zginający i siła tnąca.

Przed przystąpieniem do wyznaczania wielkości przekrojowych, należy wyznaczyć reakcje (rys. 3.5b i 3.5c).

$$Q = q \cdot a = 1000 \cdot 1.0 = 1000 \text{ N}$$

$$Q_1 = Q_2 = q \cdot 0.5a = 0.5qa = 0.5 \cdot 1000 \cdot 1.0 = 500 \text{ N}$$

Reakcje podporowe

sposób I (rys. 3.5b):

$$1) \sum P_{ix} = 0: H_A = 0$$

$$2) \sum P_{iz} = 0: -V_A + Q - V_F = 0$$

$$3) \sum M_A = 0: M_A - M_0 - Q \cdot 3.5a + V_F \cdot 4a = 0$$

$$4) \sum M_C^P = 0: -Q \cdot 1.5a + V_F \cdot 2a = 0$$

z równania 4)

$$-Q \cdot 1.5a + V_F \cdot 2a = 0 \rightarrow V_F \cdot 2a = Q \cdot 1.5a \quad | : 2a$$

$$V_F = 0.75Q = 0.75 \cdot q \cdot a = 0.75 \cdot 1000 \cdot 1.0 = 750 \text{ N}$$

z równania 3)

$$M_A - M_0 - Q \cdot 3.5a + V_F \cdot 4a = 0 \rightarrow M_A = M_0 + Q \cdot 3.5a - V_F \cdot 4a$$

$$M_A = qa^2 + qa \cdot 3.5a - 0.75qa \cdot 4a = qa^2 + 3.5qa^2 - 3qa^2 = 1.5qa^2 = \\ = 1.5 \cdot 1000 \cdot 1.0^2 = 1500 \text{ N}$$

z równania 2)

$$-V_A + Q - V_F = 0 \rightarrow V_A = Q - V_F$$

$$V_A = qa - 0.75qa = 0.25qa = 0.25 \cdot 1000 \cdot 1.0 = 250 \text{ N}$$

Równanie sprawdzające

$$\sum M_D = 0: M_A - V_A \cdot 3a - M_0 - Q \cdot 0.5a + V_F \cdot a = 0$$

$$1.5qa^2 - 0.25qa \cdot 3a - qa^2 - qa \cdot 0.5a + 0.75qa \cdot a = 0$$

$$1.5qa^2 - 0.75qa^2 - qa^2 - 0.5qa^2 + 0.75qa^2 \rightarrow 0 = 0$$

sposób II (rys. 3.5c):

$$1) H'_C = H''_C$$

$$2) V'_C = V''_C$$

belka I

$$3) \sum P_{ix} = 0: H_A - H'_C = 0 \rightarrow H_A = H'_C$$

$$4) \sum P_{iz} = 0: -V_A - V'_C = 0 \rightarrow V_A = -V'_C$$

$$5) \sum M_A = 0: M_A - M_0 + V'_C \cdot 2a = 0$$

belka II

$$6) \sum P_{ix} = 0: H''_C = 0$$

$$7) \sum P_{iz} = 0: V''_C + Q - V_F = 0$$

$$8) \sum M_F = 0: V''_C \cdot 2a + Q \cdot 0.5a = 0$$

z równania 8)

$$V''_C \cdot 2a + Q \cdot 0.5a = 0 \rightarrow V''_C \cdot 2a = -Q \cdot 0.5a \quad | :2a$$

$$V''_C = -0.25Q = -0.25 \cdot q \cdot a = -0.25 \cdot 1000 \cdot 1.0 = -250 \text{ N}$$

z równania 7)

$$V''_C + Q - V_F = 0$$

$$V_F = V''_C + Q = -0.25qa + qa = 0.75qa = 0.75 \cdot 1000 \cdot 1.0 = 750 \text{ N}$$

z równań 1), 3) i 6)

$$H_A = H'_C = H''_C = 0$$

z równania 2)

$$V'_C = V''_C = -0.25qa = -250 \text{ N}$$

z równania 5)

$$M_A - M_0 + V'_C \cdot 2a = 0$$

$$\begin{aligned} M_A = M_0 - V'_C \cdot 2a &= qa^2 + 0.25qa \cdot 2a = qa^2 + 0.5 \cdot qa^2 = 1.5qa^2 = \\ &= 1.5 \cdot 1000 \cdot 1.0 = 1500 \text{ N} \end{aligned}$$

z równania 4)

$$V_A = -V'_C = 0.25qa = 0.25 \cdot 1000 \cdot 1.0 = 250 \text{ N}$$

Wartości momentów zginających (rys. 3.5d)

od lewej:

$$M_A^l = 0$$

$$M_A^p = -M_A = -1.5qa^2 = -1.5 \cdot 1000 \cdot 1.0^2 = -1500 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$M_B^l = -M_A + V_A \cdot a = -1.5qa^2 + 0.25qa \cdot a = -1.5qa^2 + 0.25qa^2 = -1.25qa^2 = \\ = -1.25 \cdot 1000 \cdot 1.0^2 = -1250 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$M_B^p = -M_A + V_A \cdot a + M_0 = -1.5qa^2 + 0.25qa \cdot a + qa^2 = -0.25qa^2 = \\ = -0.25 \cdot 1000 \cdot 1.0^2 = -250 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$M_C = -M_A + V_A \cdot 2a + M_0 = -1.5qa^2 + 0.25qa \cdot 2a + qa^2 = \\ = -1.5qa^2 + 0.5qa^2 + qa^2 = 0$$

$$M_D = -M_A + V_A \cdot 3a + M_0 = -1.5qa^2 + 0.25qa \cdot 3a + qa^2 = \\ = -1.5qa^2 + 0.75qa^2 + qa^2 = 0.25qa^2 = 0.25 \cdot 1000 \cdot 1.0^2 = 250 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$M_E = -M_A + V_A \cdot 3.5a + M_0 - Q_1 \cdot 0.25a = -1.5qa^2 + 0.25qa \cdot 3.5a + qa^2 - \\ + 0.5qa \cdot 0.25a = -1.5qa^2 + 0.875qa^2 + qa^2 - 0.125qa^2 = 0.25qa^2 = \\ = 0.25 \cdot 1000 \cdot 1.0^2 = 250 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$M_F = -M_A + V_A \cdot 4a + M_0 - Q_1 \cdot 0.5a = -1.5qa^2 + 0.25qa \cdot 4a + qa^2 - qa \cdot 0.5a = \\ = -1.5qa^2 + qa^2 + qa^2 - 0.5qa^2 = 0$$

od prawej:

$$M_A^l = M_A - M_0 - Q \cdot 3.5a + V_F \cdot 4a = 1.5qa^2 - qa^2 - qa \cdot 3.5a + 0.75qa \cdot 4a = \\ = 1.5qa^2 - qa^2 - 3.5qa^2 + 3qa^2 = 0$$

$$M_A^p = -M_0 - Q \cdot 3.5a + V_F \cdot 4a = -qa^2 - qa \cdot 3.5a + 0.75qa \cdot 4a = \\ = -qa^2 - 3.5qa^2 + 3qa^2 = -1.5qa^2 = -1.5 \cdot 1000 \cdot 1.0^2 = -1500 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$M_B^l = -M_0 - Q \cdot 2.5a + V_F \cdot 3a = -qa^2 - qa \cdot 2.5a + 0.75qa \cdot 3a = \\ = -qa^2 - 2.5qa^2 + 2.25qa^2 = -1.25qa^2 = -1.25 \cdot 1000 \cdot 1.0^2 = -1250 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$M_B^p = -Q \cdot 2.5a + V_F \cdot 3a = -qa \cdot 2.5a + 0.75qa \cdot 3a = -2.5qa^2 + 2.25qa^2 = \\ = -0.25qa^2 = -0.25 \cdot 1000 \cdot 1.0^2 = -250 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$M_C = -Q \cdot 1.5a + V_F \cdot 2a = -qa \cdot 1.5a + 0.75qa \cdot 2a = -1.5qa^2 + 1.5qa^2 = 0$$

$$M_D = -Q \cdot 0.5a + V_F \cdot a = -qa \cdot 0.5a + 0.75qa \cdot a = -0.5qa^2 + 0.75qa^2 = 0.25qa^2 = \\ = 0.25 \cdot 1000 \cdot 1.0^2 = 250 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$M_E = -Q_2 \cdot 0.25a + V_F \cdot 0.5a = -0.5qa \cdot 0.25a + 0.75qa \cdot 0.5a = \\ = -0.125qa^2 + 0.375qa^2 = 0.25qa^2 = 0.25 \cdot 1000 \cdot 1.0^2 = 250 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$M_F = 0$$

Wartości sił tnących (rys. 3.5e)

od lewej:

$$T_{AD} = V_A = 0.25qa = 0.25 \cdot 1000 \cdot 1.0 = 250 \text{ N}$$

$$T_F = V_A - Q = 0.25qa - qa = -0.75qa = -0.75 \cdot 1000 \cdot 1.0 = -750 \text{ N}$$

od prawej:

$$T_{AD} = Q - V_F = qa - 0.75qa = 0.25qa = 0.25 \cdot 1000 \cdot 1.0 = 250 \text{ N}$$

$$T_F = -V_F = -0.75qa = -0.75 \cdot 1000 \cdot 1.0 = -750 \text{ N}$$

4.

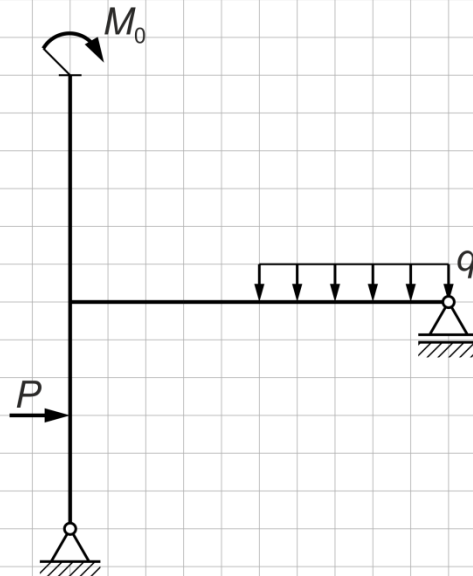
WIELKOŚCI PRZEKROJOWE W ORTOGONALNYCH RAMACH PŁASKICH

Ortogonalne ramy płaskie są złożone z prętów o osi pionowej lub poziomej. Przyjmujemy następujące założenia:

- 1) pręty są pryzmatyczne,
- 2) płaszczyzna ramy jest płaszczyzną symetrii przekrojów poprzecznych prętów,
- 3) rama jest statycznie wyznaczalna (SW),
- 4) rama jest grafem otwartym prętów sztywno ze sobą połączonych,
- 5) obciążenia działają w płaszczyźnie ramy.

Przykład schematu statycznego ortogonalnej ramy płaskiej pokazano na rys. 4.1.

Rozwiązanie ortogonalnej ramy płaskiej polega na wyznaczeniu reakcji oraz wykresów wielkości przekrojowych (moment zginający, siła tnąca, siła osiowa). Reakcje wyznacza się z trzech równań równowagi statycznej (2.1).



Rys. 4.1

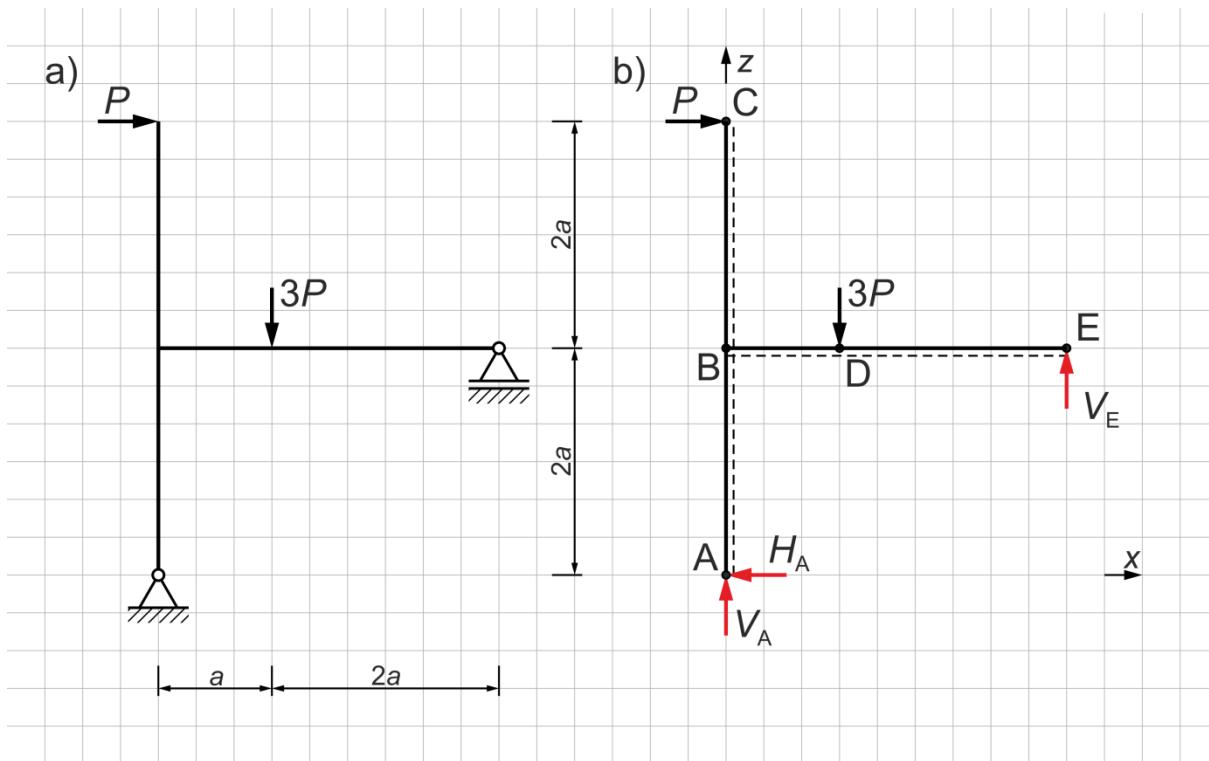
PRZYKŁAD 4.1

Wyznaczyć wykresy wielkości przekrojowych dla ramy płaskiej przedstawionej na rys. 4.2a.

Dane:

$$a = 1.0 \text{ m}$$

$$P = 1000 \text{ N}$$



Rys. 4.2

ROZWIĄZANIE

Przed wyznaczeniem wykresów wielkości przekrojowych, należy wyznaczyć reakcje. Schemat statyczny ramy pokazano na rys. 4.2b. Wielkości przekrojowe oblicza się od lewej, od prawej, od dołu lub od góry, według zasady najprostszych obliczeń.

Reakcje

$$\sum P_{ix} = 0: \quad -H_A + P = 0$$

$$H_A = P = 1000 \text{ N}$$

$$\sum M_A = 0: \quad -3P \cdot a + V_E \cdot 3a - P \cdot 4a = 0$$

$$V_E \cdot 3a - 7Pa = 0 \quad \rightarrow \quad V_E \cdot 3a = 7Pa \quad | : 3a$$

$$V_E = \frac{7}{3}P = \frac{7}{3} \cdot 1000 = 2333 \text{ N}$$

$$\sum P_{iz} = 0: \quad V_A - 3P + V_E = 0$$

$$V_A = 3P - V_E = 3P - \frac{7}{3}P = \frac{9}{3}P - \frac{7}{3}P = \frac{2}{3}P = \frac{2}{3} \cdot 1000 = 667 \text{ N}$$

Równanie sprawdzające

$$\begin{aligned}\Sigma M_B = 0: \quad & -H_A \cdot 2a - P \cdot 2a - 3P \cdot a + V_E \cdot 3a = 0 \\ & -P \cdot 2a - P \cdot 2a - 3P \cdot a + \frac{7}{3}P \cdot 3a = 0 \\ & -2Pa - 2Pa - 3Pa + 7Pa = 0 \quad \rightarrow \quad 0 = 0\end{aligned}$$

Wartości momentów zginających (rys. 4.3a)

$$M_A = 0$$

$$M_B^d = H_A \cdot 2a = P \cdot 2a = 2Pa = 2 \cdot 1000 \cdot 1.0 = 2000 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$\begin{aligned}M_B^p &= -3P \cdot a + V_E \cdot 3a = -3Pa + \frac{7}{3}P \cdot 3a = -3Pa + 7Pa = 4Pa = \\ &= 4 \cdot 1000 \cdot 1.0 = 4000 \text{ N}\cdot\text{m}\end{aligned}$$

$$M_B^g = -P \cdot 2a = -2Pa = -2 \cdot 1000 \cdot 1.0 = -2000 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$M_C = 0$$

$$M_D = V_E \cdot 2a = \frac{7}{3}P \cdot 2a = \frac{14}{3}Pa = \frac{14}{3} \cdot 1000 \cdot 1.0 = 4667 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$M_E = 0$$

Wartości sił tnących (rys. 4.3b)

$$T_{AB} = H_A = P = 1000 \text{ N}$$

$$T_{BC} = P = 1000 \text{ N}$$

$$T_{BD} = V_A = \frac{2}{3}P = \frac{2}{3} \cdot 1000 = 667 \text{ N}$$

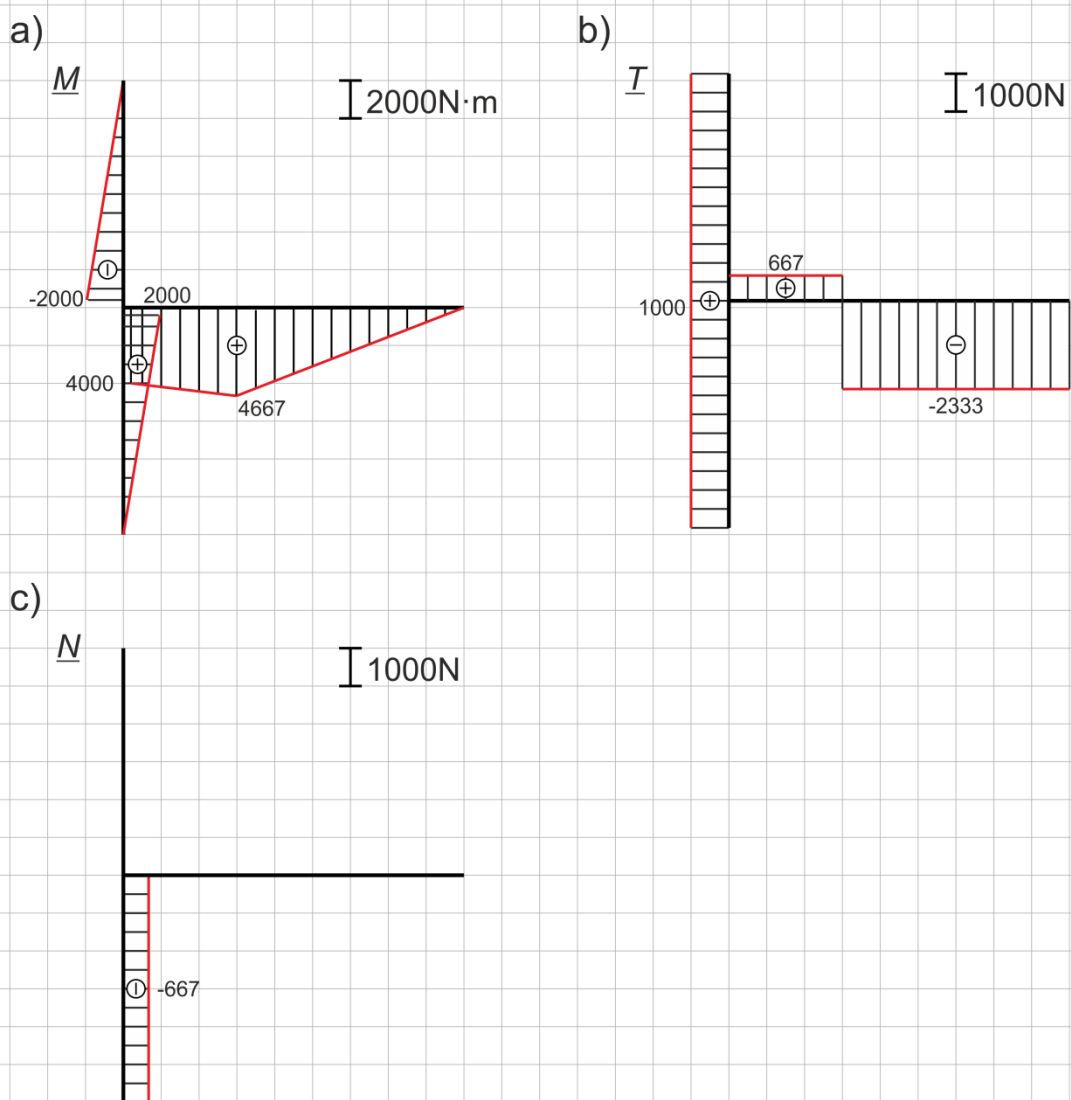
$$T_{DE} = -V_E = -\frac{7}{3}P = -\frac{7}{3} \cdot 1000 = -2333 \text{ N}$$

Wartości sił osiowych (rys. 4.3c)

$$N_{AB} = -V_A = -\frac{2}{3}P = -\frac{2}{3} \cdot 1000 = -667 \text{ N}$$

$$N_{BC} = 0$$

$$N_{BE} = 0$$



Rys. 4.3

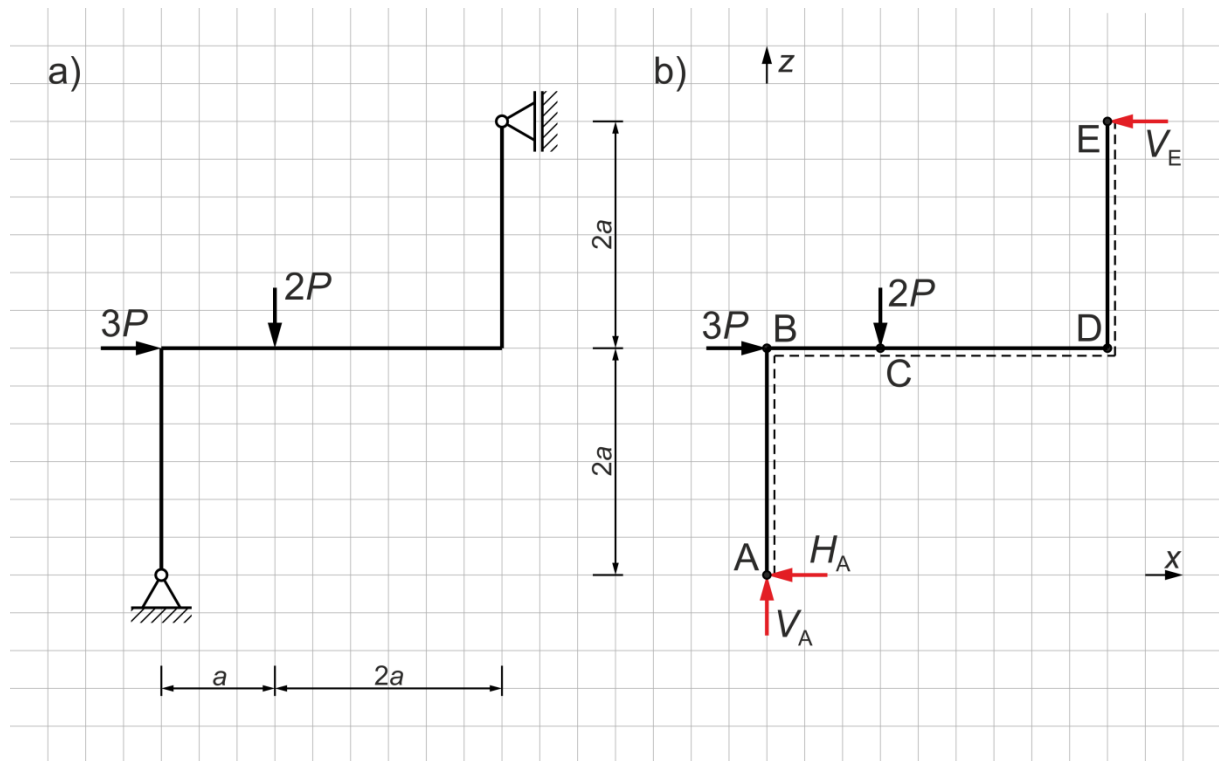
PRZYKŁAD 4.2

Wyznaczyć wykresy wielkości przekrojowych dla ramy płaskiej przedstawionej na rys. 4.4a.

Dane:

$$a = 0.5 \text{ m}$$

$$P = 2000 \text{ N}$$



Rys. 4.4

ROZWIĄZANIE

Schemat statyczny ramy pokazano na rys. 4.4b.

Reakcje

$$\sum P_{iz} = 0: \quad V_A - 2P = 0$$

$$V_A = 2P = 2 \cdot 2000 = 4000 \text{ N}$$

$$\sum M_A = 0: \quad -3P \cdot 2a - 2P \cdot a + V_E \cdot 4a = 0$$

$$-6Pa - 2Pa + V_E \cdot 4a = 0 \quad \rightarrow \quad -8Pa + V_E \cdot 4a = 0$$

$$V_E \cdot 4a = 8Pa \quad | : 4a \quad \rightarrow \quad V_E = 2P = 2 \cdot 2000 = 4000 \text{ N}$$

$$\sum P_{ix} = 0: \quad -H_A + 3P - V_E = 0$$

$$-H_A + 3P - 2P = 0 \quad \rightarrow \quad -H_A + P = 0$$

$$H_A = P = 2000 \text{ N}$$

Równanie sprawdzające

$$\sum M_B = 0: \quad -H_A \cdot 2a - 2P \cdot a + V_E \cdot 2a = 0$$

$$-P \cdot 2a - 2Pa + 2P \cdot 2a = 0$$

$$-2Pa - 2Pa + 4Pa = 0 \rightarrow 0 = 0$$

Wartości momentów zginających (rys. 4.5a)

$$M_A = 0$$

$$M_B^d = H_A \cdot 2a = P \cdot 2a = 2Pa = 2 \cdot 2000 \cdot 0.5 = 2000 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$M_B^p = H_A \cdot 2a = P \cdot 2a = 2Pa = 2 \cdot 2000 \cdot 0.5 = 2000 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$M_C = V_E \cdot 2a = 2P \cdot 2a = 4Pa = 4 \cdot 2000 \cdot 0.5 = 4000 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$M_D^l = V_E \cdot 2a = 2P \cdot 2a = 4Pa = 4 \cdot 2000 \cdot 0.5 = 4000 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$M_D^g = V_E \cdot 2a = 2P \cdot 2a = 4Pa = 4 \cdot 2000 \cdot 0.5 = 4000 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$M_E = 0$$

Wartości sił tnących (rys. 4.5b)

$$T_{AB} = H_A = P = 2000 \text{ N}$$

$$T_{BC} = V_A = 2P = 2 \cdot 2000 = 4000 \text{ N}$$

$$T_{CD} = 0$$

$$T_{DE} = -V_E = -2P = -2 \cdot 2000 = -4000 \text{ N}$$

Wartości sił osiowych (rys. 4.5c)

$$N_{AB} = -V_A = -2P = -2 \cdot 2000 = -4000 \text{ N}$$

$$N_{BD} = H_A - 3P = P - 3P = -2P = -2 \cdot 2000 = -4000 \text{ N}$$

$$N_{DE} = 0$$

PRZYKŁAD 4.3

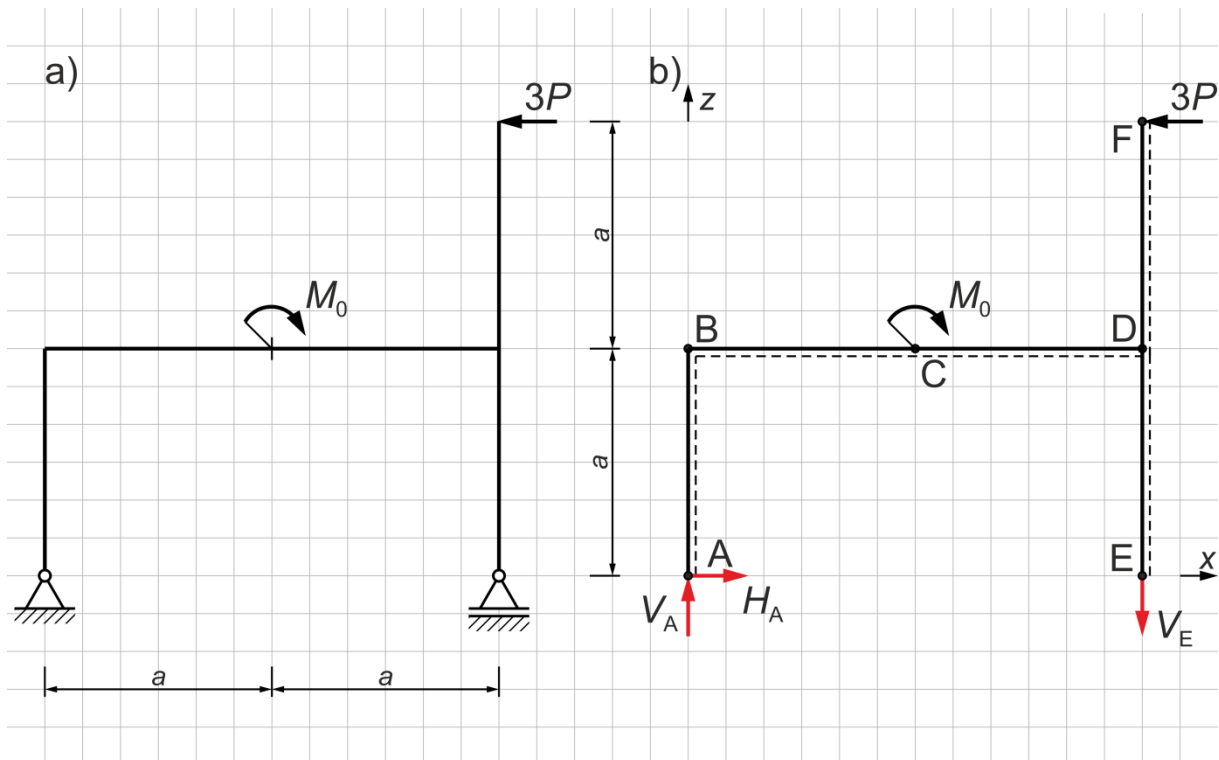
Wyznaczyć wykresy wielkości przekrojowych dla ramy płaskiej przedstawionej na rys. 4.6a.

Dane:

$$a = 0.5 \text{ m}$$

$$P = 1000 \text{ N}$$

$$M_0 = 2Pa = 2 \cdot 1000 \cdot 0.5 = 1000 \text{ N}\cdot\text{m}$$



Rys. 4.6

ROZWIĄZANIE

Schemat statyczny ramy pokazano na rys. 4.6b.

Reakcje

$$\sum P_{ix} = 0: \quad H_A - 3P = 0$$

$$H_A = 3P = 3 \cdot 1000 = 3000 \text{ N}$$

$$\sum M_A = 0: \quad -M_0 - V_E \cdot 2a + 3P \cdot 2a = 0$$

$$-2Pa - V_E \cdot 2a + 6Pa = 0 \quad \rightarrow \quad 4Pa - V_E \cdot 2a = 0$$

$$V_E \cdot 2a = 4Pa \quad | : 2a \quad \rightarrow \quad V_E = 2P = 2 \cdot 1000 = 2000 \text{ N}$$

$$\sum P_{iz} = 0: \quad V_A - V_E = 0$$

$$V_A - 2P = 0 \quad \rightarrow \quad V_A = 2P = 2 \cdot 1000 = 2000 \text{ N}$$

Równanie sprawdzające

$$\sum M_D = 0: \quad H_A \cdot a - V_A \cdot 2a - M_0 + 3P \cdot a = 0$$

$$3P \cdot a - 2P \cdot 2a - 2Pa + 3Pa = 0$$

$$3Pa - 4Pa - 2Pa + 3Pa = 0 \rightarrow 0 = 0$$

Wartości momentów zginających (rys. 4.7a)

$$M_A = 0$$

$$M_B^d = -H_A \cdot a = -3P \cdot a = -3 \cdot 1000 \cdot 0.5 = -1500 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$M_B^p = -H_A \cdot a = -3P \cdot a = -3 \cdot 1000 \cdot 0.5 = -1500 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$M_C^l = V_A \cdot a - H_A \cdot a = 2P \cdot a - 3P \cdot a = -Pa = -1000 \cdot 0.5 = -500 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$M_C^p = V_A \cdot a - H_A \cdot a + M_0 = 2P \cdot a - 3P \cdot a + 2Pa = Pa = 1000 \cdot 0.5 = 500 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$M_D^l = 3P \cdot a = 3 \cdot 1000 \cdot 0.5 = 1500 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$M_D^d = 0$$

$$M_D^g = 3P \cdot a = 3 \cdot 1000 \cdot 0.5 = 1500 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$M_E = 0$$

$$M_F = 0$$

Wartości sił tnących (rys. 4.7b)

$$T_{AB} = -H_A = -3P = -3 \cdot 1000 = -3000 \text{ N}$$

$$T_{BD} = V_A = 2P = 2 \cdot 1000 = 2000 \text{ N}$$

$$T_{DE} = 0$$

$$T_{DF} = -3P = -3 \cdot 1000 = -3000 \text{ N}$$

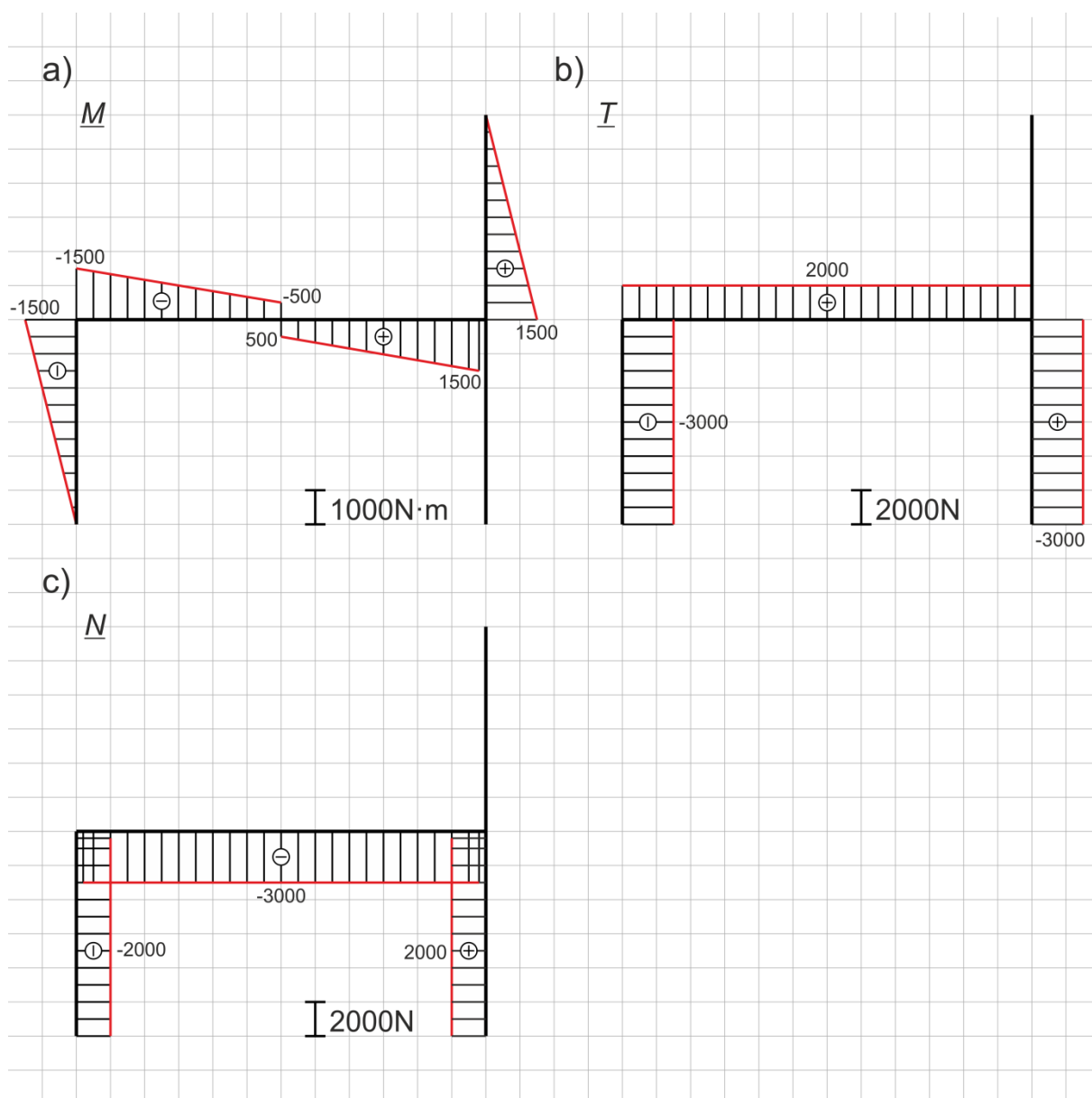
Wartości sił osiowych (rys. 4.7c)

$$N_{AB} = -V_A = -2P = -2 \cdot 1000 = -2000 \text{ N}$$

$$N_{BD} = -H_A = -3P = -3 \cdot 1000 = -3000 \text{ N}$$

$$N_{DE} = V_E = 2P = 2 \cdot 1000 = 2000 \text{ N}$$

$$N_{DF} = 0$$



Rys. 4.7

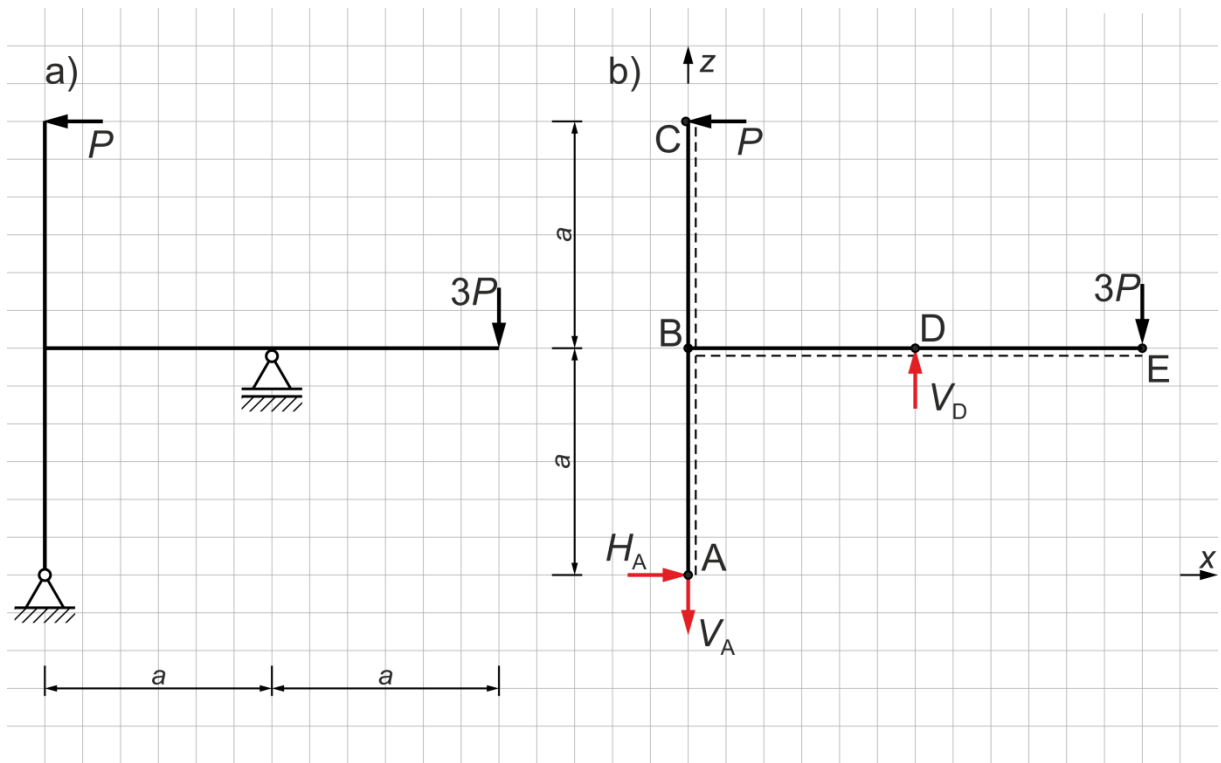
PRZYKŁAD 4.4

Wyznaczyć wykresy wielkości przekrojowych dla ramy płaskiej pokazanej na rys. 4.8a.

Dane:

$$a = 1.0 \text{ m}$$

$$P = 2000 \text{ N}$$



Rys. 4.8

ROZWIĄZANIE

Schemat statyczny ramy pokazano na rys. 4.8b.

Reakcje

$$\sum P_{ix} = 0: \quad H_A - P = 0$$

$$H_A = P = 2000 \text{ N}$$

$$\sum M_A = 0: \quad P \cdot 2a + V_D \cdot a - 3P \cdot 2a = 0$$

$$V_D \cdot a - 4Pa = 0 \quad \rightarrow \quad V_D \cdot a = 4Pa \quad | : a$$

$$V_D = 4P = 4 \cdot 2000 = 8000 \text{ N}$$

$$\sum P_{iz} = 0: \quad -V_A + V_D - 3P = 0$$

$$-V_A + 4P - 3P = 0 \quad \rightarrow \quad -V_A + P = 0$$

$$V_A = P = 2000 \text{ N}$$

Równanie sprawdzające

$$\begin{aligned}\sum M_B = 0: \quad H_A \cdot a + V_D \cdot a - 3P \cdot 2a + P \cdot a &= 0 \\ P \cdot a + 4Pa - 6Pa + Pa &= 0 \quad \rightarrow \quad 0 = 0\end{aligned}$$

Wartości momentów zginających (rys. 4.9a)

$$M_A = 0$$

$$M_B^d = -H_A \cdot a = -P \cdot a = -2000 \cdot 1.0 = -2000 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$M_B^g = P \cdot a = 2000 \cdot 1.0 = 2000 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$M_B^p = V_D \cdot a - 3P \cdot 2a = 4P \cdot a - 6Pa = -2Pa = -2 \cdot 2000 \cdot 1.0 = -4000 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$M_C = 0$$

$$M_D = -3P \cdot a = -3Pa = -3 \cdot 2000 \cdot 1.0 = -6000 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$M_E = 0$$

Wartości sił tnących (rys. 4.9b)

$$T_{AB} = -H_A = -P = -2000 \text{ N}$$

$$T_{BC} = -P = -2000 \text{ N}$$

$$T_{BD} = -V_A = -P = -2000 \text{ N}$$

$$T_{DE} = 3P = 3 \cdot 2000 = 6000 \text{ N}$$

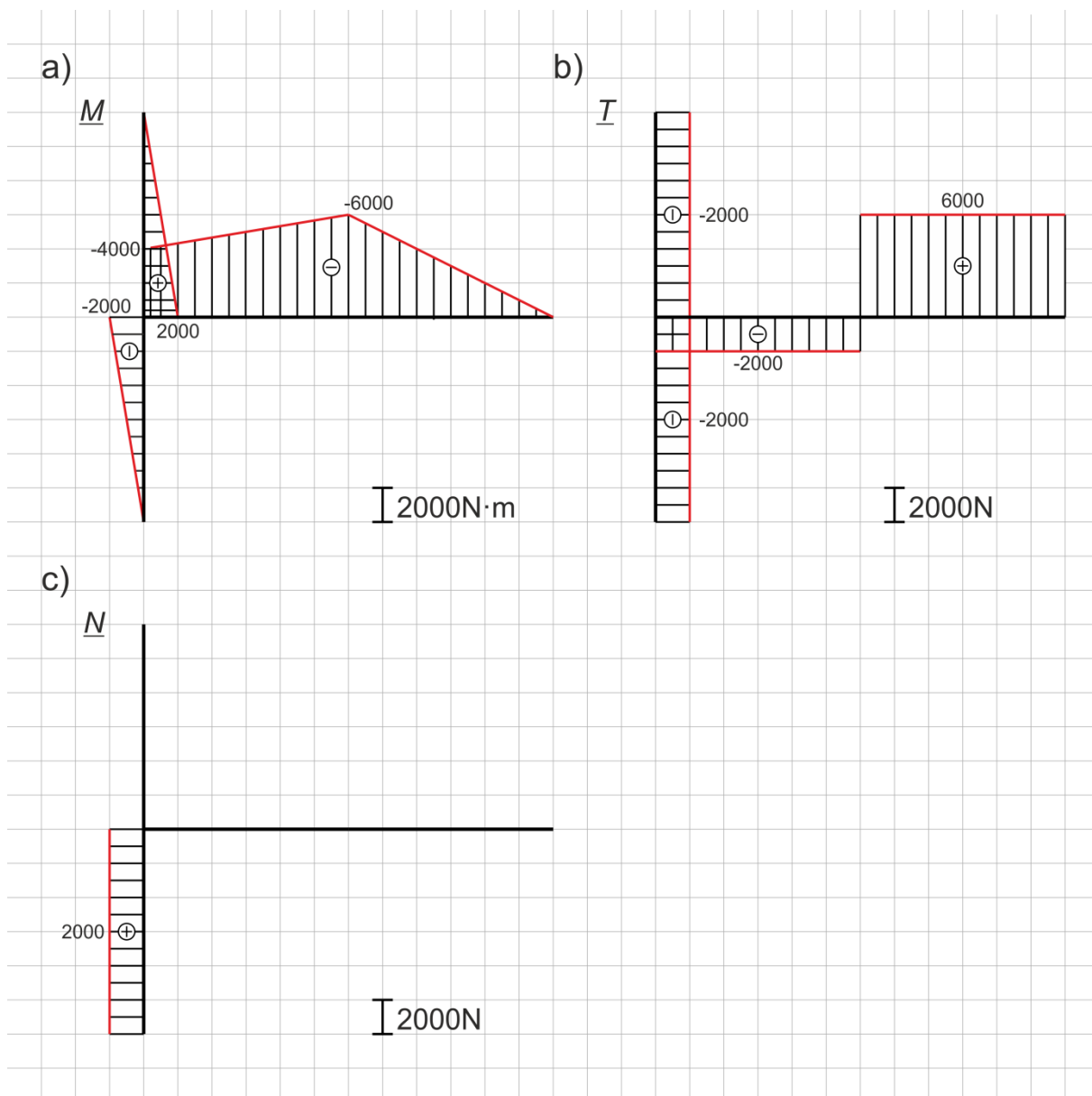
Wartości sił osiowych (rys. 4.9c)

$$N_{AB} = V_A = P = 2000 \text{ N}$$

$$N_{BC} = 0$$

$$N_{BD} = 0$$

$$N_{DE} = 0$$



Rys. 4.9

PRZYKŁAD 4.5

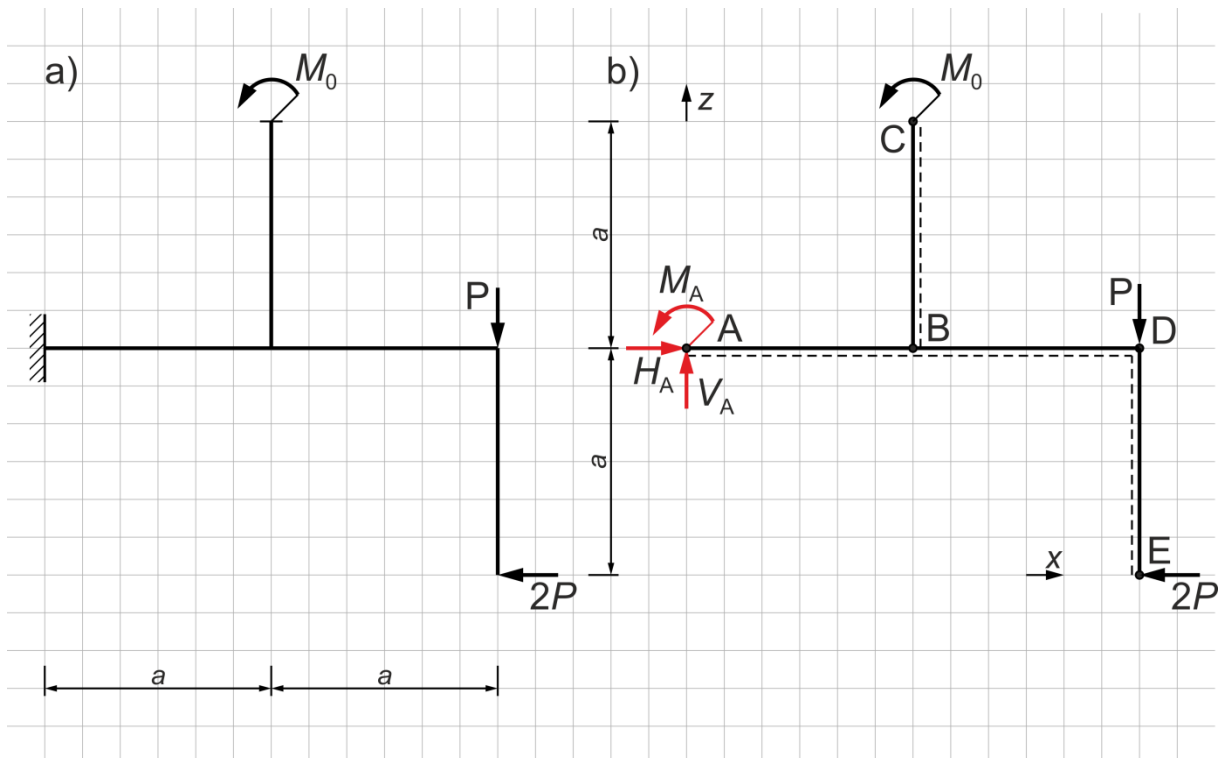
Wyznaczyć wykresy wielkości przekrojowych dla ramy płaskiej pokazanej na rys. 4.10a.

Dane:

$$a = 0.5 \text{ m}$$

$$P = 1000 \text{ N}$$

$$M_0 = 2Pa = 2 \cdot 1000 \cdot 0.5 = 1000 \text{ N}\cdot\text{m}$$



Rys. 4.10

ROZWIĄZANIE

Schemat statyczny ramy pokazano na rys. 4.10b.

Reakcje

$$\sum P_{ix} = 0: \quad H_A - 2P = 0$$

$$H_A = 2P = 2 \cdot 1000 = 2000 \text{ N}$$

$$\sum P_{iz} = 0: \quad V_A - P = 0$$

$$V_A = P = 1000 \text{ N}$$

$$\sum M_A = 0: \quad M_A + M_0 - P \cdot 2a - 2P \cdot a = 0$$

$$M_A + 2Pa - 2Pa - 2Pa = 0 \quad \rightarrow \quad M_A - 2Pa = 0$$

$$M_A = 2Pa = 2 \cdot 1000 \cdot 0.5 = 1000 \text{ N}\cdot\text{m}$$

Równanie sprawdzające

$$\begin{aligned}\sum M_C = 0: \quad M_A - V_A \cdot a + H_A \cdot a + M_0 - P \cdot a - 2P \cdot 2a &= 0 \\ 2Pa - Pa + 2Pa + 2Pa - Pa - 4Pa &= 0 \quad \rightarrow \quad 0 = 0\end{aligned}$$

Wartości momentów zginających (rys. 4.11a)

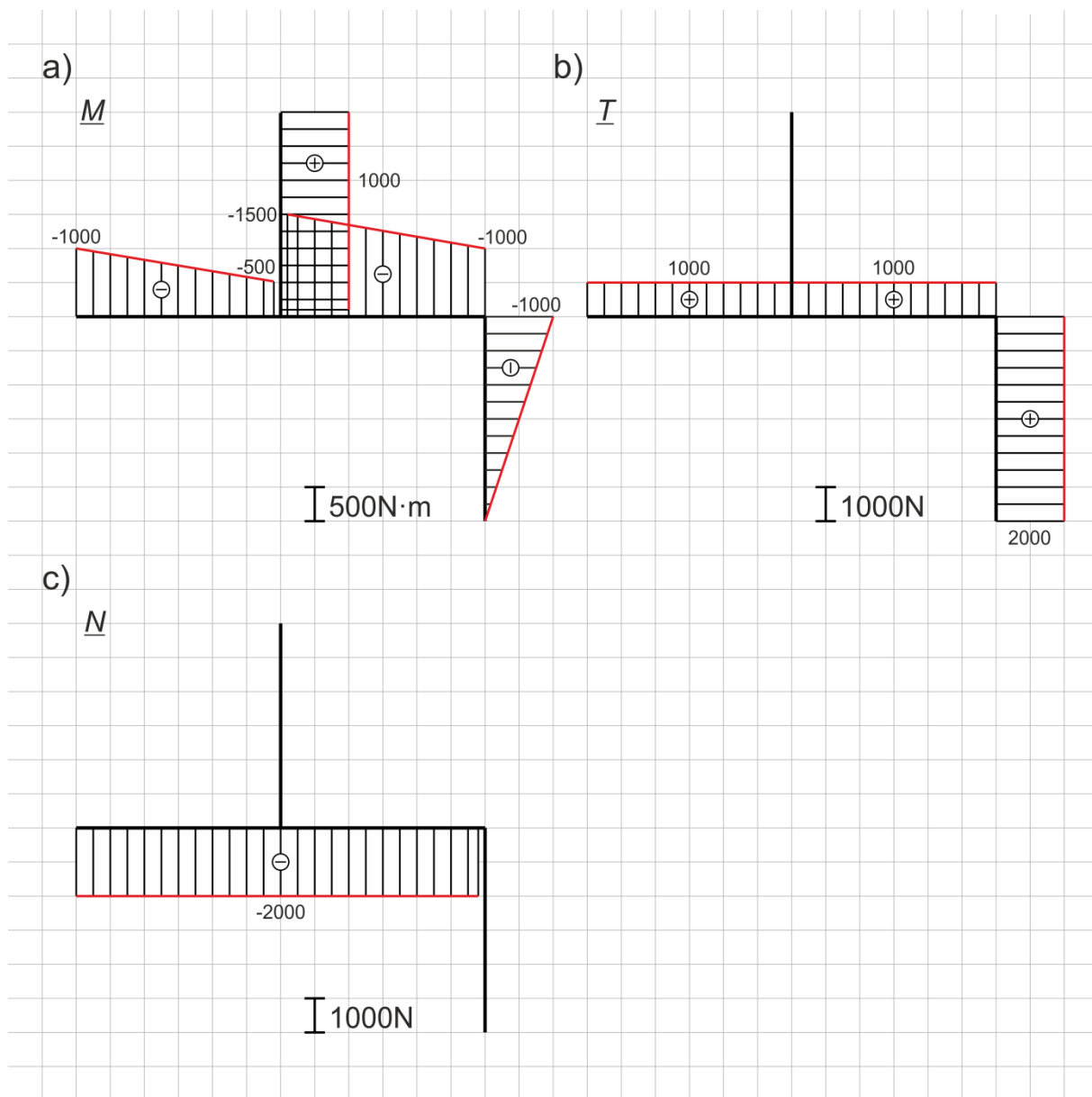
$$\begin{aligned}M_A^l &= 0 \\ M_A^p &= -M_A = -2Pa = -2 \cdot 1000 \cdot 0.5 = -1000 \text{ N}\cdot\text{m} \\ M_B^l &= -M_A + V_A \cdot a = -2Pa + P \cdot a = -Pa = -1000 \cdot 0.5 = -500 \text{ N}\cdot\text{m} \\ M_B^g &= M_0 = 2Pa = 2 \cdot 2000 \cdot 0.5 = 1000 \text{ N}\cdot\text{m} \\ M_B^p &= -P \cdot a - 2P \cdot a = -3Pa = -3 \cdot 1000 \cdot 0.5 = -1500 \text{ N}\cdot\text{m} \\ M_C^d &= M_0 = 2Pa = 2 \cdot 2000 \cdot 0.5 = 1000 \text{ N}\cdot\text{m} \\ M_C^g &= 0 \\ M_D^l &= -2P \cdot a = -2 \cdot 1000 \cdot 0.5 = -1000 \text{ N}\cdot\text{m} \\ M_D^d &= -2P \cdot a = -2 \cdot 1000 \cdot 0.5 = -1000 \text{ N}\cdot\text{m} \\ M_A &= 0\end{aligned}$$

Wartości sił tnących (rys. 4.11b)

$$\begin{aligned}T_{AB} &= V_A = P = 1000 \text{ N} \\ T_{BC} &= 0 \\ T_{BD} &= P = 1000 \text{ N} \\ T_{DE} &= 2P = 2 \cdot 1000 = 2000 \text{ N}\end{aligned}$$

Wartości sił osiowych (rys. 4.11c)

$$\begin{aligned}N_{AB} &= -H_A = -2P = -2 \cdot 1000 = -2000 \text{ N} \\ N_{BC} &= 0 \\ N_{BD} &= -2P = -2 \cdot 1000 = -2000 \text{ N} \\ N_{DE} &= 0\end{aligned}$$



Rys. 4.11

PRZYKŁAD 4.6

Wyznaczyć wykresy wielkości przekrojowych dla ramy płaskiej pokazanej na rys. 4.12a.

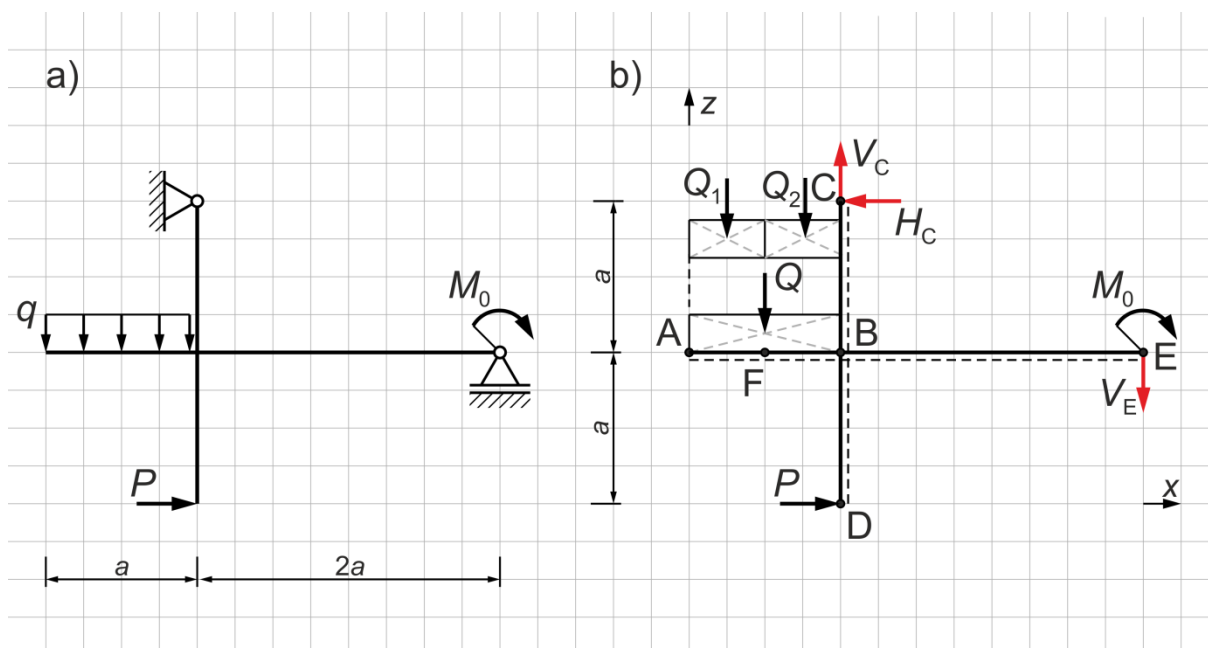
Dane:

$$a = 1.0 \text{ m}$$

$$P = 1000 \text{ N}$$

$$M_0 = Pa = 1000 \cdot 1.0 = 1000 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$q = 2 \frac{P}{a} = 2 \cdot \frac{1000}{1} = 2000 \text{ N/m}$$



Rys. 4.12

ROZWIĄZANIE

Schemat statyczny ramy pokazano na rys. 4.12b.

$$Q = q \cdot a = 2 \frac{P}{a} \cdot a = 2P = 2 \cdot 1000 = 2000 \text{ N}$$

$$Q_1 = Q_2 = q \cdot \frac{a}{2} = 2 \frac{P}{a} \cdot \frac{a}{2} = P = 1000 \text{ N}$$

Reakcje

$$\sum P_{ix} = 0: \quad -H_C + P = 0$$

$$H_C = P = 1000 \text{ N}$$

$$\sum M_C = 0: \quad Q \cdot \frac{a}{2} + P \cdot 2a - M_0 - V_E \cdot 2a = 0$$

$$2P \cdot \frac{a}{2} + 2Pa - Pa - V_E \cdot 2a = 0$$

$$Pa + 2Pa - Pa - V_E \cdot 2a = 0 \quad \rightarrow \quad V_E \cdot 2a = Pa + 2Pa - Pa$$

$$V_E \cdot 2a = 2Pa \quad | : 2a \quad \rightarrow \quad V_E = P = 1000 \text{ N}$$

$$\begin{aligned}\sum P_{iz} = 0: \quad & -Q + V_C - V_E = 0 \\ & -2P + V_C - P = 0 \quad \rightarrow \quad V_C = 2P + P = 3P = 3 \cdot 1000 = 3000 \text{ N}\end{aligned}$$

Równanie sprawdzające

$$\begin{aligned}\sum M_B = 0: \quad & Q \cdot \frac{a}{2} + P \cdot a + H_C \cdot a - V_E \cdot 2a - M_0 = 0 \\ & 2P \cdot \frac{a}{2} + Pa + P \cdot a - P \cdot 2a - Pa = 0 \\ & Pa + Pa + Pa - 2Pa - Pa = 0 \quad \rightarrow \quad 0 = 0\end{aligned}$$

Wartości momentów zginających (rys. 4.13a)

$$M_A = 0$$

$$M_B^l = -Q \cdot \frac{a}{2} = -2P \cdot \frac{a}{2} = -Pa = -1000 \cdot 1.0 = -1000 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$M_B^g = H_C \cdot a = P \cdot a = 1000 \cdot 1.0 = 1000 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$M_B^d = -P \cdot a = -1000 \cdot 1.0 = -1000 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$M_B^p = -M_0 - V_E \cdot 2a = -Pa - P \cdot 2a = -3Pa = -3 \cdot 1000 \cdot 1.0 = -3000 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$M_C = 0$$

$$M_D = 0$$

$$M_E^l = -M_0 = -Pa = -1000 \cdot 1.0 = -1000 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$M_E^p = 0$$

$$M_F = -Q_1 \cdot \frac{a}{4} = -P \cdot \frac{a}{4} = -0.25Pa = -0.25 \cdot 1000 \cdot 1.0 = -250 \text{ N}\cdot\text{m}$$

Wartości sił tnących (rys. 4.13b)

$$T_A = 0$$

$$T_B^l = -Q = -2P = -2 \cdot 1000 = -2000 \text{ N}$$

$$T_{BC} = -H_C = -P = -1000 \text{ N}$$

$$T_{BD} = -P = -1000 \text{ N}$$

$$T_{BE} = V_E = P = 1000 \text{ N}$$

Wartości sił osiowych (rys. 4.13c)

$$N_{AB} = 0$$

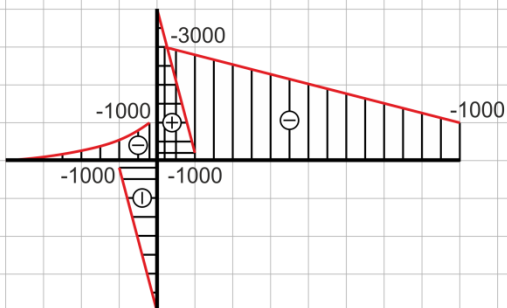
$$N_{BC} = V_C = 3P = 3 \cdot 1000 = 3000 \text{ N}$$

$$N_{BD} = 0$$

$$N_{BE} = 0$$

a)

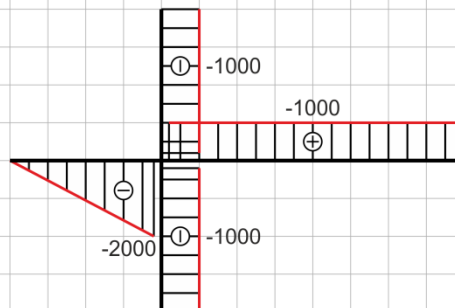
M



$\bar{I} 1000\text{N}\cdot\text{m}$

b)

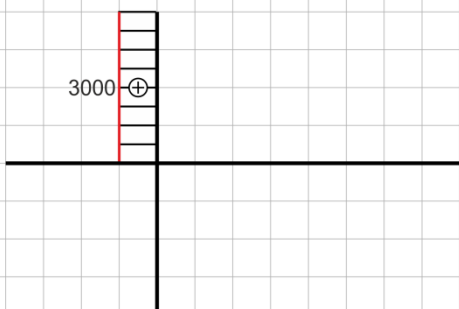
I



$\bar{I} 1000\text{N}$

c)

N



$\bar{I} 3000\text{N}$

Rys. 4.13

5.

ROZCIĄGANIE I ŚCISKANIE PRĘTÓW KRĘPYCH

Rozciąganie i ściskanie prętów krępych należy do prostych przypadków wytrzymałościowych. Pręt jest poddany działaniu siły rozciągającej P przyłożonej wzdłuż osi pręta (rys. 5.1a) i ulega wydłużeniu o ΔL (rys. 5.1b). Działanie siły P powoduje powstanie siły osiowej $N=P$, stałej na całej długości pręta (rys. 5.1c). Pomija się efekt siły skupionej P , zakładając, że siła ta jest rozłożona równomiernie na całej powierzchni przekroju poprzecznego pręta.

W dowolnym przekroju pręta (α) występuje naprężenie normalne σ . W zakresie liniowo-sprężystym materiału pręta, naprężenia normalne σ i odkształcenia wzdłużne (liniowe) ε określone są zależnościami:

$$\sigma = \frac{N}{A} \quad (5.1)$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L} \quad (5.2)$$

gdzie:

A – pole powierzchni przekroju poprzecznego pręta,
 L – długość początkowa pręta.

Wydłużenie/skrócenie pręta, w którym występuje siła osiowa rozciągająca/ściskająca, wynosi:

$$\lambda = \Delta L = \frac{N \cdot L}{E \cdot A} \quad (5.3)$$

gdzie:

E – moduł sprężystości wzdłużnej (moduł Younga) materiału pręta.

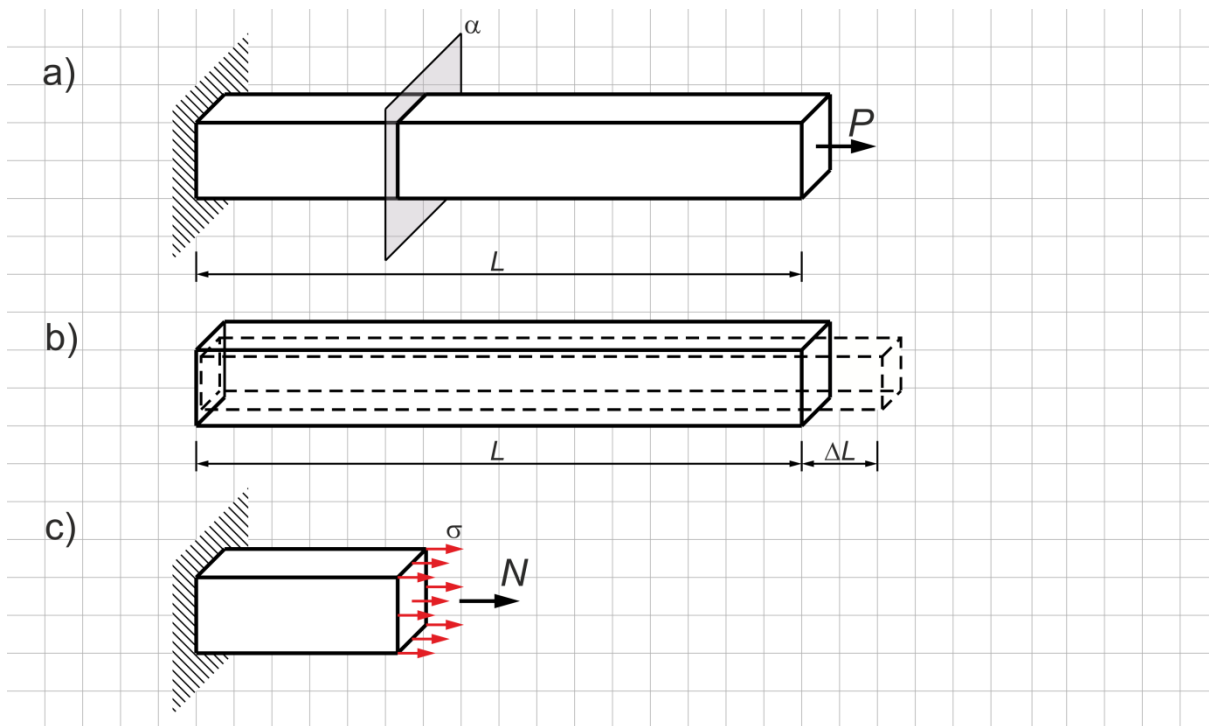
Skrócenie pręta występuje po zmianie zwrotu siły P .

Gdy pręt poddany jest działaniu temperatury (ogrzanie lub schłodzenie w stosunku do temperatury montażu), to wydłużenie pręta wywołane tym działaniem określone jest zależnością:

$$\lambda_t = \alpha \cdot \Delta T \cdot L \quad (5.4)$$

gdzie:

α – współczynnik rozszerzalności cieplnej materiału pręta,
 ΔT – przyrost temperatury (dodatni lub ujemny).



Rys. 5.1

Jeśli pręt jest obciążony układem sił skupionych rozciągających/ściskających, to traktuje się go jako zbiór prętów. Wydłużenia/skrócenia prętów sumują się, a wydłużenie/skrócenie całkowite wynosi:

$$\lambda = \sum_{i=1}^n \frac{N_i \cdot L_i}{E_i \cdot A_i} \quad (5.5)$$

Pręty rozciągane/ściskane projektowane są z warunku nośności (WN) i/lub warunku użytkowości (WU).

W przypadku warunku nośności, należy wyznaczyć wartości naprężeń normalnych w poszczególnych odcinkach pręta i określić największe co do modułu naprężenie, które musi być mniejsze od naprężenia dopuszczalnego przy rozciąganiu/ściskaniu k :

$$\sigma_i = \frac{N_i}{A_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad \rightarrow \quad \sigma = |\sigma_i|_{\max} \quad (5.6)$$

$$\sigma \leq k \quad (5.7)$$

W przypadku warunku użytkowości, należy wyznaczyć przemieszczenia (wydłużenia/skrócenia) w punktach charakterystycznych pręta i określić największe co do modułu przemieszczenie, które musi być mniejsze od przemieszczenia dopuszczalnego f :

$$\lambda_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad \rightarrow \quad \lambda = |\lambda_i|_{\max} \quad (5.8)$$

$$\lambda \leq f \quad (5.9)$$

PRZYKŁAD 5.1

Wyznaczyć średnicę pręta o przekroju kołowym z warunków nośności i użyteczności (rys. 5.2a). Wynik zaokrąglić do liczby całkowitej.

Dane:

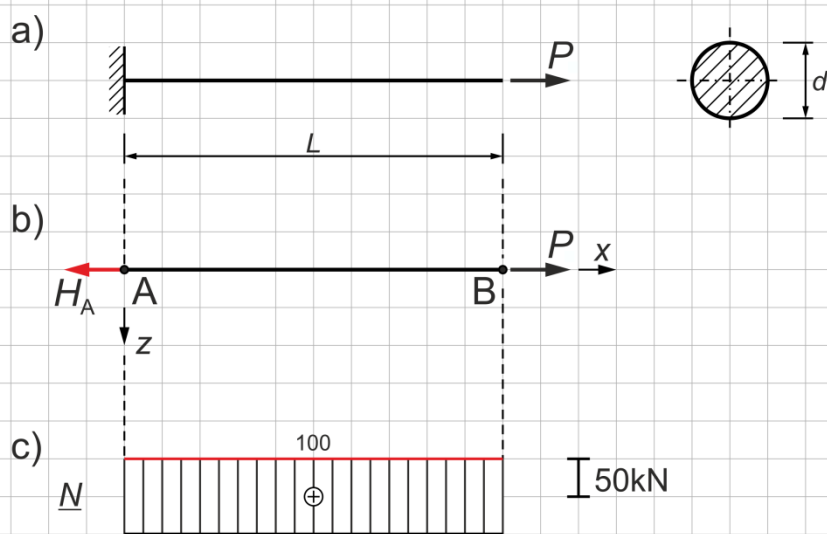
$$P = 100 \text{ kN}$$

$$L = 2 \text{ m}$$

$$E = 210 \text{ GPa}$$

$$k = 150 \text{ MPa}$$

$$f = 2 \text{ mm}$$



Rys. 5.2

ROZWIĄZANIE

Reakcje V_A i M_A są równe zero (rys. 5.2b).

Reakcja pozioma

$$\sum P_{ix} = 0: \quad -H_A + P = 0 \quad \rightarrow \quad H_A = P$$

Siła osiowa (rys. 5.2c)

$$N_{AB} = P = 100 \text{ kN}$$

Pole powierzchni przekroju poprzecznego

$$A = \frac{\pi d^2}{4}$$

Warunek nośności

$$\sigma = |\sigma|_{\max} \leq k \quad \rightarrow \quad \sigma = \frac{N_{AB}}{A} \leq k$$

$$\frac{P}{\frac{\pi d^2}{4}} \leq k \rightarrow \frac{4P}{\pi d^2} \leq k \quad | \cdot \frac{d^2}{k}$$

$$\frac{4P}{\pi k} \leq d^2 \rightarrow d \geq \sqrt{\frac{4P}{\pi k}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 100000}{\pi \cdot 150}} = \sqrt{\frac{400000}{\pi \cdot 150}} \approx 29.1 \text{ mm}$$

Warunek użytkowalności

$$\lambda = |\lambda|_{\max} \leq f \rightarrow \lambda = \frac{N_{AB} \cdot L}{E \cdot A} \leq f$$

$$\frac{P \cdot L}{E \cdot \frac{\pi d^2}{4}} \leq f \rightarrow \frac{4 \cdot P \cdot L}{E \cdot \pi d^2} \leq f \quad | \cdot \frac{d^2}{f}$$

$$\frac{4 \cdot P \cdot L}{E \cdot \pi \cdot f} \leq d^2 \rightarrow d \geq \sqrt{\frac{4PL}{E\pi f}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 100000 \cdot 2000}{210000 \cdot \pi \cdot 2}} \approx 24.6 \text{ mm}$$

Decyduje warunek nośności. Przyjęto pręt o średnicy 30 mm.

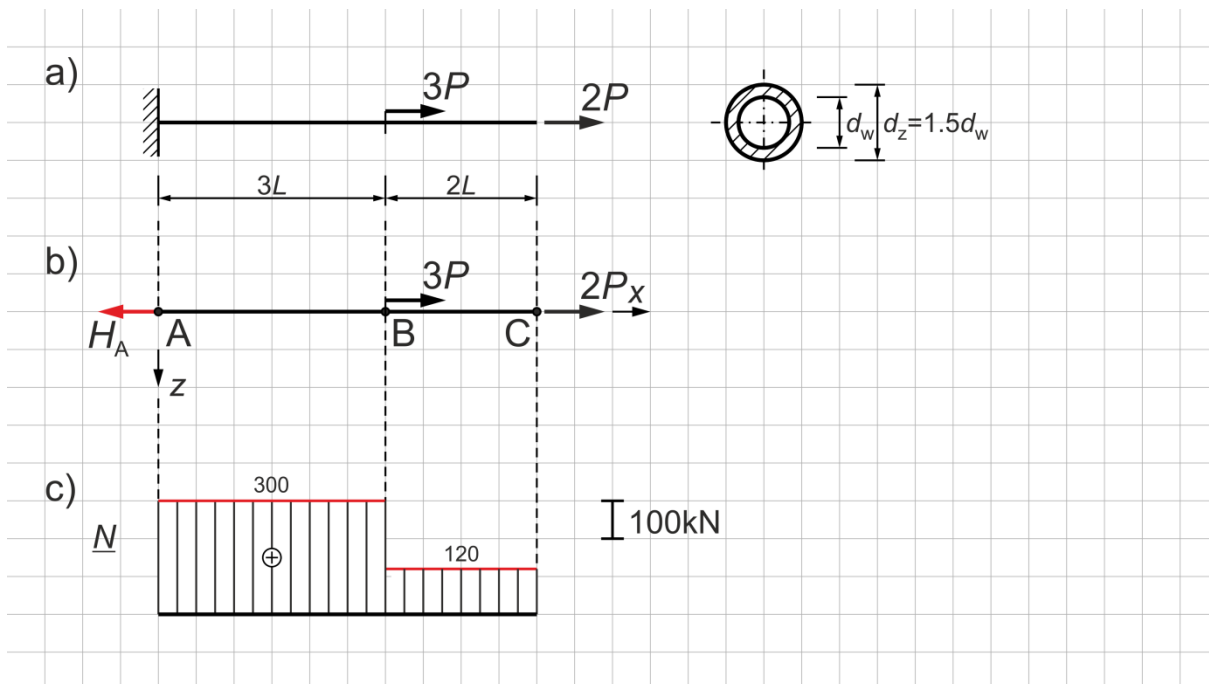
PRZYKŁAD 5.2

Wyznaczyć wymiary pierścieniowego przekroju poprzecznego pręta z warunku nośności (rys. 5.3a). Wymiary [mm] zaokrąglić do liczby całkowitej.

Dane:

$$P = 60 \text{ kN}$$

$$k = 150 \text{ MPa}$$



Rys. 5.3

ROZWIĄZANIE

Schemat statyczny pręta pokazano na rys. 5.3a, a schemat obliczeniowy – na rys. 5.3b.

Reakcja pozioma

$$\sum P_{ix} = 0: \quad -H_A + 3P + 2P = 0 \quad \rightarrow \quad H_A = 3P + 2P = 5P = 5 \cdot 60 = 300 \text{ kN}$$

Wartości siły osiowej (rys. 5.3c)

$$N_{AB} = H_A = 5P = 5 \cdot 60 = 300 \text{ kN}$$

$$N_{BC} = H_A - 3P = 5P - 3P = 2P = 2 \cdot 60 = 120 \text{ kN}$$

Pole powierzchni przekroju poprzecznego

$$A = \frac{\pi(d_z^2 - d_w^2)}{4} = \frac{\pi((1.5d_w)^2 - d_w^2)}{4} = \frac{\pi(2.25d_w^2 - d_w^2)}{4} = \frac{\pi \cdot 1.25d_w^2}{4} = 0.3125\pi d_w^2$$

Ze względu na to, że przekrój poprzeczny jest stały na całej długości pręta, największe naprężenia normalne wystąpią w przekroju, w którym występuje największa siła osiowa.

Warunek nośności

$$\sigma = |\sigma|_{\max} \leq k \quad \rightarrow \quad \sigma = \frac{N_{AB}}{A} \leq k$$

$$\frac{5P}{0.3125\pi d_w^2} \leq k \quad | \cdot \frac{d_w^2}{k}$$

$$\frac{5P}{0.3125\pi k} \leq d_w^2 \quad \rightarrow \quad d_w \geq \sqrt{\frac{5P}{0.3125\pi k}} = \sqrt{\frac{5 \cdot 60000}{0.3125 \cdot \pi \cdot 150}} = \sqrt{\frac{300000}{46.875\pi}} \approx 45.1 \text{ mm}$$

Przyjęto średnicę wewnętrzną $d_w = 46 \text{ mm}$ i średnicę zewnętrzną $d_z = 69 \text{ mm}$.

PRZYKŁAD 5.3

Wyznaczyć wymiary kwadratowego przekroju poprzecznego pręta z warunku użyteczności (rys. 5.4a). Wymiary [mm] zaokrąglić do liczby całkowitej.

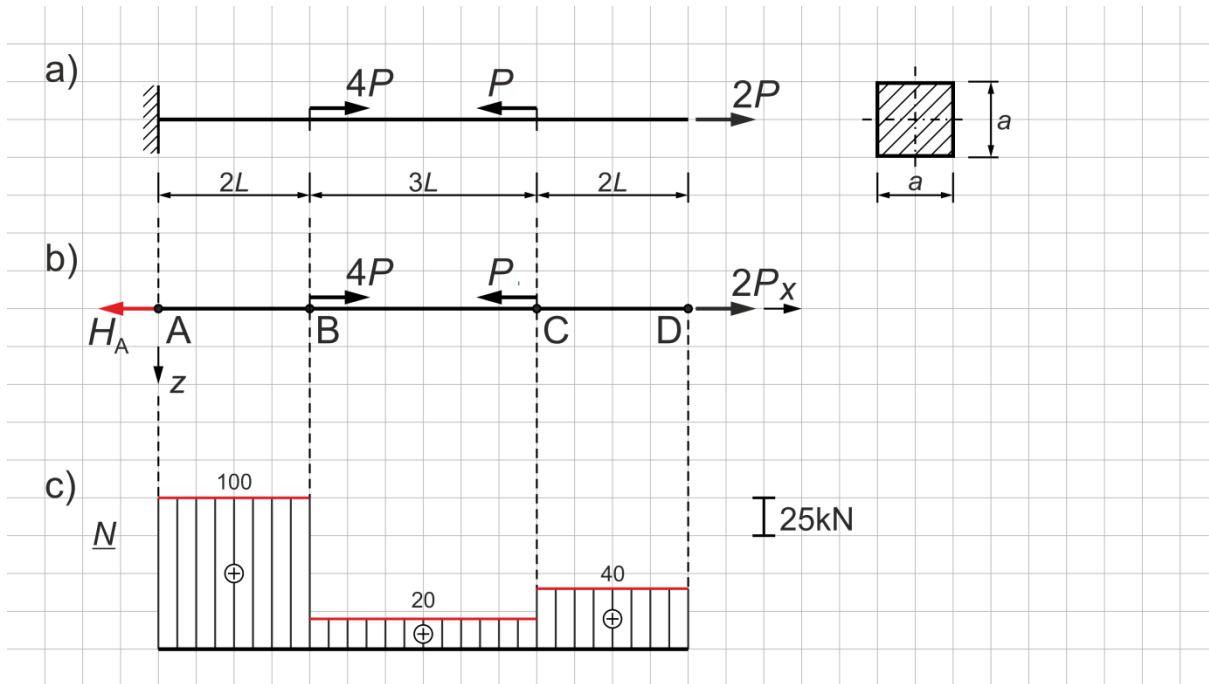
Dane:

$$P = 20 \text{ kN}$$

$$L = 0.5 \text{ m}$$

$$E = 70 \text{ GPa}$$

$$f = 2 \text{ mm}$$



Rys. 5.4

ROZWIĄZANIE

Schemat statyczny pręta pokazano na rys. 5.4a, a schemat obliczeniowy – na rys. 5.4b.

Reakcja pozioma

$$\sum P_{ix} = 0: \quad -H_A + 4P - P + 2P = 0 \quad \rightarrow \quad H_A = 4P - P + 2P = 5P = 5 \cdot 20 = 100 \text{ kN}$$

Wartości siły osiowej (rys. 5.4c)

$$N_{AB} = H_A = 5P = 5 \cdot 20 = 100 \text{ kN}$$

$$N_{BC} = H_A - 4P = 5P - 4P = P = 20 \text{ kN}$$

$$N_{CD} = 2P = 2 \cdot 20 = 40 \text{ kN}$$

Pole powierzchni przekroju poprzecznego

$$A = a^2$$

Przemieszczenia podłużne

$$\lambda_A = 0$$

$$\lambda_B = \lambda_A + \lambda_{AB} = 0 + \frac{N_{AB} \cdot 2L}{EA} = \frac{5P \cdot 2L}{EA} = 10 \frac{PL}{EA}$$

$$\lambda_C = \lambda_B + \lambda_{BC} = 10 \frac{PL}{EA} + \frac{N_{BC} \cdot 3L}{EA} = 10 \frac{PL}{EA} + \frac{P \cdot 3L}{EA} = 13 \frac{PL}{EA}$$

$$\lambda_D = \lambda_C + \lambda_{CD} = 13 \frac{PL}{EA} + \frac{N_{CD} \cdot 2L}{EA} = 13 \frac{PL}{EA} + \frac{2P \cdot 2L}{EA} = 17 \frac{PL}{EA}$$

Największe przemieszczenie podłużne jest w punkcie D.

Warunek użyteczności

$$\lambda = |\lambda|_{\max} \leq f \rightarrow \lambda = \lambda_D = 17 \frac{PL}{EA} \leq f$$

$$17 \frac{PL}{Ea^2} \leq f \quad | \cdot \frac{a^2}{f}$$

$$17 \frac{PL}{Ef} \leq a^2 \rightarrow a \geq \sqrt{\frac{17PL}{Ef}} = \sqrt{\frac{17 \cdot 20000 \cdot 500}{70000 \cdot 2}} \approx 34.9 \text{ mm}$$

Przyjęto pręt o przekroju kwadratowym o boku $a = 35 \text{ mm}$.

PRZYKŁAD 5.4

Wyznaczyć średnice kołowych przekrojów poprzecznych prętów z warunków nośności i użyteczności (rys. 5.5a). Wymiary [mm] zaokrąglić do liczby całkowitej.

Dla wyznaczonych średnic przekrojów poprzecznych prętów sporządzić wykresy naprężeń normalnych σ i wydłużeń λ .

Dane:

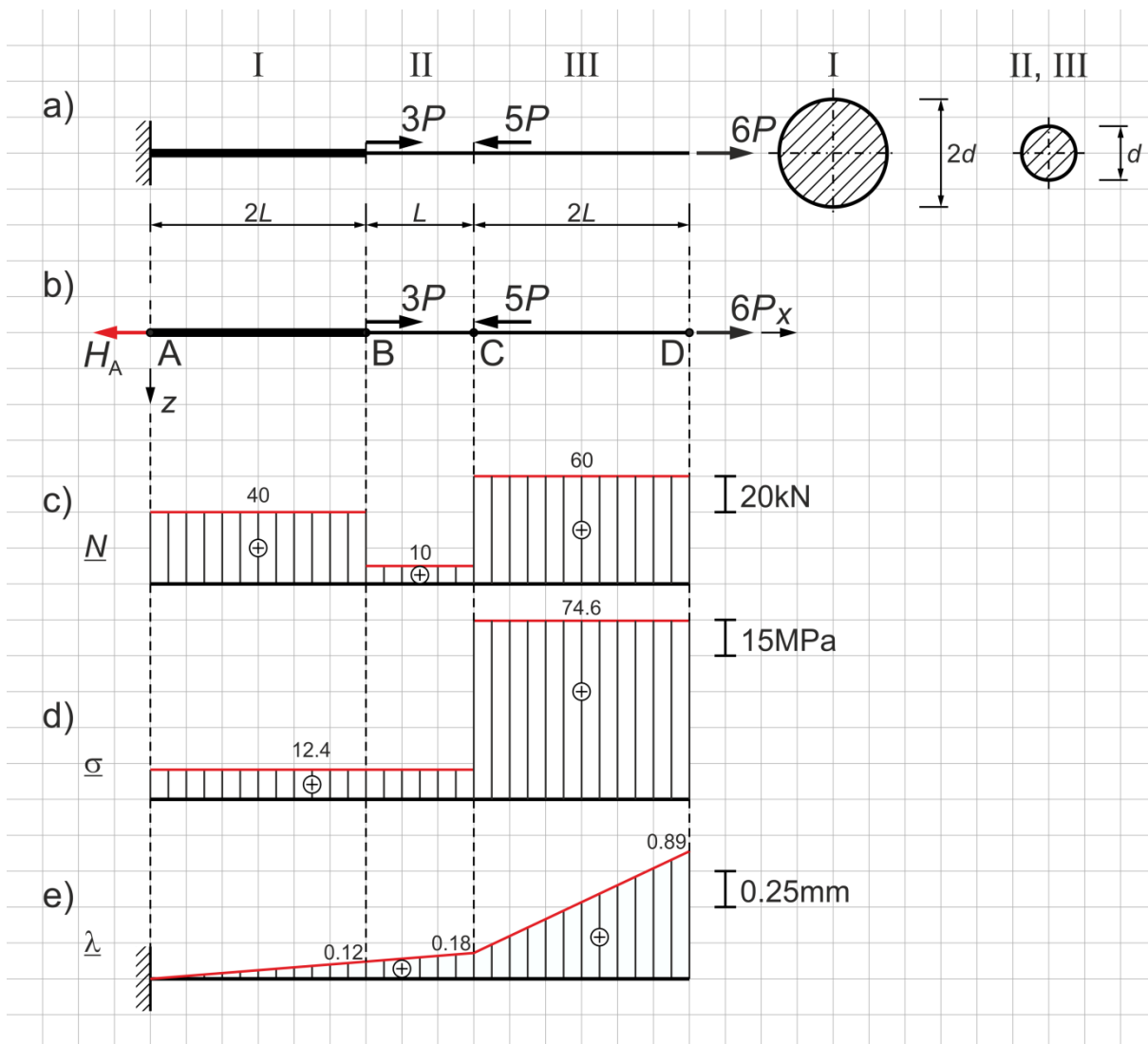
$$P = 10 \text{ kN}$$

$$L = 1 \text{ m}$$

$$E = 210 \text{ GPa}$$

$$k = 180 \text{ MPa}$$

$$f = 1 \text{ mm}$$



Rys. 5.5

ROZWIĄZANIE

Schemat statyczny pręta pokazano na rys. 5.5a, a schemat obliczeniowy – na rys. 5.5b.

Reakcja pozioma

$$\sum P_{ix} = 0:$$

$$-H_A + 3P - 5P + 6P = 0$$

$$H_A = 3P - 5P + 6P = 4P = 4 \cdot 10 = 40 \text{ kN}$$

Siły osiowe w prętach (rys. 5.5c)

$$N_{AB} = H_A = 4P = 4 \cdot 10 = 40 \text{ kN}$$

$$N_{BC} = H_A - 3P = 4P - 3P = P = 10 \text{ kN}$$

$$N_{CD} = 6P = 6 \cdot 10 = 60 \text{ kN}$$

Pola powierzchni przekrojów poprzecznych prętów

$$A_I = \frac{\pi(2d)^2}{4} = \frac{4\pi d^2}{4} = \pi d^2$$

$$A_{II} = A_{III} = \frac{\pi d^2}{4}$$

$$A_{II} = A_{III} = A$$

$$A_I = 4A_{II} = 4A_{III} = 4A$$

Naprężenia normalne w prętach

$$\sigma_{AB} = \frac{N_{AB}}{A_I} = \frac{4P}{4A} = \frac{P}{A}$$

$$\sigma_{BC} = \frac{N_{BC}}{A_{II}} = \frac{P}{A} = \frac{P}{A}$$

$$\sigma_{CD} = \frac{N_{CD}}{A_{II}} = \frac{6P}{A} = 6 \frac{P}{A}$$

Największe naprężenia normalne występują w pręcie CD.

Warunek nośności

$$\sigma = |\sigma|_{\max} = |\sigma_{CD}| \leq k \rightarrow \sigma = \frac{N_{CD}}{A_{II}} = \frac{6P}{A} \leq k$$

$$\frac{6P}{\pi d^2} \leq k \rightarrow \frac{4 \cdot 6P}{\pi d^2} \leq k \quad | \cdot \frac{d^2}{k}$$

$$\frac{24P}{\pi k} \leq d^2 \rightarrow d \geq \sqrt{\frac{24P}{\pi k}} = \sqrt{\frac{24 \cdot 10000}{\pi \cdot 180}} = \sqrt{\frac{240000}{\pi \cdot 180}} \approx 20.6 \text{ mm}$$

Przemieszczenia podłużne

$$\lambda_A = 0$$

$$\lambda_B = \lambda_A + \lambda_{AB} = 0 + \frac{N_{AB} \cdot 2L}{E \cdot A_I} = \frac{4P \cdot 2L}{E \cdot 4A} = 2 \frac{PL}{EA}$$

$$\lambda_C = \lambda_B + \lambda_{BC} = 2 \frac{PL}{EA} + \frac{N_{BC} \cdot L}{E \cdot A_{II}} = 2 \frac{PL}{EA} + \frac{P \cdot L}{E \cdot A} = 3 \frac{PL}{EA}$$

$$\lambda_D = \lambda_C + \lambda_{CD} = 3 \frac{PL}{EA} + \frac{N_{CD} \cdot 2L}{E \cdot A_{II}} = 3 \frac{PL}{EA} + \frac{6P \cdot 2L}{E \cdot A} = 3 \frac{PL}{EA} + \frac{12PL}{EA} = 15 \frac{PL}{EA}$$

Największe przemieszczenie podłużne występuje w punkcie D.

Warunek użytkowalności

$$\lambda = |\lambda|_{\max} \leq f \rightarrow \lambda = \lambda_D = 15 \frac{PL}{EA} \leq f$$

$$15 \frac{PL}{E \frac{\pi d^2}{4}} \leq f \rightarrow \frac{4 \cdot 15PL}{E \pi d^2} \leq f \quad | \cdot \frac{d^2}{f}$$

$$\frac{4 \cdot 15PL}{E \pi f} \leq d^2 \rightarrow d \geq \sqrt{\frac{4 \cdot 15PL}{E \pi f}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 15 \cdot 10000 \cdot 1000}{210000 \cdot \pi \cdot 1}} \approx 30.2 \text{ mm}$$

Decyduje warunek użytkowalności. Przyjęto pręty o średnicach 32 mm i 64 mm.

Wartości naprężeń normalnych (rys. 5.5d)

$$\sigma_{AB} = \frac{P}{A} = \frac{P}{\frac{\pi d^2}{4}} = \frac{4P}{\pi d^2} = \frac{4 \cdot 10000}{\pi \cdot 32^2} = 12.4 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{BC} = \frac{P}{A} = \frac{P}{\frac{\pi d^2}{4}} = \frac{4P}{\pi d^2} = \frac{4 \cdot 10000}{\pi \cdot 32^2} = 12.4 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{CD} = 6 \frac{P}{A} = \frac{6P}{\frac{\pi d^2}{4}} = \frac{4 \cdot 6P}{\pi d^2} = \frac{24P}{\pi d^2} = \frac{24 \cdot 10000}{\pi \cdot 32^2} = 74.6 \text{ MPa}$$

Wartości przemieszczeń podłużnych (rys. 5.5e)

$$\lambda_A = 0$$

$$\lambda_B = 2 \frac{PL}{EA} = \frac{2PL}{\frac{\pi d^2}{4}} = \frac{4 \cdot 2PL}{E \pi d^2} = \frac{4 \cdot 2 \cdot 10000 \cdot 1000}{210000 \cdot \pi \cdot 32^2} = 0.12 \text{ mm}$$

$$\lambda_C = 3 \frac{PL}{EA} = \frac{3PL}{\frac{\pi d^2}{4}} = \frac{4 \cdot 3PL}{E \pi d^2} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 10000 \cdot 1000}{210000 \cdot \pi \cdot 32^2} = 0.18 \text{ mm}$$

$$\lambda_D = 15 \frac{PL}{EA} = \frac{15PL}{\frac{\pi d^2}{4}} = \frac{4 \cdot 15PL}{E \pi d^2} = \frac{4 \cdot 15 \cdot 10000 \cdot 1000}{210000 \cdot \pi \cdot 32^2} = 0.89 \text{ mm}$$

PRZYKŁAD 5.5

Wyznaczyć wykresy siły osiowej N , naprężenia normalnego σ i przemieszczenia podłużnego λ dla pręta o kołowym przekroju poprzecznym, przedstawionego na rys. 5.6.

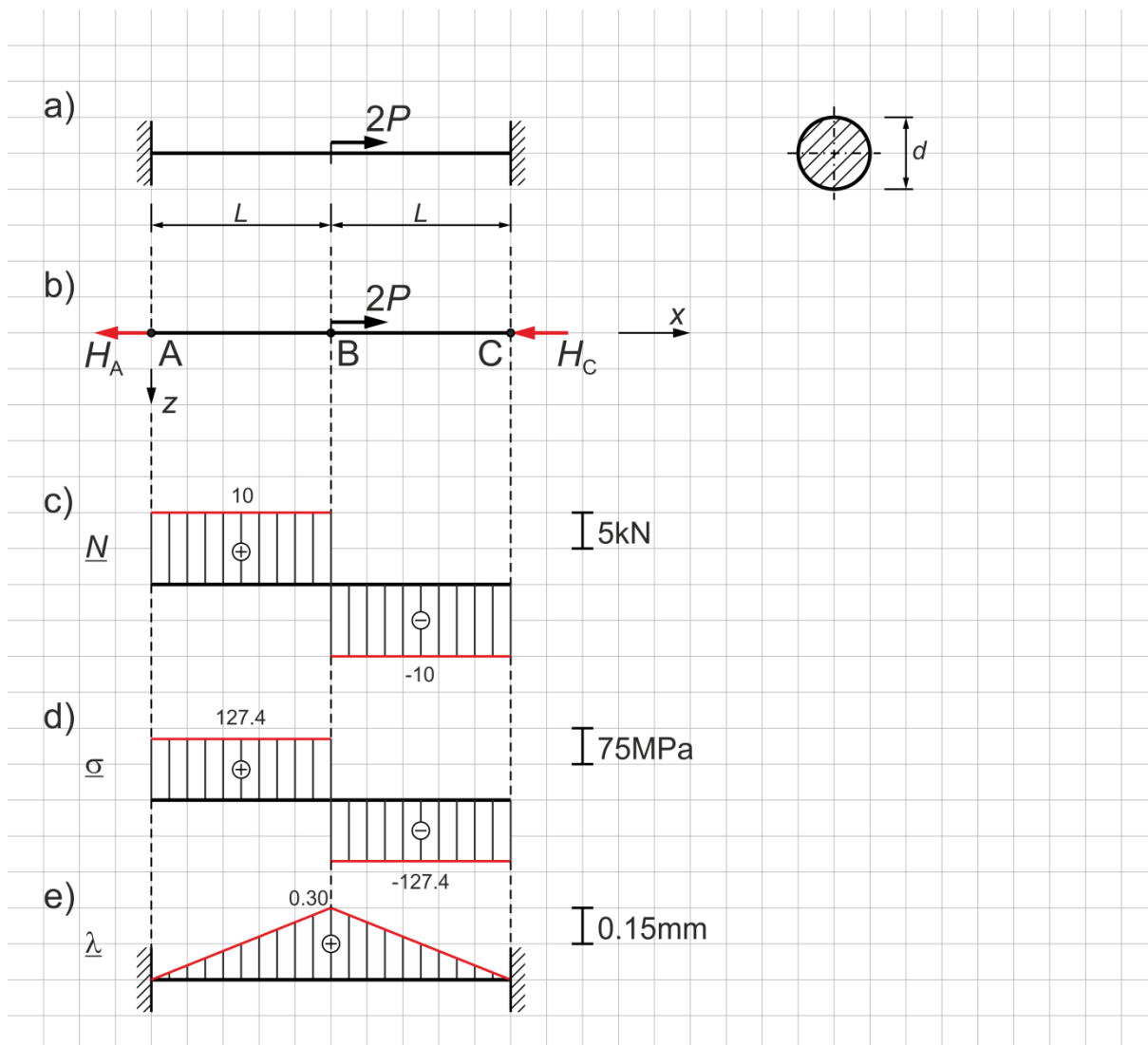
Dane:

$$P = 10 \text{ kN}$$

$$L = 0.5 \text{ m}$$

$$E = 210 \text{ GPa}$$

$$d = 10 \text{ mm}$$



Rys. 5.6

ROZWIĄZANIE

Schemat statyczny pręta pokazano na rys. 5.6a, a schemat obliczeniowy – na rys. 5.6b. Pręt jest jednokrotnie statycznie niewyznaczalny (SN) ze względu na siły podłużne. Należy wprowadzić dodatkowe równanie, będące tzw. warunkiem geometrycznym:

$$1) \sum P_{ix} = 0: -H_A + 2P - H_C = 0 \quad (\text{równanie równowagi statycznej})$$

$$2) \lambda_C = 0 \quad \lambda_{AB} + \lambda_{BC} = 0 \quad (\text{warunek geometryczny})$$

Siły osiowe w pręcie

$$N_{AB} = 2P - H_C$$

$$N_{BC} = -H_C$$

Pole powierzchni przekroju poprzecznego pręta

$$A = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi \cdot 10^2}{4} = \frac{\pi \cdot 100}{4} = 78.5 \text{ mm}^2$$

z równania 2)

$$\lambda_{AB} + \lambda_{BC} = 0 \rightarrow \frac{N_{AB} \cdot L}{E \cdot A} + \frac{N_{BC} \cdot L}{E \cdot A} = 0$$

$$\frac{(2P - H_C) \cdot L}{E \cdot A} + \frac{(-H_C) \cdot L}{E \cdot A} = 0 \quad | \cdot \frac{E \cdot A}{L}$$

$$2P - H_C - H_C = 0 \rightarrow 2P - 2H_C = 0$$

$$2H_C = 2P \rightarrow H_C = P = 10 \text{ kN}$$

z równania 1)

$$H_A = 2P - H_C = 2P - P = P = 10 \text{ kN}$$

Wartości siły osiowej (rys. 5.6c)

$$N_{AB} = 2P - H_C = 2P - P = P = 10 \text{ kN}$$

$$N_{BC} = -H_C = -P = -10 \text{ kN}$$

Wartości naprężenia normalnego (rys. 5.6d)

$$\sigma_{AB} = \frac{N_{AB}}{A} = \frac{P}{A} = \frac{10000}{78.5} = 127.4 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{BC} = \frac{N_{BC}}{A} = -\frac{P}{A} = -\frac{10000}{78.5} = -127.4 \text{ MPa}$$

Wartości przemieszczenia wzdłużnego (rys. 5.6e)

$$\lambda_A = 0$$

$$\lambda_B = \lambda_A + \lambda_{AB} = 0 + \frac{N_{AB} \cdot L}{E \cdot A} = \frac{PL}{E \cdot A} = \frac{10000 \cdot 500}{210000 \cdot 78.5} = 0.30 \text{ mm}$$

$$\lambda_C = 0$$

PRZYKŁAD 5.6

Wyznaczyć wykresy siły osiowej N , naprężenia normalnego σ i przemieszczenia podłużnego λ dla pręta o kwadratowym przekroju poprzecznym, przedstawionego na rys. 5.7.

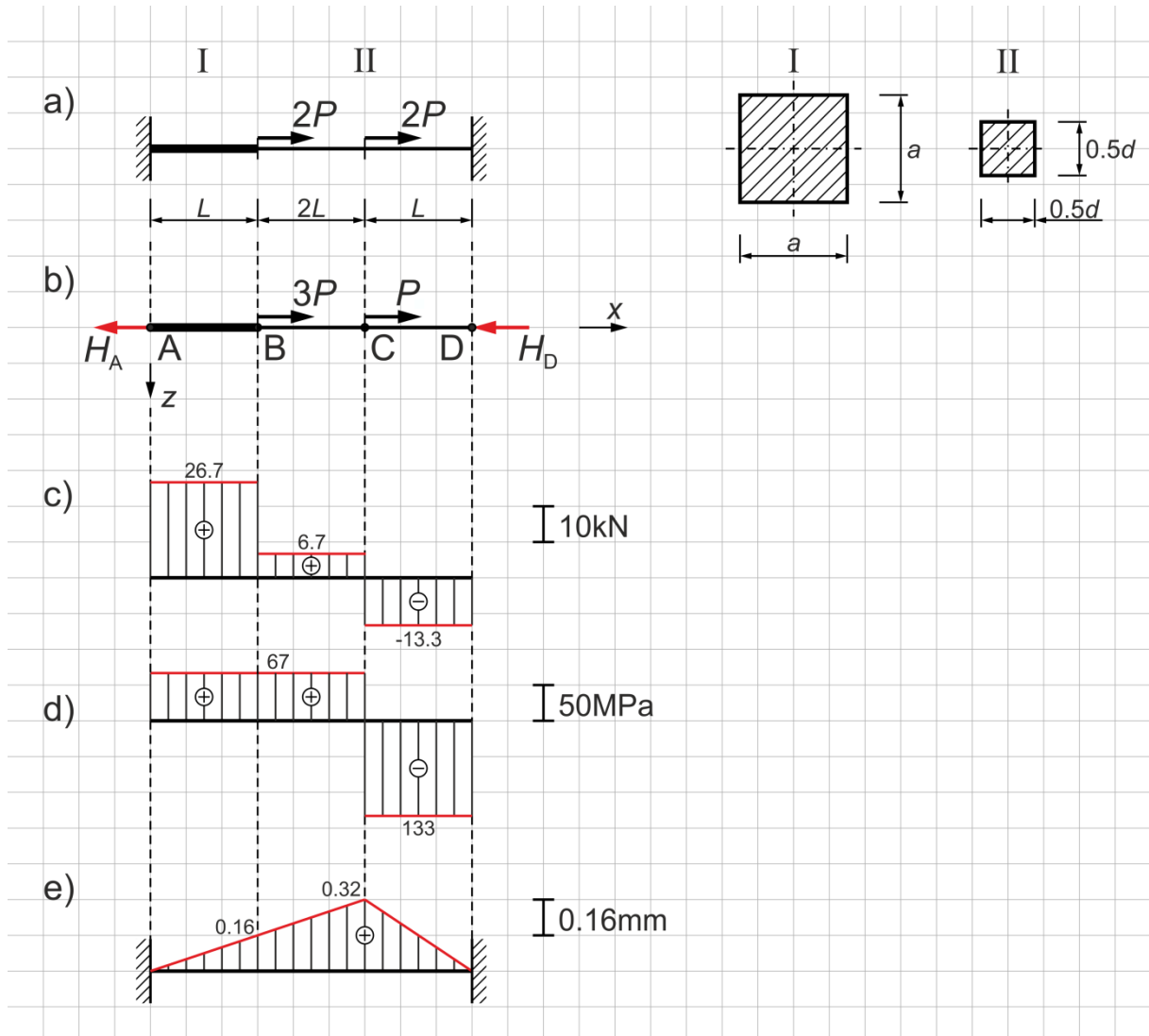
Dane:

$$P = 10 \text{ kN}$$

$$L = 0.5 \text{ m}$$

$$E = 210 \text{ GPa}$$

$$a = 20 \text{ mm}$$



Rys. 5.7

ROZWIĄZANIE

Schemat statyczny pręta pokazano na rys. 5.7a, a schemat obliczeniowy – na rys. 5.7b. Pręt jest jednokrotnie statycznie niewyznaczalny (SN) ze względu na siły podłużne. Należy wprowadzić dodatkowe równanie, będące tzw. warunkiem geometrycznym:

$$1) \sum P_{ix} = 0: -H_A + 2P + 2P - H_D = 0 \quad (\text{równanie równowagi statycznej})$$

$$2) \lambda_D = 0 \quad \lambda_{AB} + \lambda_{BC} + \lambda_{CD} = 0 \quad (\text{warunek geometryczny})$$

Siły osiowe w prętach

$$N_{AB} = 2P + 2P - H_D = 4P - H_D$$

$$N_{BC} = 2P - H_D$$

$$N_{CD} = -H_D$$

Pola powierzchni przekrojów poprzecznych prętów

$$A_I = a^2 = 20^2 = 400 \text{ mm}^2$$

$$A_{II} = (0.5a)^2 = 0.25a^2 = 0.25 \cdot 20^2 = 100 \text{ mm}^2$$

$$A_{II} = A$$

$$A_I = 4A_{II} = 4A$$

z równania 2)

$$\lambda_{AB} + \lambda_{BC} + \lambda_{CD} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{N_{AB} \cdot L}{E \cdot A_I} + \frac{N_{BC} \cdot L}{E \cdot A_{II}} + \frac{N_{CD} \cdot L}{E \cdot A_{II}} = 0$$

$$\frac{(4P - H_D) \cdot L}{E \cdot 4A} + \frac{(2P - H_D) \cdot L}{E \cdot A} + \frac{(-H_D) \cdot L}{E \cdot A} = 0 \quad | \cdot \frac{E \cdot A}{L}$$

$$P - 0.25H_D + 2P - H_D - H_D = 0 \quad \rightarrow \quad 3P - 2.25H_D = 0$$

$$2.25H_D = 3P \quad \rightarrow \quad H_D = 1.33P = 1.33 \cdot 10 = 13.3 \text{ kN}$$

z równania 1)

$$H_A = 2P + 2P - H_D = 4P - H_D = 4P - 1.33P = 2.67P = 2.67 \cdot 10 = 26.7 \text{ kN}$$

Wartości siły osiowej (rys. 5.7c)

$$N_{AB} = 4P - H_D = 4P - 1.33P = 2.67P = 2.67 \cdot 10 = 26.7 \text{ kN}$$

$$N_{BC} = 2P - H_D = 2P - 1.33P = 0.67P = 0.67 \cdot 10 = 6.7 \text{ kN}$$

$$N_{CD} = -H_D = -1.33P = -1.33 \cdot 10 = -13.3 \text{ kN}$$

Wartości naprężenia normalnego (rys. 5.7d)

$$\sigma_{AB} = \frac{N_{AB}}{A_I} = \frac{2.67P}{A_I} = \frac{2.67 \cdot 10000}{400} = 67 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{BC} = \frac{N_{BC}}{A_{II}} = \frac{0.67P}{A_{II}} = \frac{0.67 \cdot 10000}{100} = 67 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{CD} = \frac{N_{CD}}{A_{II}} = -\frac{1.33P}{A_{II}} = -\frac{1.33 \cdot 10000}{100} = -133 \text{ MPa}$$

Wartości przemieszczenia podłużnego (rys. 5.7e)

$$\lambda_A = 0$$

$$\lambda_B = \lambda_A + \lambda_{AB} = 0 + \frac{N_{AB} \cdot L}{E \cdot A_I} = \frac{3.08PL}{E \cdot A_I} = \frac{2.67 \cdot 10000 \cdot 500}{210000 \cdot 400} = 0.16 \text{ mm}$$

$$\begin{aligned} \lambda_C &= \lambda_B + \lambda_{BC} = \frac{2.67PL}{E \cdot A_I} + \frac{N_{BC} \cdot L}{E \cdot A_{II}} = \frac{2.67PL}{E \cdot A_I} + \frac{0.67P \cdot L}{E \cdot A_{II}} = \\ &= \frac{2.67 \cdot 10000 \cdot 500}{210000 \cdot 400} + \frac{0.67 \cdot 10000 \cdot 500}{210000 \cdot 100} = 0.16 + 0.16 = 0.32 \text{ mm} \end{aligned}$$

$$\lambda_D = 0$$

PRZYKŁAD 5.7

Masę m zawieszono na dwóch jednakowych prętach o średnicy d , połączonych przegubowo (rys. 5.8a). Wyznaczyć naprężenia powstałe w prętach oraz obniżenie punktu C (przemieszczenie pionowe) po zawieszeniu masy m . Przyjąć założenie małych przemieszczeń.

Dane:

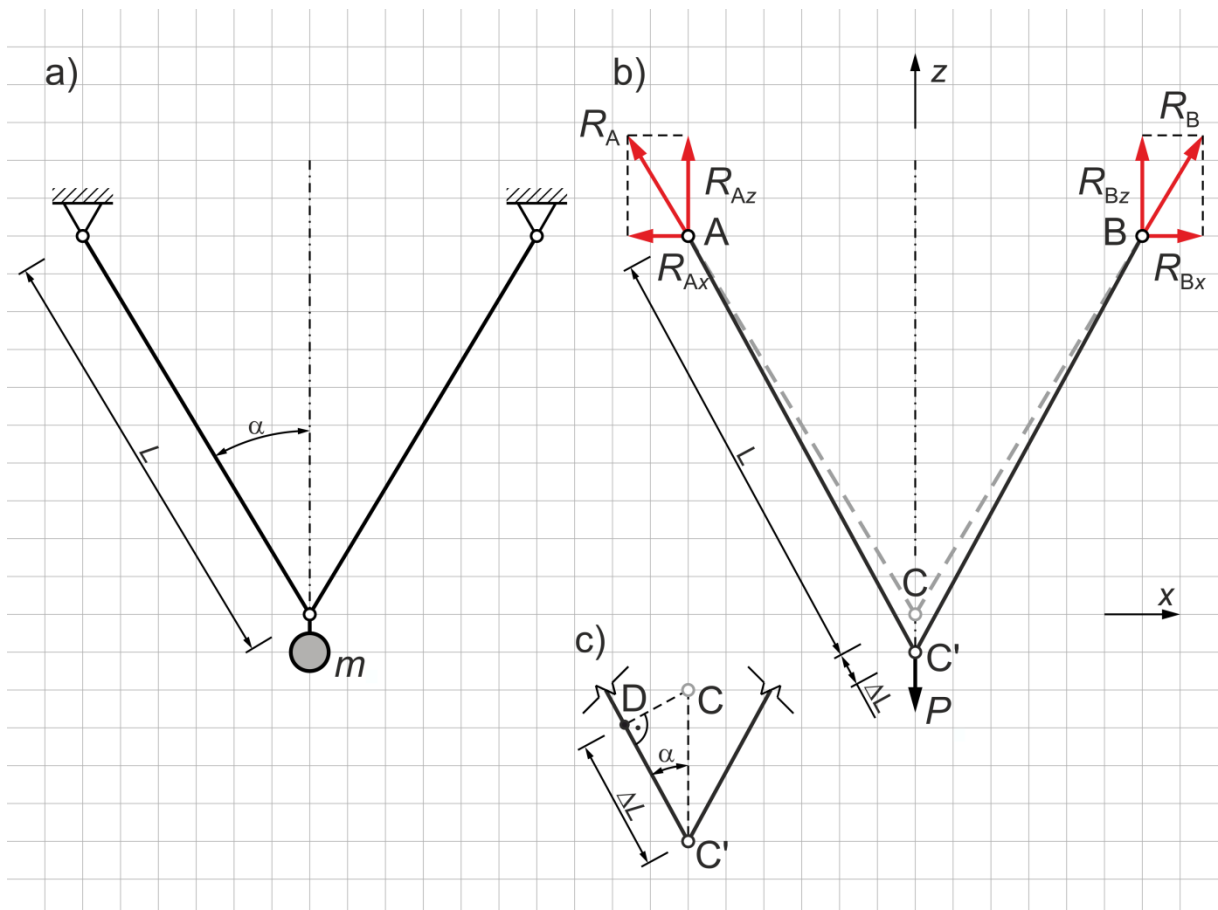
$$m = 5 \text{ ton}$$

$$L = 1.0 \text{ m}$$

$$\alpha = 30^\circ$$

$$d = 20 \text{ mm}$$

$$E = 210 \text{ GPa}$$



Rys. 5.8

ROZWIĄZANIE

Obciążenie układu

$$P = m \cdot g = 5000 \cdot 9.81 = 49050 \text{ N}$$

Reakcje na podporach

$$1) \quad \sum P_{ix} = 0: \quad -R_{Ax} + R_{Bx} = 0 \quad \rightarrow \quad -R_A \sin \alpha + R_B \sin \alpha = 0$$

$$2) \quad \sum P_{iz} = 0: \quad R_{Az} + R_{Bz} - P = 0 \quad \rightarrow \quad R_A \cos \alpha + R_B \cos \alpha - P = 0$$

z równania 1)

$$R_A \sin \alpha = R_B \sin \alpha \quad \rightarrow \quad R_A = R_B$$

z równania 2)

$$R_A \cos \alpha + R_B \cos \alpha - P = 0 \quad \rightarrow \quad R_A \cos \alpha + R_A \cos \alpha - P = 0 \quad \rightarrow \quad 2R_A \cos \alpha - P = 0$$

$$2R_A \cos \alpha = P \quad \rightarrow \quad R_A = \frac{P}{2 \cdot \cos \alpha} = \frac{49050}{2 \cdot \cos 30^\circ} = \frac{49050}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{49050}{\sqrt{3}} = 28319 \text{ N}$$

$$R = R_A = R_B = 28319 \text{ N}$$

Pole powierzchni przekroju poprzecznego prętów

$$A = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi \cdot 20^2}{4} = \frac{\pi \cdot 400}{4} = 314.2 \text{ mm}^2$$

Naprężenia w prętach

$$\sigma_A = \sigma_B = \frac{R}{A} = \frac{28319}{314.2} = 90.1 \text{ MPa}$$

Wydłużenia prętów można wyznaczyć z zależności (5.3):

$$\Delta L = \frac{R \cdot L}{E \cdot A}$$

Przy założeniu małych przemieszczeń, łuk CD można traktować jako odcinek prosty, prostopadły do odcinka AC'. Jednocześnie zakłada się małą zmianę kąta α .

$$\begin{aligned} CC' &= \frac{\Delta L}{\cos \alpha} = \frac{\frac{R \cdot L}{E \cdot A}}{\cos \alpha} = \frac{R \cdot L}{E \cdot A \cos \alpha} = \frac{R \cdot L}{E \cdot \frac{\pi d^2}{4} \cos \alpha} = \frac{4 \cdot R \cdot L}{E \cdot \pi d^2 \cos \alpha} = \frac{4 \cdot 28319 \cdot 1000}{210000 \cdot \pi \cdot 20^2 \cdot \cos 30^\circ} = \\ &= \frac{4 \cdot 28319 \cdot 1000}{210000 \cdot \pi \cdot 20^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{113276000}{228538719.9} = 0.5 \text{ mm} \end{aligned}$$

PRZYKŁAD 5.8

Pręt o długości $2L$ i kołowym przekroju poprzecznym o średnicy d umieszczony jest pomiędzy dwiema sztywnymi płytami i obciążony siłą P (rys. 5.9). Lewy koniec pręta jest utwierdzony. Pomiedzy prawym końcem pręta a sztywną płytą występuje szczelina δ . Wyznaczyć reakcje wywierane przez pręt na sztywne podpory.

Dane:

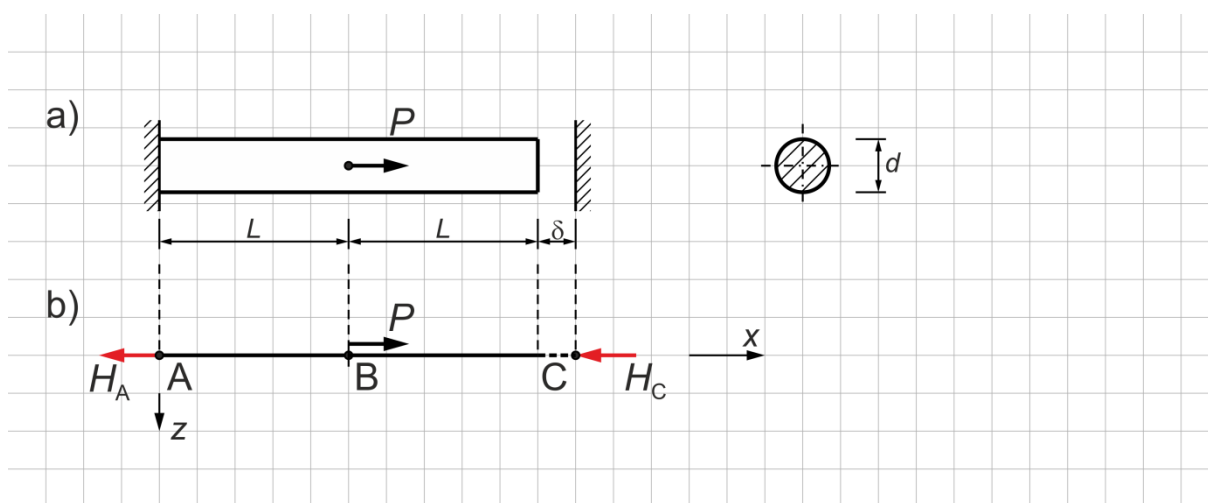
$$P = 40 \text{ kN}$$

$$L = 1.0 \text{ m}$$

$$\delta = 1.0 \text{ mm}$$

$$d = 20 \text{ mm}$$

$$E = 210 \text{ GPa}$$



Rys. 5.9

ROZWIĄZANIE

Luz δ zostanie zamknięty, gdy siła P osiągnie wartość (wzór 5.3):

$$P = P_1 = \frac{\delta \cdot E \cdot A}{L}$$

Gdy wartość siły P będzie większa od P_1 , pojawi się reakcja na obydwu podporach. Dla takiego układu:

$$1) \sum P_{ix} = 0: -H_A + P - H_C = 0 \rightarrow H_C = P - H_A$$

Pole powierzchni przekroju poprzecznego pręta

$$A = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi \cdot 20^2}{4} = \frac{\pi \cdot 400}{4} = 314.2 \text{ mm}^2$$

Siły osiowe w pręcie

$$N_{AB} = H_A$$

$$N_{BC} = H_A - P$$

Przemieszczenia podłużne punktów pręta

$$\lambda_A = 0$$

$$\lambda_B = \lambda_A + \lambda_{AB} = 0 + \frac{N_{AB} \cdot L}{E \cdot A} = \frac{H_A \cdot L}{E \cdot A}$$

$$\lambda_C = \lambda_B + \lambda_{BC} = \frac{H_A \cdot L}{E \cdot A} + \frac{N_{BC} \cdot L}{E \cdot A} = \frac{H_A \cdot L}{E \cdot A} + \frac{(H_A - P) \cdot L}{E \cdot A}$$

Całkowite (możliwe) wydłużenie pręta (przemieszczenie punktu C) jest równe luzowi δ :

$$\frac{H_A \cdot L}{E \cdot A} + \frac{(H_A - P) \cdot L}{E \cdot A} = \delta \quad | \cdot \frac{E \cdot A}{L}$$

$$H_A + H_A - P = \frac{\delta \cdot E \cdot A}{L} \rightarrow 2H_A = \frac{\delta \cdot E \cdot A}{L} + P \quad | : 2$$

$$H_A = \frac{\delta \cdot E \cdot A}{2L} + \frac{P}{2} = \frac{1 \cdot 210000 \cdot 314.2}{2 \cdot 1000} + \frac{40000}{2} = 52991 \text{ N}$$

Po podstawieniu do równania 1), otrzymuje się:

$$H_C = P - H_A = 40000 - 52991 = -12991 \text{ N}$$

PRZYKŁAD 5.9

Sztywny pręt poziomy zawieszono na dwóch podatnych prętach (rys. 5.10a). Wyznaczyć wydłużenia/skrócenia podatnych prętów, powstałe w nich naprężenia oraz maksymalne przemieszczenie pionowe w sztywnego pręta.

Dokładność rozwiązania:

- wydłużenia/skrócenia podatnych prętów do dwóch miejsc po przecinku,
- naprężenia w podatnych prętach do jednego miejsca po przecinku.

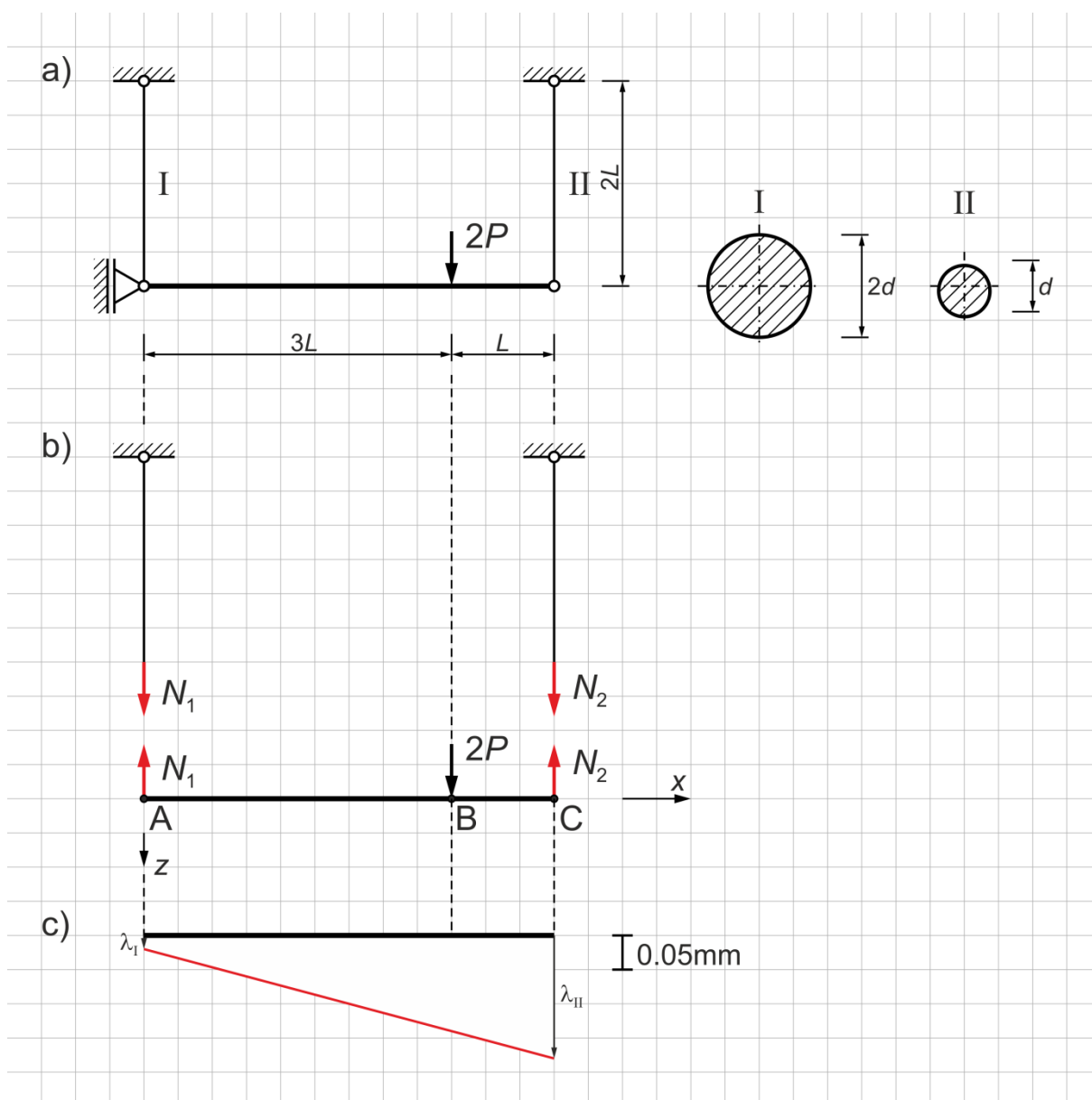
Dane:

$$P = 5 \text{ kN}$$

$$E = 210 \text{ GPa}$$

$$L = 0.5 \text{ m}$$

$$d = 16 \text{ mm}$$



Rys. 5.10

ROZWIĄZANIE*Siły osiowe w podatnych prętach*

$$1) \quad \sum P_{iz} = 0: \quad -N_1 + 2P - N_2 = 0$$

$$2) \quad \sum M_A = 0: \quad -2P \cdot 3L + N_2 \cdot 4L = 0 \quad \rightarrow \quad -6PL + 4N_2 \cdot L = 0 \quad | :L$$

$$4N_2 = 6P \quad \rightarrow \quad N_2 = \frac{6}{4}P = \frac{3}{2}P = 1.5P = 1.5 \cdot 5 = 7.5 \text{ kN}$$

Po podstawieniu do równania 1), otrzymuje się:

$$-N_1 + 2P - 1.5P = 0 \quad \rightarrow \quad -N_1 + 0.5P = 0 \quad \rightarrow \quad N_1 = 0.5P = 0.5 \cdot 5 = 2.5 \text{ kN}$$

Pola powierzchni przekrojów poprzecznych prętów

$$A_I = \frac{\pi(2d)^2}{4} = \frac{\pi \cdot 4 \cdot d^2}{4} = \pi \cdot d^2 = \pi \cdot 16^2 = 804.2 \text{ mm}^2$$

$$A_{II} = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi \cdot 16^2}{4} = 201.1 \text{ mm}^2$$

Wydłużenia prętów

$$\lambda_I = \frac{N_1 \cdot 2L}{E \cdot A_I} = \frac{0.5P \cdot 2L}{E \cdot A_I} = \frac{0.5 \cdot 5000 \cdot 2 \cdot 500}{210000 \cdot 804.2} = 0.02 \text{ mm}$$

$$\lambda_{II} = \frac{N_2 \cdot 2L}{E \cdot A_{II}} = \frac{1.5P \cdot 2L}{E \cdot A_{II}} = \frac{1.5 \cdot 5000 \cdot 2 \cdot 500}{210000 \cdot 201.1} = 0.18 \text{ mm}$$

Maksymalne przemieszczenie w sztywnego pręta jest równe wydłużeniu pręta II:

$$w = \lambda_{II} = 0.18 \text{ mm}$$

Naprężenia w prętach

$$\sigma_I = \frac{N_1}{A_I} = \frac{0.5P}{A_I} = \frac{0.5 \cdot 5000}{804.2} = 3.1 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{II} = \frac{N_2}{A_{II}} = \frac{1.5P}{A_{II}} = \frac{1.5 \cdot 5000}{201.1} = 37.3 \text{ MPa}$$

PRZYKŁAD 5.10

Sztywny pręt poziomy zawieszono na dwóch podatnych prętach (rys. 5.11a). Wyznaczyć wydłużenia/skrócenia podatnych prętów, powstałe w nich naprężenia oraz maksymalne przemieszczenie pionowe w sztywnego pręta.

Dokładność rozwiązania:

- wydłużenia/skrócenia podatnych prętów do dwóch miejsc po przecinku,
- naprężenia w podatnych prętach do jednego miejsca po przecinku.

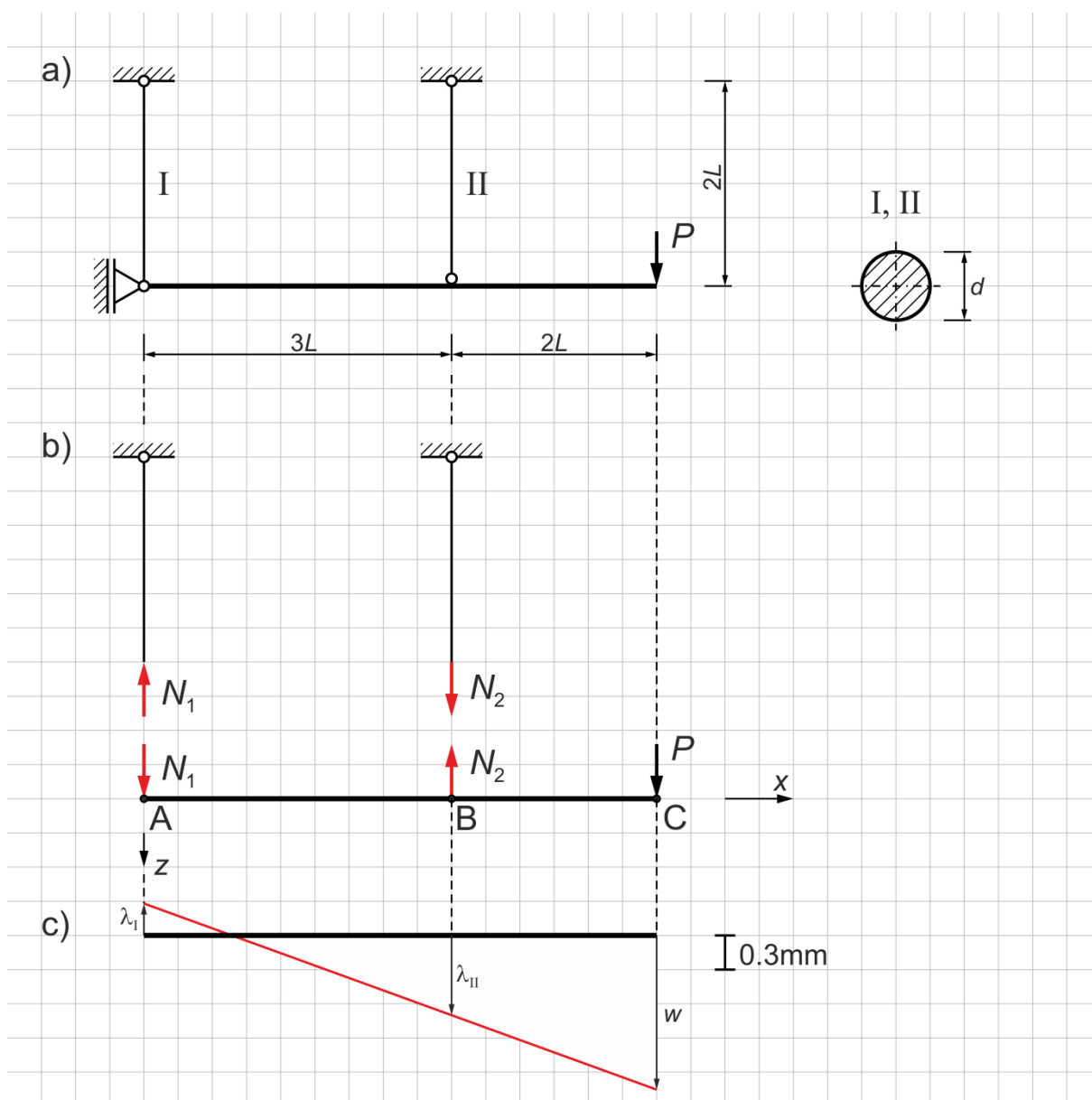
Dane:

$$P = 10 \text{ kN}$$

$$E = 210 \text{ GPa}$$

$$L = 0.5 \text{ m}$$

$$d = 12 \text{ mm}$$



Rys. 5.11

ROZWIĄZANIE

Siły osiowe w podatnych prętach

$$\begin{aligned}
 1) \quad \sum P_{iz} = 0: \quad N_1 - N_2 + P &= 0 \\
 2) \quad \sum M_A = 0: \quad N_2 \cdot 3L - P \cdot 5L &= 0 \quad | : L \\
 3N_2 - 5P = 0 \quad \rightarrow \quad 3N_2 = 5P \quad | : 3 \\
 N_2 = \frac{5}{3}P = 1.67P = 1.67 \cdot 10 &= 16.7 \text{ kN}
 \end{aligned}$$

Po podstawieniu do równania 1), otrzymuje się:

$$N_1 - 1.67P + P = 0 \quad \rightarrow \quad N_1 - 0.67P = 0 \quad \rightarrow \quad N_1 = 0.67P = 0.67 \cdot 10 = 6.7 \text{ kN}$$

Pole powierzchni przekroju poprzecznego prętów

$$A = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi \cdot 12^2}{4} = 113.1 \text{ mm}^2$$

Wydłużenia prętów

$$\lambda_I = \frac{N_1 \cdot 2L}{E \cdot A} = \frac{0.67P \cdot 2L}{E \cdot \frac{\pi d^2}{4}} = \frac{4 \cdot 0.67 \cdot 10000 \cdot 2 \cdot 500}{210000 \cdot \pi \cdot 12^2} = 0.28 \text{ mm}$$

$$\lambda_{II} = \frac{N_2 \cdot 2L}{E \cdot A} = \frac{1.67P \cdot 2L}{E \cdot \frac{\pi d^2}{4}} = \frac{4 \cdot 1.67 \cdot 10000 \cdot 2 \cdot 500}{210000 \cdot \pi \cdot 12^2} = 0.70 \text{ mm}$$

Wyznaczenie maksymalnego przemieszczenia w z twierdzenia Talesa:

$$\frac{\lambda_{II} + \lambda_I}{3L} = \frac{w + \lambda_I}{5L} \quad | \cdot 15L$$

$$5(\lambda_{II} + \lambda_I) = 3(w + \lambda_I) \quad \rightarrow \quad 5\lambda_{II} + 5\lambda_I = 3w + 3\lambda_I$$

$$3w = 5\lambda_{II} + 2\lambda_I \quad | : 3$$

$$w = \frac{5}{3}\lambda_{II} + \frac{2}{3}\lambda_I = \frac{5}{3} \cdot 0.28 + \frac{2}{3} \cdot 0.70 = 0.93 \text{ mm}$$

Naprężenia w prętach

$$\sigma_I = \frac{N_1}{A} = \frac{0.67P}{A} = \frac{0.67 \cdot 10000}{113.1} = 59.2 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{II} = \frac{N_2}{A} = \frac{1.67P}{A} = \frac{1.67 \cdot 10000}{113.1} = 147.7 \text{ MPa}$$

PRZYKŁAD 5.11

Sztywny pręt poziomy zawieszono na dwóch podatnych prętach (rys. 5.12a). Wyznaczyć wydłużenia/skrócenia podatnych prętów, powstałe w nich naprężenia oraz maksymalne przemieszczenie w sztywnego pręta.

Dokładność rozwiązania:

- wydłużenia/skrócenia podatnych prętów do dwóch miejsc po przecinku,
- naprężenia w podatnych prętach do jednego miejsca po przecinku.

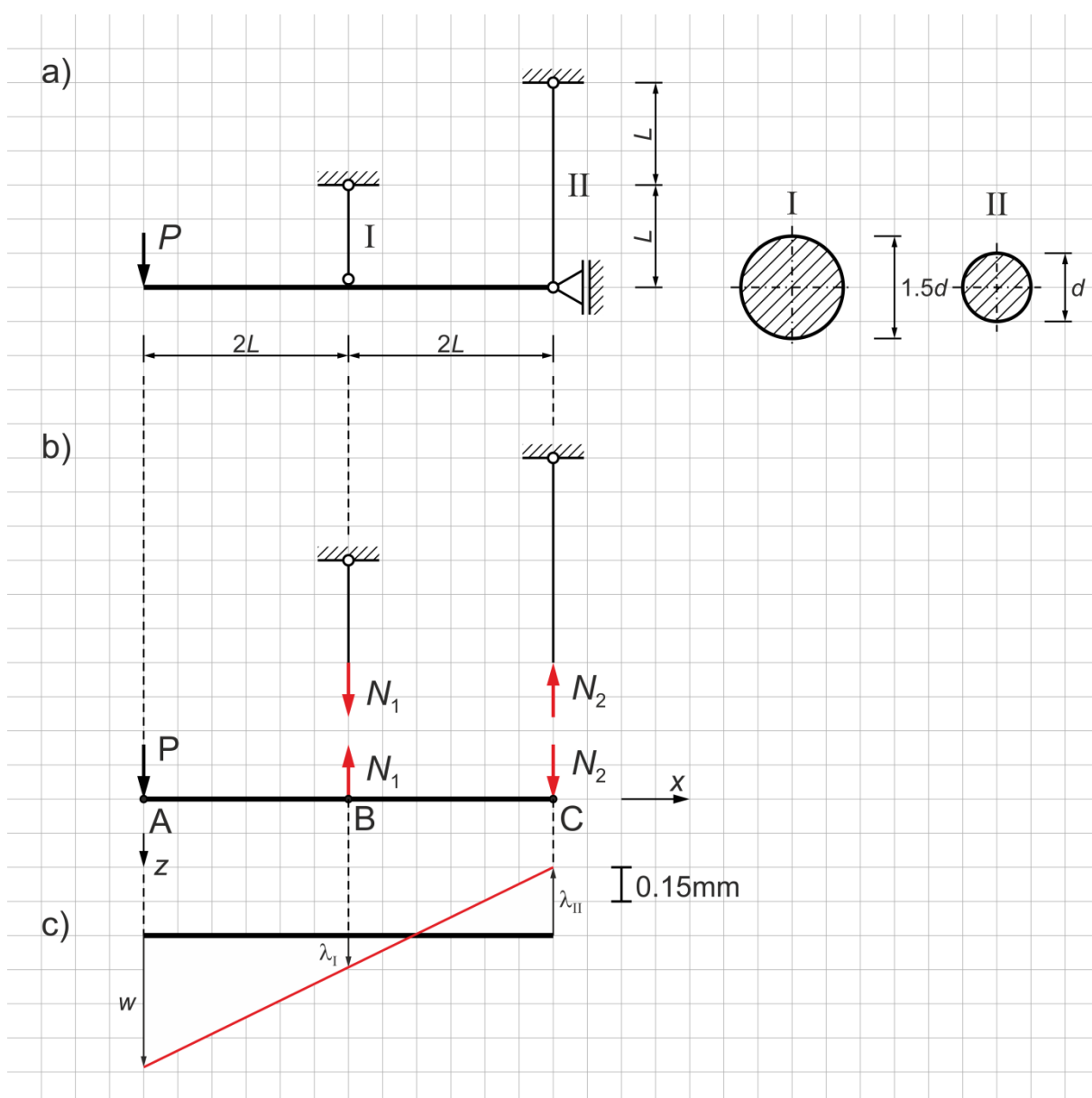
Dane:

$$P = 5 \text{ kN}$$

$$E = 210 \text{ GPa}$$

$$L = 0.5 \text{ m}$$

$$d = 10 \text{ mm}$$



Rys. 5.12

ROZWIĄZANIE

Siły osiowe w podatnych prętach

$$\begin{aligned}
 1) \quad \sum P_{iz} = 0: \quad & P - N_1 + N_2 = 0 \\
 2) \quad \sum M_B = 0: \quad & P \cdot 2L - N_2 \cdot 2L = 0 \quad | : 2L \\
 & P - N_2 = 0 \quad \rightarrow \quad N_2 = P = 5 \text{ kN}
 \end{aligned}$$

Po podstawieniu do równania 1), otrzymuje się:

$$P - N_1 + P = 0 \quad \rightarrow \quad N_1 = 2P = 2 \cdot 10 = 20 \text{ kN}$$

Pola powierzchni przekrojów poprzecznych prętów

$$A_I = \frac{\pi(1.5d)^2}{4} = \frac{2.25 \cdot \pi \cdot d^2}{4} = \frac{2.25 \cdot \pi \cdot 10^2}{4} = 176.7 \text{ mm}^2$$

$$A_{II} = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi \cdot 10^2}{4} = 78.5 \text{ mm}^2$$

Wydłużenia prętów

$$\lambda_I = \frac{N_1 \cdot L}{E \cdot A_I} = \frac{2P \cdot L}{E \cdot \frac{2.25 \cdot \pi d^2}{4}} = \frac{4 \cdot 2 \cdot 5000 \cdot 500}{210000 \cdot 2.25 \cdot \pi \cdot 10^2} = 0.14 \text{ mm}$$

$$\lambda_{II} = \frac{N_2 \cdot 2L}{E \cdot A_{II}} = \frac{P \cdot 2L}{E \cdot \frac{\pi d^2}{4}} = \frac{4 \cdot 5000 \cdot 2 \cdot 500}{210000 \cdot \pi \cdot 10^2} = 0.30 \text{ mm}$$

Wyznaczenie maksymalnego przemieszczenia w z twierdzenia Talesa:

$$\frac{\lambda_I + \lambda_{II}}{2L} = \frac{w + \lambda_{II}}{4L} \quad | \cdot 4L$$

$$2(\lambda_I + \lambda_{II}) = w + \lambda_{II} \quad \rightarrow \quad 2\lambda_I + 2\lambda_{II} = w + \lambda_{II}$$

$$w = 2\lambda_I + \lambda_{II} = 2 \cdot 0.14 + 0.30 = 0.58 \text{ mm}$$

Napreżenia w prętach

$$\sigma_I = \frac{N_1}{A_I} = \frac{2P}{A_I} = \frac{2 \cdot 5000}{176.7} = 56.6 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{II} = \frac{N_2}{A_{II}} = \frac{P}{A_{II}} = \frac{5000}{78.5} = 63.7 \text{ MPa}$$

PRZYKŁAD 5.12

Sztywny pręt poziomy zawieszono na dwóch podatnych prętach (rys. 5.13a). Wyznaczyć wydłużenia/skrócenia podatnych prętów, powstałe w nich naprężenia oraz maksymalne przemieszczenie pionowe w sztywnego pręta.

Dokładność rozwiązania:

- wydłużenia/skrócenia podatnych prętów do dwóch miejsc po przecinku,
- naprężenia w podatnych prętach do jednego miejsca po przecinku.

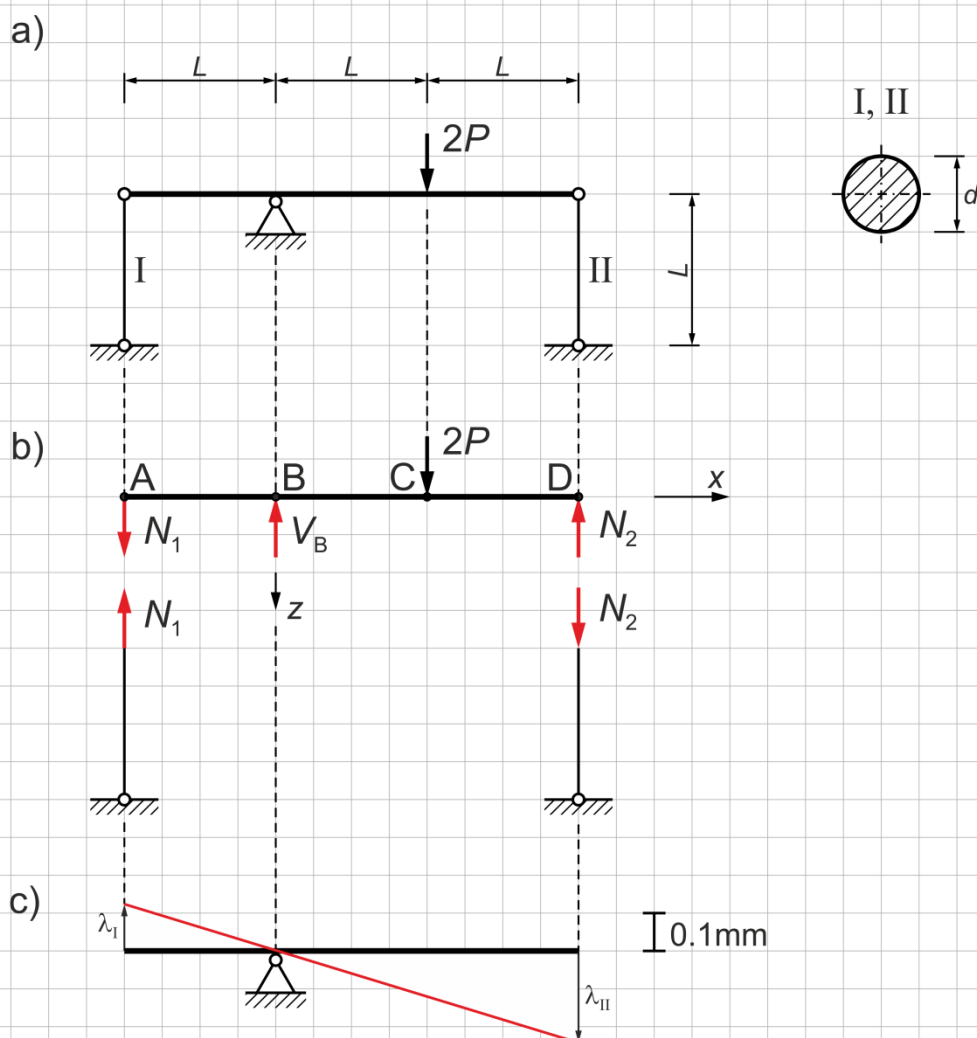
Dane:

$$P = 10 \text{ kN}$$

$$E = 210 \text{ GPa}$$

$$L = 1.0 \text{ m}$$

$$d = 14 \text{ mm}$$



Rys. 5.13

ROZWIĄZANIE

Rozpatrywany układ jest jednokrotnie statycznie niewyznaczalny (SN). Równania równowagi statycznej (2.1) nie wystarczają do wyznaczenia wartości reakcji i sił osiowych w podatnych prętach. Należy wprowadzić dodatkowe równanie, będące tzw. warunkiem geometrycznym.

Siły osiowe w podatnych prętach

$$1) \quad \sum P_{iz} = 0: \quad N_1 - V_B + 2P - N_2 = 0 \quad (\text{równanie równowagi statycznej})$$

$$2) \quad \sum M_B = 0: \quad N_1 \cdot L - 2P \cdot L + N_2 \cdot 2L = 0 \quad (\text{równanie równowagi statycznej})$$

Zależność geometryczna dla przemieszczeń pionowych

$$\frac{\lambda_I}{L} = \frac{\lambda_{II}}{2L} \quad | : 2L$$

$$3) \quad 2\lambda_I = \lambda_{II} \quad (\text{warunek geometryczny})$$

Z równania 3/, wykorzystując wzór (5.3), otrzymuje się:

$$2 \frac{N_1 \cdot L}{E \cdot A} = \frac{N_2 \cdot L}{E \cdot A} \quad | \cdot \frac{E \cdot A}{L}$$

$$2N_1 = N_2 \quad (*)$$

Po podstawieniu do równania 2), otrzymuje się:

$$N_1 \cdot L - 2PL + 2N_1 \cdot 2L = 0 \quad | : L$$

$$N_1 - 2P + 4N_1 = 0$$

$$5N_1 - 2P = 0 \quad \rightarrow \quad 5N_1 = 2P \quad \rightarrow \quad N_1 = \frac{2}{5}P = 0.4 \cdot 10 = 4 \text{ kN}$$

Po podstawieniu do zależności (*), otrzymuje się:

$$N_2 = 2N_1 = 2 \cdot \frac{2}{5}P = \frac{4}{5}P = 0.8 \cdot 10 = 8 \text{ kN}$$

Po podstawieniu do równania 1), otrzymuje się:

$$\frac{2}{5}P - V_B + 2P + \frac{4}{5}P = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{16}{5}P - V_B = 0 \quad \rightarrow \quad V_B = \frac{16}{5}P = 3.2 \cdot 10 = 32 \text{ kN}$$

Pole powierzchni przekroju poprzecznego prętów

$$A = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi \cdot 14^2}{4} = 153.9 \text{ mm}^2$$

Wydłużenia prętów

$$\lambda_I = \frac{N_1 \cdot L}{E \cdot A} = \frac{0.4P \cdot L}{E \cdot \frac{\pi d^2}{4}} = \frac{4 \cdot 0.4 \cdot 10000 \cdot 1000}{210000 \cdot \pi \cdot 14^2} = 0.12 \text{ mm}$$

$$\lambda_{II} = \frac{N_2 \cdot 2L}{E \cdot A} = \frac{0.8P \cdot L}{E \cdot \frac{\pi d^2}{4}} = \frac{4 \cdot 0.8 \cdot 10000 \cdot 1000}{210000 \cdot \pi \cdot 14^2} = 0.25 \text{ mm}$$

Maksymalne przemieszczenie w sztywnego pręta jest równe wydłużeniu pręta II:

$$w = \lambda_{II} = 0.25 \text{ mm}$$

Naprężenia w prętach

$$\sigma_I = \frac{N_1}{A} = \frac{0.4P}{\frac{\pi d^2}{4}} = \frac{4 \cdot 0.4 \cdot 10000}{\pi \cdot 14^2} = 26.0 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{II} = \frac{N_2}{A} = \frac{0.8P}{\frac{\pi d^2}{4}} = \frac{4 \cdot 0.8 \cdot 10000}{\pi \cdot 14^2} = 52.0 \text{ MPa}$$

PRZYKŁAD 5.13

Sztywny pręt poziomy zawieszono na dwóch podatnych prętach (rys. 5.14a). Wyznaczyć wydłużenia/skrócenia podatnych prętów, powstałe w nich naprężenia oraz maksymalne przemieszczenie w sztywnego pręta.

Dokładność rozwiązania:

- wydłużenia/skrócenia podatnych prętów do dwóch miejsc po przecinku,
- naprężenia w podatnych prętach do jednego miejsca po przecinku.

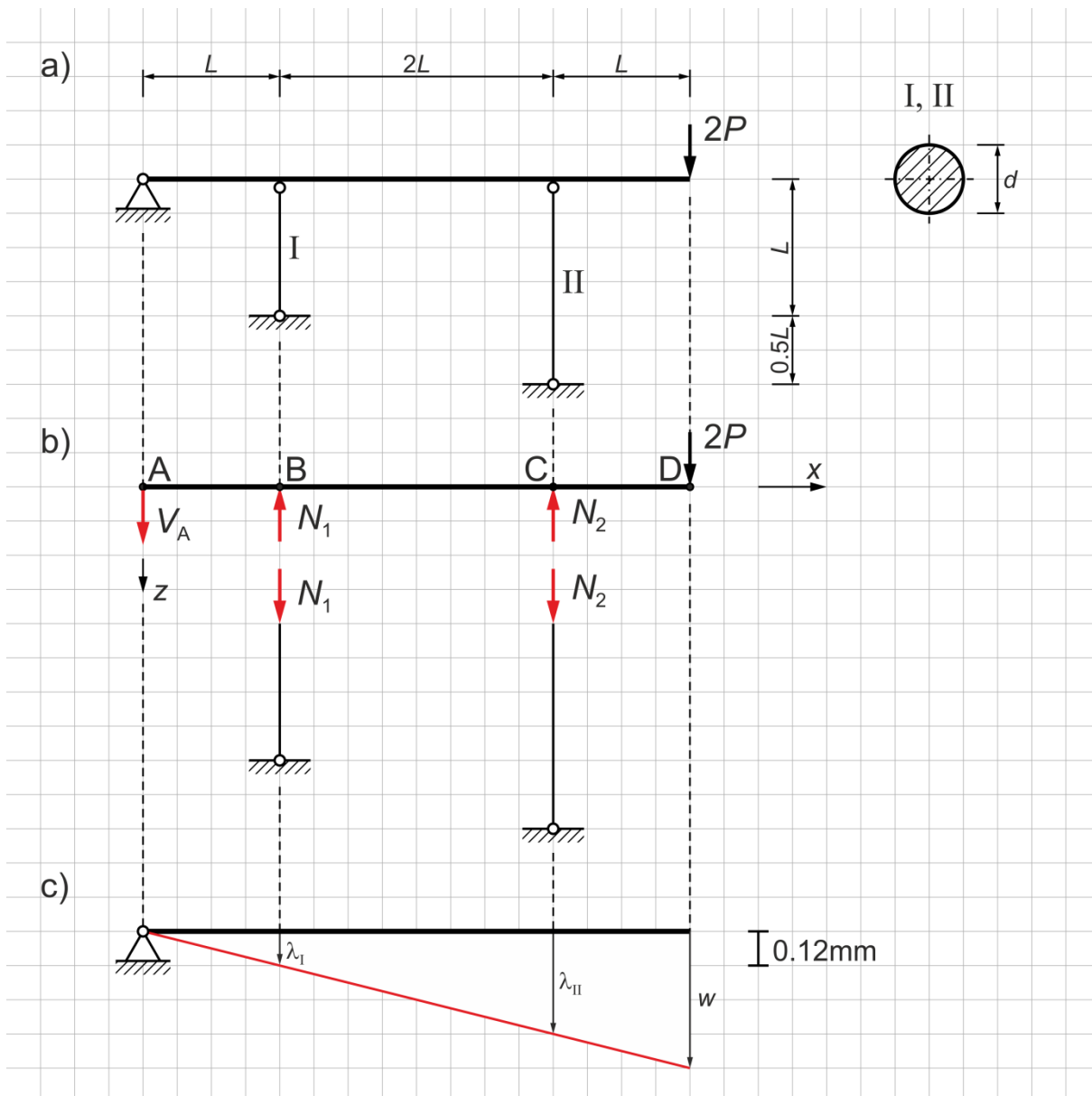
Dane:

$$P = 5 \text{ kN}$$

$$E = 210 \text{ GPa}$$

$$L = 0.5 \text{ m}$$

$$d = 12 \text{ mm}$$



Rys. 5.14

ROZWIĄZANIE

Rozpatrywany układ jest geometrycznie niezmienny (GN) i jednokrotnie statycznie niewyznaczalny (SN). Równania równowagi statycznej (2.1) nie wystarczają do wyznaczenia wartości reakcji i sił osiowych w podatnych prętach. Należy wprowadzić dodatkowe równanie, będące tzw. warunkiem geometrycznym.

Siły osiowe w podatnych prętach

$$1) \quad \sum P_{iz} = 0: \quad V_A - N_1 - N_2 + 2P = 0 \quad (\text{równanie równowagi statycznej})$$

$$2) \quad \sum M_A = 0: \quad N_1 \cdot L + N_2 \cdot 3L - 2P \cdot 4L = 0 \quad (\text{równanie równowagi statycznej})$$

Zależność geometryczna dla przemieszczeń pionowych

$$\frac{\lambda_I}{L} = \frac{\lambda_{II}}{3L} \quad | : 3L$$

$$3) \quad 3\lambda_I = \lambda_{II} \quad (\text{warunek geometryczny})$$

Z równania 3), wykorzystując wzór (5.3), otrzymuje się:

$$3 \frac{N_1 \cdot L}{E \cdot A} = \frac{N_2 \cdot 1.5L}{E \cdot A} \quad | \cdot \frac{E \cdot A}{L}$$

$$3N_1 = 1.5N_2 \quad \rightarrow \quad 2N_1 = N_2 \quad (*)$$

Po podstawieniu do równania 2), otrzymuje się:

$$N_1 \cdot L + 2N_1 \cdot 3L - 2P \cdot 4L = 0 \quad | : L$$

$$N_1 + 6N_1 - 8P = 0 \quad \rightarrow \quad 7N_1 = 8P \quad \rightarrow \quad N_1 = \frac{8}{7}P = 1.14P = 1.14 \cdot 5 = 5.7 \text{ kN}$$

Po podstawieniu do zależności (*), otrzymuje się:

$$N_2 = 2N_1 = 2 \cdot 1.14P = 2.28P = 2.28 \cdot 5 = 11.4 \text{ kN}$$

Po podstawieniu do równania 1), otrzymuje się:

$$V_A - 1.14P - 2.28P + 2P = 0 \quad \rightarrow \quad V_A = 1.42P = 1.42 \cdot 5 = 7.1 \text{ kN}$$

Pole powierzchni przekroju poprzecznego prętów

$$A = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi \cdot 12^2}{4} = 113.1 \text{ mm}^2$$

Wydłużenia prętów

$$\lambda_I = \frac{N_1 \cdot L}{E \cdot A} = \frac{1.14P \cdot L}{E \cdot \frac{\pi d^2}{4}} = \frac{4 \cdot 1.14 \cdot 5000 \cdot 500}{210000 \cdot \pi \cdot 12^2} = 0.12 \text{ mm}$$

$$\lambda_{II} = \frac{N_2 \cdot 1.5L}{E \cdot A} = \frac{2.28P \cdot 1.5L}{E \cdot \frac{\pi d^2}{4}} = \frac{4 \cdot 2.28 \cdot 5000 \cdot 1.5 \cdot 500}{210000 \cdot \pi \cdot 12^2} = 0.36 \text{ mm}$$

Wyznaczenie przemieszczenia w z twierdzenia Talesa:

$$\frac{\lambda_1}{L} = \frac{w}{4L} \quad | \cdot 4L$$

$$4\lambda_1 = w \quad \rightarrow \quad w = 4 \cdot 0.12 = 0.48 \text{ mm}$$

Naprężenia w prętach

$$\sigma_I = \frac{N_1}{A} = \frac{1.14P}{\frac{\pi d^2}{4}} = \frac{4 \cdot 1.14 \cdot 5000}{\pi \cdot 12^2} = 50.4 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{II} = \frac{N_2}{A} = \frac{2.28P}{\frac{\pi d^2}{4}} = \frac{4 \cdot 2.28 \cdot 5000}{\pi \cdot 12^2} = 100.8 \text{ MPa}$$

PRZYKŁAD 5.14

Pręt składający się z dwóch części, miedzianej o długości L_1 i średnicy d_1 oraz aluminiowej o długości L_2 i średnicy d_2 , umieszczony jest pomiędzy dwiema sztywnymi płytami w temperaturze montażu 20°C (rys. 5.15). Lewy koniec pręta jest utwierdzony do sztywnej płyty. Pomiedzy prawym końcem pręta a sztywną płytą występuje szczelina δ . Wyznaczyć przyrost temperatury (podgrzanie) niezbędne do zamknięcia (wyliminowania) luzu δ oraz naprężenia w obydwu częściach pręta po podgrzaniu do temperatury 80°C .

Dane:

$$L_1 = 2.0 \text{ m}$$

$$L_2 = 1.5 \text{ m}$$

$$d_1 = 100 \text{ mm}$$

$$d_2 = 80 \text{ mm}$$

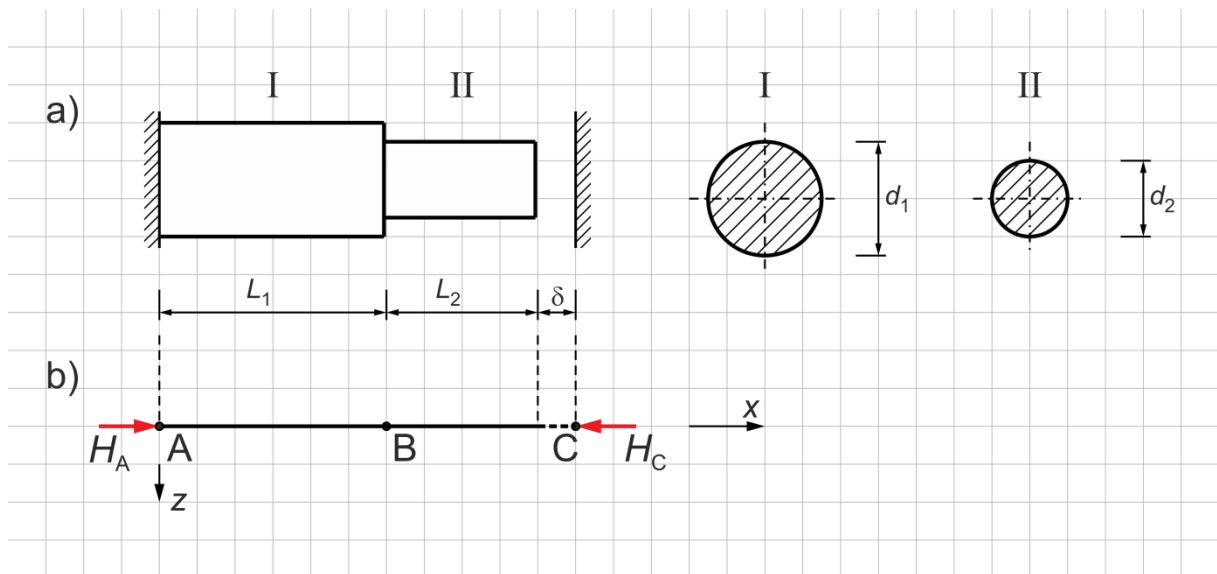
$$\delta = 1.5 \text{ mm}$$

$$E_1 = 100 \text{ GPa}$$

$$E_2 = 70 \text{ GPa}$$

$$\alpha_1 = 1.6 \cdot 10^{-5} \text{ 1/K}$$

$$\alpha_2 = 2.4 \cdot 10^{-5} \text{ 1/K}$$



Rys. 5.15

ROZWIĄZANIE

Luz δ zostanie zamknięty przy wzroście temperatury o Δt_0 (wzór 5.4):

$$\delta = L_1 \cdot \alpha_1 \cdot \Delta T_0 + L_2 \cdot \alpha_2 \cdot \Delta T_0 = (L_1 \cdot \alpha_1 + L_2 \cdot \alpha_2) \cdot \Delta T_0$$

$$\Delta T_0 = \frac{\delta}{L_1 \cdot \alpha_1 + L_2 \cdot \alpha_2} = \frac{1.5}{2000 \cdot 1.6 \cdot 10^{-5} + 1500 \cdot 2.4 \cdot 10^{-5}} = \frac{1.5}{0.068} = 22.1^\circ\text{C}$$

Swobodne wydłużanie będzie następowało do momentu podgrzania pręta o ΔT_0 . Dalsze podgrzewanie spowoduje nacisk pręta na sztywne płyty, które oddziaływać będą na niego reakcjami H_A i H_C :

$$H_A - H_C = 0 \rightarrow H_A = H_C = H$$

Na skutek wydłużenia termicznego ΔL_t i skrócenia mechanicznego wywołanego reakcjami sztywnych płyt ΔL_m , pręt wydłuży się o δ . Warunek zgodności wydłużeń przyjmuje postać:

$$\Delta L_t = \Delta L_m + \delta$$

$$\Delta L_t = L_1 \cdot \alpha_1 \cdot \Delta T + L_2 \cdot \alpha_2 \cdot \Delta T = (L_1 \cdot \alpha_1 + L_2 \cdot \alpha_2) \cdot \Delta T$$

$$\Delta L_m = \frac{H \cdot L_1}{E_1 \cdot A_1} + \frac{H \cdot L_2}{E_2 \cdot A_2}$$

$$\Delta L_t = \Delta L_m + \delta \rightarrow (L_1 \cdot \alpha_1 + L_2 \cdot \alpha_2) \cdot \Delta T = \frac{H \cdot L_1}{E_1 \cdot A_1} + \frac{H \cdot L_2}{E_2 \cdot A_2} + \delta$$

$$\Delta T \cdot (L_1 \cdot \alpha_1 + L_2 \cdot \alpha_2) - \delta = H \cdot \left(\frac{L_1}{E_1 \cdot A_1} + \frac{L_2}{E_2 \cdot A_2} \right) \quad | : \left(\frac{L_1}{E_1 \cdot A_1} + \frac{L_2}{E_2 \cdot A_2} \right)$$

$$H = \frac{\Delta T \cdot (L_1 \cdot \alpha_1 + L_2 \cdot \alpha_2) - \delta}{\frac{L_1}{E_1 \cdot A_1} + \frac{L_2}{E_2 \cdot A_2}} = \frac{\Delta T \cdot (L_1 \cdot \alpha_1 + L_2 \cdot \alpha_2) - \delta}{\frac{L_1 \cdot E_2 \cdot A_2 + L_2 \cdot E_1 \cdot A_1}{E_1 \cdot A_1 \cdot E_2 \cdot A_2}} = \frac{[\Delta T \cdot (L_1 \cdot \alpha_1 + L_2 \cdot \alpha_2) - \delta] \cdot E_1 \cdot A_1 \cdot E_2 \cdot A_2}{L_1 \cdot E_2 \cdot A_2 + L_2 \cdot E_1 \cdot A_1}$$

Pola powierzchni przekrojów poprzecznych prętów

$$A_1 = \frac{\pi \cdot d_1^2}{4} = \frac{\pi \cdot 100^2}{4} = 7854 \text{ mm}^2$$

$$A_2 = \frac{\pi \cdot d_2^2}{4} = \frac{\pi \cdot 80^2}{4} = 5027 \text{ mm}^2$$

$$H = \frac{[60 \cdot (2000 \cdot 1.6e^{-5} + 1500 \cdot 2.4e^{-5}) - 1.5] \cdot 100000 \cdot 7854 \cdot 70000 \cdot 5027}{2000 \cdot 70000 \cdot 5027 + 1500 \cdot 100000 \cdot 7854} \approx 378900 \text{ N}$$

Napężenia w prętach

$$\sigma_1 = \frac{H}{A_1} = \frac{378900}{7854} \approx 48.3 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = \frac{H}{A_2} = \frac{378900}{5027} \approx 75.4 \text{ MPa}$$

6.

ŚCINANIE TECHNICZNE ŁĄCZNIKÓW

Łączniki (śruby, nity, sworznie, spoiny i in.) służą do łączenia większych części maszyn. Łączniki m.in. pracują na ścinanie i na docisk. Przyjmuje się założenie upraszczające, że rozkład naprężeń stycznych jest stały na całej powierzchni ścinanej. Warunek nośności na ścinanie ma postać:

$$\tau = \frac{T}{A} \leq k_t \quad (6.1)$$

gdzie:

- T – siła tnąca działająca w przekroju ścinanym,
- A – pole powierzchni przekroju przenoszącego siłę tnącą T ,
- k_t – naprężenia dopuszczalne na ścinanie.

Przyjmuje się założenie upraszczające, że nacisk na danej powierzchni łącznika rozkłada się równomiernie. Dla łączników o przekroju kołowym, przyjmuje się rozkład nacisków powierzchniowych równomierny na przekroju średnicowym. Warunek nośności na docisk ma postać:

$$\sigma_d = \frac{F}{A} \leq k_d \quad (6.2)$$

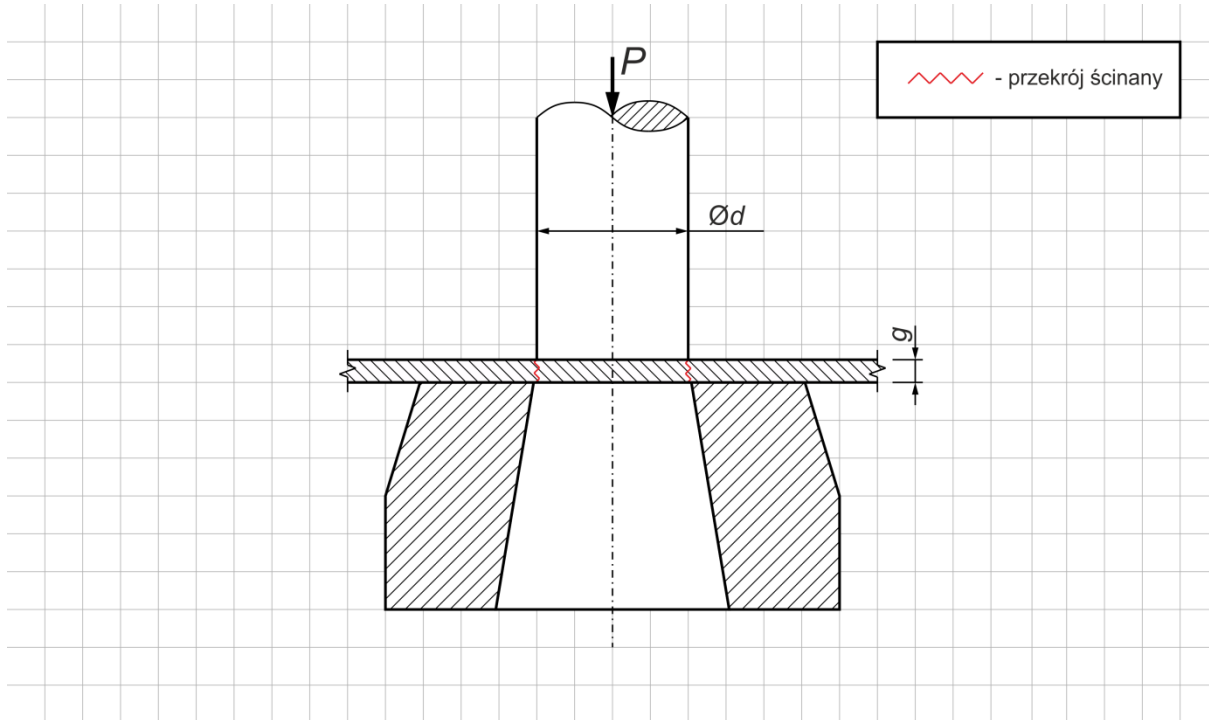
gdzie:

- F – siła nacisku powierzchniowego,
- A – rzeczywiste (dla płaskiej powierzchni nacisku) lub zastępcze pole powierzchni nacisku,
- k_d – naprężenia dopuszczalne na docisk.

Ścinanie techniczne może dotyczyć również innych elementów, np. w postaci płaskowników.

PRZYKŁAD 6.1

Krażki o średnicy $d = 400$ mm wykrawane są z blachy o grubości $g = 5$ mm pod prasą (rys. 6.1). Materiał blachy ma wytrzymałość na rozciąganie $R_m = 450$ MPa. Obliczyć minimalną wartość siły nacisku prasy.



Rys. 6.1

ROZWIĄZANIE

Zgodnie z hipotezą wyciężenia Hubera–Misesa–Hencky’ego (HMH) wytrzymałość na ścinanie wynosi:

$$R_t = 0.58 \cdot R_m = 0.58 \cdot 450 = 261 \text{ MPa}$$

Wykrojenie krążków z blachy nastąpi, gdy naprężenia styczne na ścinanej powierzchni spowodowane działaniem siły P osiągną wartość wytrzymałości na ścinanie R_t materiału blachy:

$$\tau = \frac{P}{A} = R_t$$

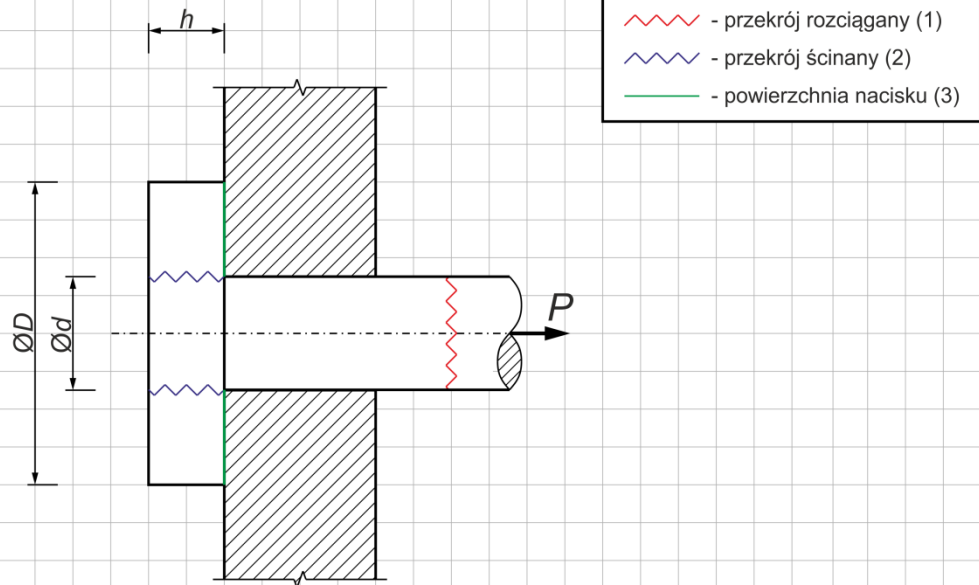
$$A = \pi \cdot d \cdot g$$

$$\frac{P}{\pi \cdot d \cdot g} = R_t \rightarrow P = R_t \cdot \pi \cdot d \cdot g$$

$$P = R_t \cdot \pi \cdot d \cdot g = 261 \cdot \pi \cdot 40 \cdot 5 = 163991 \text{ N} \approx 164 \text{ kN}$$

PRZYKŁAD 6.2

Wyznaczyć wymiary pręta z „głową” obciążonego siłą $P = 60$ kN. Dla materiału pręta naprężenia dopuszczalne na rozciąganie $k_r = 120$ MPa, naprężenia dopuszczalne na ścinanie $k_t = 80$ MPa i naprężenia dopuszczalne na nacisk powierzchniowy $k_d = 200$ MPa.



Rys. 6.2

ROZWIĄZANIE

Z warunku nośności na rozciąganie (przekrój 1)

$$\sigma_r = \frac{P}{A_1} \leq k_r$$

$$A_1 = \frac{\pi \cdot d^2}{4}$$

$$\frac{P}{\frac{\pi \cdot d^2}{4}} \leq k_r \rightarrow \frac{4P}{\pi \cdot d^2} \leq k_r \quad | \cdot \frac{d^2}{k_r}$$

$$\frac{4P}{\pi \cdot k_r} \leq d^2 \rightarrow d \geq \sqrt{\frac{4P}{\pi \cdot k_r}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 60000}{\pi \cdot 120}} = \sqrt{\frac{240000}{\pi \cdot 120}} \approx 25.2 \text{ mm}$$

Przyjęto $d = 26$ mm.

Z warunku nośności na ścinanie (przekrój 2)

$$\tau = \frac{P}{A_2} \leq k_t$$

$$A_2 = \pi \cdot d \cdot h$$

$$\frac{P}{\pi \cdot d \cdot h} \leq k_t \quad | \cdot \frac{h}{k_t}$$

$$\frac{P}{\pi \cdot d \cdot k_t} \leq h \quad \rightarrow \quad h \geq \frac{P}{\pi \cdot d \cdot k_t} = \frac{60000}{\pi \cdot 26 \cdot 80} = \frac{60000}{\pi \cdot 2080} \approx 9.2 \text{ mm}$$

Przyjęto $h = 10 \text{ mm}$.

Z warunku nośności na docisk (powierzchnia 3)

$$\sigma_d = \frac{P}{A_3} \leq k_d$$

$$A_3 = \frac{\pi \cdot (D^2 - d^2)}{4}$$

$$\frac{P}{\frac{\pi \cdot (D^2 - d^2)}{4}} \leq k_d \quad \rightarrow \quad \frac{4P}{\pi \cdot (D^2 - d^2)} \leq k_d \quad | \cdot \frac{D^2 - d^2}{k_d}$$

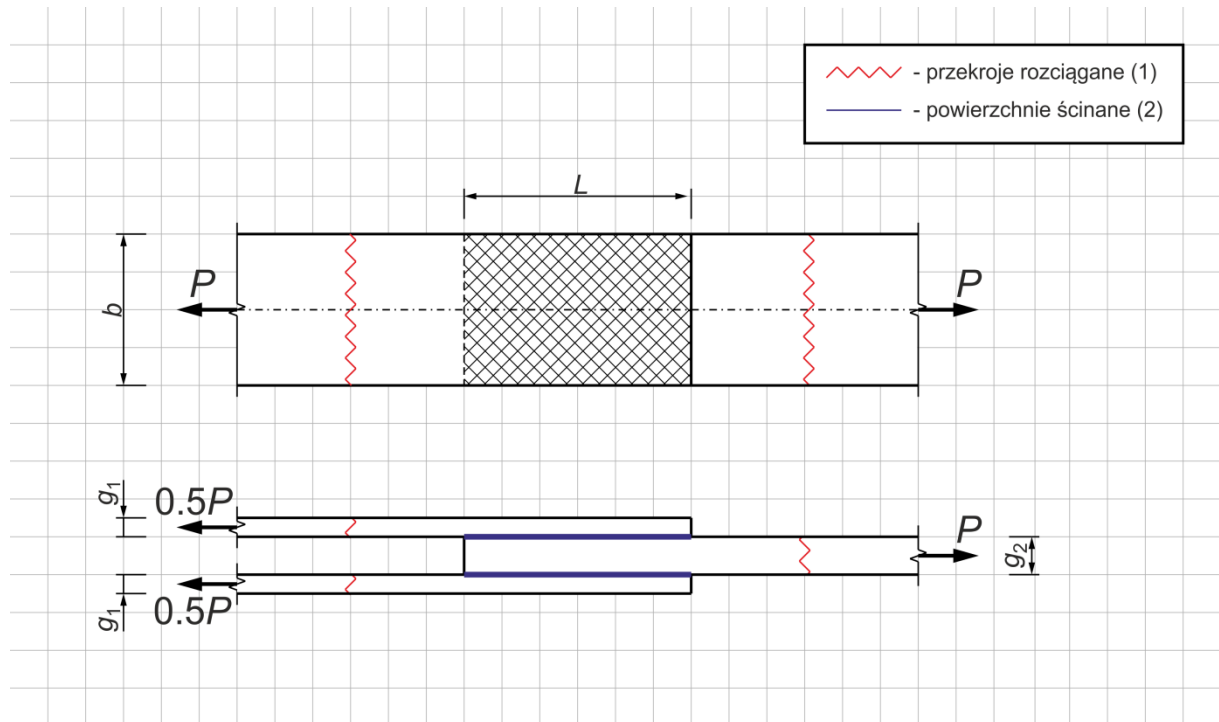
$$\frac{4P}{\pi \cdot k_d} \leq D^2 - d^2 \quad \rightarrow \quad D^2 \geq \frac{4P}{\pi \cdot k_d} + d^2$$

$$D \geq \sqrt{\frac{4P}{\pi \cdot k_d} + d^2} = \sqrt{\frac{4 \cdot 60000}{\pi \cdot 200} + 26^2} = \sqrt{\frac{240000}{\pi \cdot 200} + 676} \approx 32.5 \text{ mm}$$

Przyjęto $D = 34 \text{ mm}$.

PRZYKŁAD 6.3

Trzy płaskowniki o szerokości $b = 100$ mm oraz grubości $g_1 = 3$ mm i $g_2 = 6$ mm, połączone za pomocą spoiny klejowej. Obliczyć dopuszczalną siłę P rozciągającą złącze oraz wymaganą długość spoiny L . Naprężenia dopuszczalne na rozciąganie materiału płaskowników $k_r = 160$ MPa oraz naprężenia dopuszczalne na ścinanie kleju $k_t = 6$ MPa.



Rys. 6.3

ROZWIĄZANIE

Z warunku nośności na rozciąganie płaskowników (przekroje 1)

$$\sigma_r = \frac{P}{A_1} \leq k_r$$

$$A_1 = b \cdot g_2 = b \cdot 2 \cdot g_1$$

$$\frac{P}{b \cdot g_2} \leq k_r \quad | \cdot (b \cdot g_2)$$

$$P \leq k_r \cdot b \cdot g_2 = 160 \cdot 100 \cdot 6 = 96000 \text{ N} = 96 \text{ kN}$$

Z warunku nośności na ścinanie spoiny klejowej (powierzchnie 2)

$$\tau = \frac{P}{A_2} \leq k_t$$

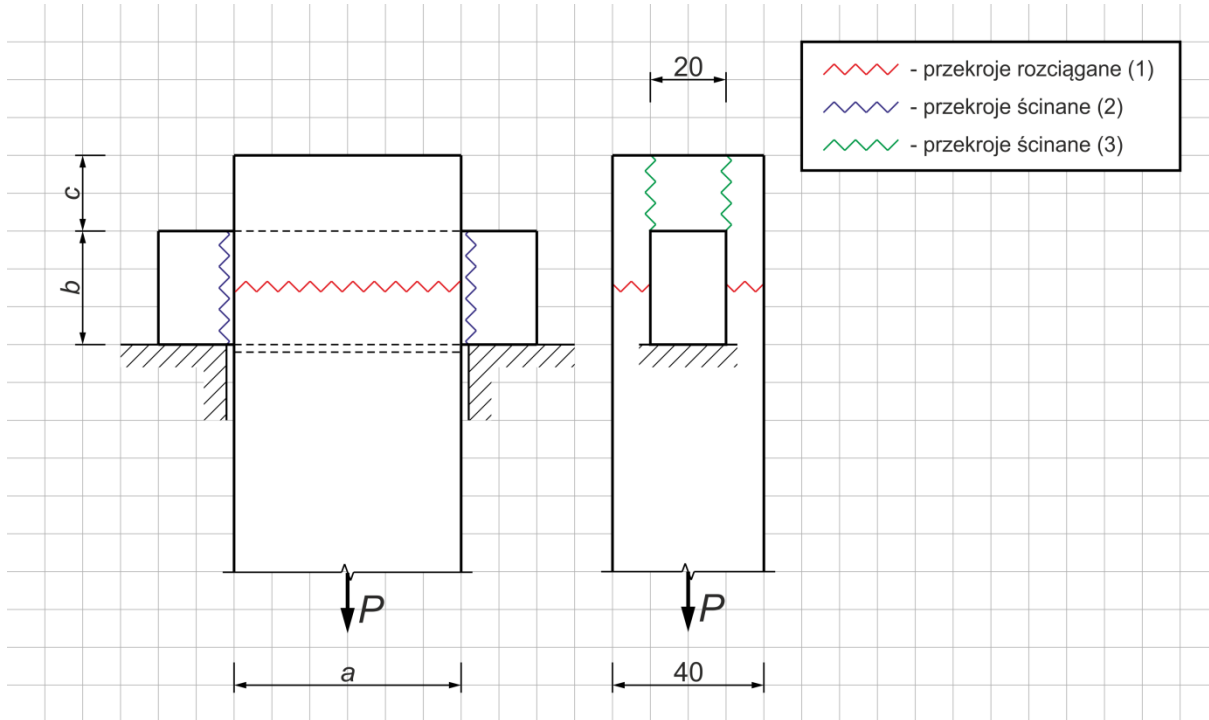
$$A_2 = 2 \cdot b \cdot l$$

$$\frac{P}{2 \cdot b \cdot L} \leq k_t \quad | \cdot \frac{L}{k_t}$$

$$\frac{P}{2 \cdot b \cdot k_t} \leq L \quad \rightarrow \quad L \geq \frac{P}{2 \cdot b \cdot k_t} = \frac{96000}{2 \cdot 100 \cdot 6} = \frac{96000}{600} = 160 \text{ mm}$$

PRZYKŁAD 6.4

Wyznaczyć brakujące wymiary połączenia przedstawionego na rys. 6.4, obciążonego siłą $P = 200 \text{ kN}$. Naprężenia dopuszczalne na rozciąganie materiału, z którego wykonano elementy złącza, $k_r = 120 \text{ MPa}$ oraz naprężenia dopuszczalne na ścinanie $k_t = 70 \text{ MPa}$.



Rys. 6.4

ROZWIĄZANIE

Z warunku nośności na rozciąganie (przekroje 1)

$$\sigma_r = \frac{P}{2A_1} \leq k_r$$

$$A_1 = 10 \cdot a$$

$$\frac{P}{2 \cdot 10 \cdot a} \leq k_r \quad | \cdot \frac{a}{k_r}$$

$$\frac{P}{2 \cdot 10 \cdot k_r} \leq a \quad \rightarrow \quad a \geq \frac{P}{2 \cdot 10 \cdot k_r} = \frac{200000}{2 \cdot 10 \cdot 120} = \frac{200000}{2400} \approx 83.3 \text{ mm}$$

Przyjęto $a = 84 \text{ mm}$.

Z warunku nośności na ścinanie (przekroje 2)

$$\tau = \frac{P}{2 \cdot A_2} \leq k_t$$

$$A_2 = 20 \cdot b$$

$$\frac{P}{2 \cdot 20 \cdot b} \leq k_t \quad | \cdot \frac{b}{k_t}$$

$$\frac{P}{2 \cdot 20 \cdot k_t} \leq b \rightarrow b \geq \frac{P}{2 \cdot 20 \cdot k_t} = \frac{200000}{2 \cdot 20 \cdot 70} = \frac{200000}{2800} \approx 71.4 \text{ mm}$$

Przyjęto $h = 72 \text{ mm}$.

Z warunku nośności na ścinanie (przekroje 3)

$$\tau = \frac{P}{2 \cdot A_3} \leq k_t$$

$$A_2 = c \cdot a$$

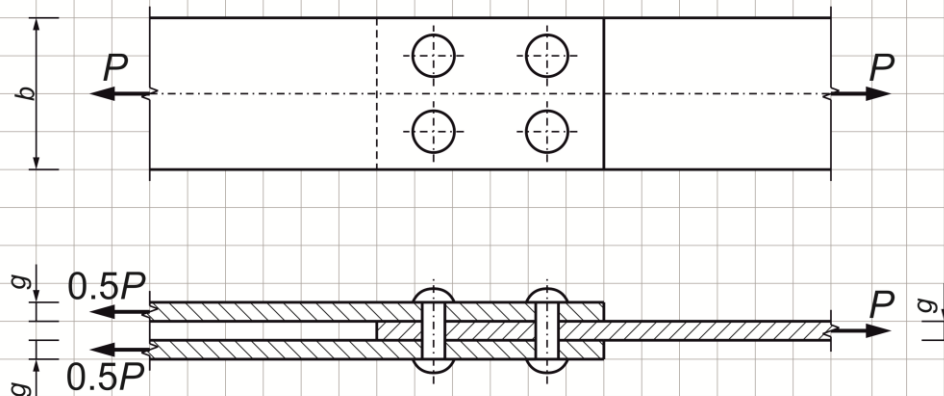
$$\frac{P}{2 \cdot c \cdot a} \leq k_t \quad | \cdot \frac{c}{k_t}$$

$$\frac{P}{2 \cdot a \cdot k_t} \leq c \rightarrow c \geq \frac{P}{2 \cdot a \cdot k_t} = \frac{200000}{2 \cdot 84 \cdot 70} = \frac{200000}{11760} \approx 17 \text{ mm}$$

Przyjęto $c = 18 \text{ mm}$.

PRZYKŁAD 6.5

Wyznaczyć średnicę nitów oraz szerokość blach dla połączenia przedstawionego na rys. 6.5, obciążonego siłą $P = 10 \text{ kN}$. Grubość blach $g = 5 \text{ mm}$, naprężenia dopuszczalne na rozciąganie $k_t = 120 \text{ MPa}$, naprężenia dopuszczalne na ścinanie $k_t = 70 \text{ MPa}$ i naprężenia dopuszczalne na naciski powierzchniowe $k_d = 140 \text{ MPa}$.



Rys. 6.5

ROZWIĄZANIE

Z warunku nośności na ścinanie nitów

$$\tau = \frac{P}{A_1} \leq k_t$$

$$A_1 = \frac{\pi d^2}{4} \cdot n \cdot i = \frac{\pi d^2}{4} \cdot 4 \cdot 2 = \frac{\pi d^2}{4} \cdot 8 = 2\pi d^2$$

gdzie: n – liczba nitów, i – liczba ścinanych przekrojów nitów.

$$\frac{P}{2\pi d^2} \leq k_t \quad | \cdot \frac{d^2}{k_t}$$

$$\frac{P}{2\pi k_t} \leq d^2 \quad \rightarrow \quad d^2 \geq \frac{P}{2\pi k_t}$$

$$d \geq \sqrt{\frac{P}{2\pi k_t}} = \sqrt{\frac{10000}{2\pi \cdot 70}} = \sqrt{\frac{10000}{\pi \cdot 140}} \approx 4.8 \text{ mm}$$

Z warunku nośności na naciski powierzchniowe dla nitów

$$\sigma_d = \frac{P}{A_2} \leq k_d$$

$$A_2 = d \cdot g \cdot n = d \cdot 5 \cdot 4 = d \cdot 20$$

$$\frac{P}{d \cdot 20} \leq k_d \quad | \cdot \frac{d}{k_d}$$

$$\frac{P}{20 \cdot k_d} \leq d \quad \rightarrow \quad d \geq \frac{P}{20 \cdot k_d} = \frac{10000}{20 \cdot 140} = \frac{10000}{2800} \approx 3.6 \text{ mm}$$

O doborze średnicy nitów decyduje warunek nośności na ścinanie. Przyjęto $d = 5 \text{ mm}$.

Z warunku nośności na rozciąganie płaskowników

$$\sigma_r = \frac{P}{A_3} \leq k_r$$

$$A_3 = (b - 2d) \cdot g = (b - 2 \cdot 5) \cdot 5 = 5b - 50$$

$$\frac{P}{5b - 50} \leq k_r \quad | \cdot \frac{5b - 50}{k_r}$$

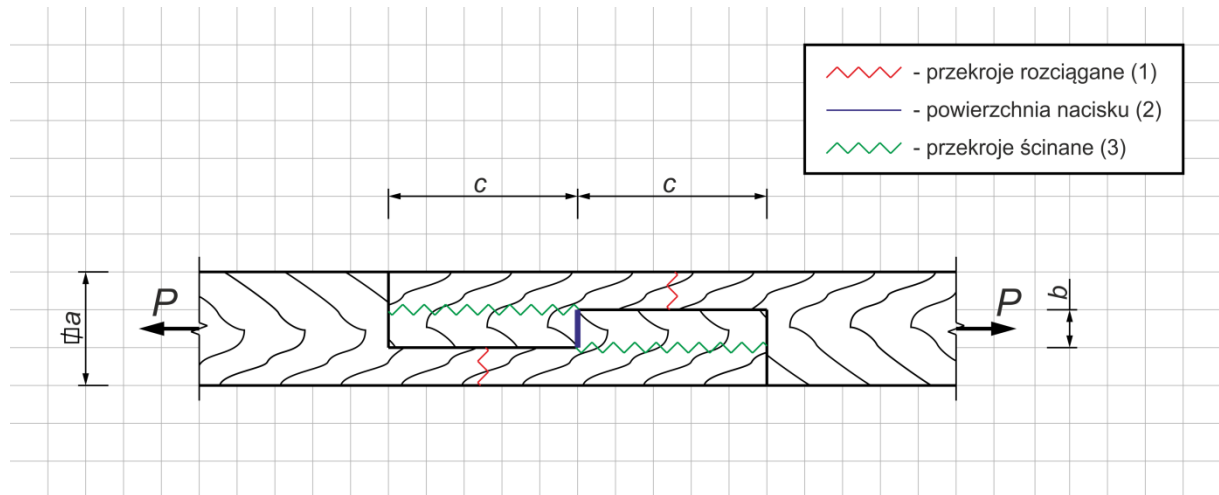
$$\frac{P}{k_r} \leq 5b - 50 \quad \rightarrow \quad 5b \geq \frac{P}{k_r} + 50 \quad /: 5$$

$$b \geq \frac{P}{5 \cdot k_r} + 10 = \frac{10000}{5 \cdot 120} + 10 = \frac{10000}{600} + 10 \approx 26.7 \text{ mm}$$

Przyjęto $b = 28 \text{ mm}$.

PRZYKŁAD 6.6

Wyznaczyć wymiary złącza belek drewnianych o przekroju kwadratowym, obciążonego siłą rozciągającą $P = 30 \text{ kN}$. Naprężenia dopuszczalne na rozciąganie $k_r = 10 \text{ MPa}$, naprężenia dopuszczalne na ścinanie $k_t = 1 \text{ MPa}$ i naprężenia dopuszczalne na naciski powierzchniowe $k_d = 8 \text{ MPa}$.



Rys. 6.6

ROZWIĄZANIE

Z warunku nośności na rozciąganie (przekroje 1)

$$\sigma_r = \frac{P}{A_1} \leq k_r$$

$$A_1 = \frac{(a-b)}{2} \cdot a = \frac{a^2 - a \cdot b}{2}$$

$$1) \quad \sigma_r = \frac{2P}{a^2 - a \cdot b} \leq k_r$$

Z warunku nośności na naciski powierzchniowe (powierzchnia 2)

$$\sigma_d = \frac{P}{A_2} \leq k_d$$

$$A_2 = b \cdot a$$

$$\frac{P}{b \cdot a} \leq k_d \quad | \cdot \frac{b}{k_d}$$

$$2) \quad \frac{P}{k_d \cdot a} \leq b \quad \rightarrow \quad b \geq \frac{P}{k_d \cdot a}$$

Po podstawieniu równania 2) do równania 1), otrzymuje się:

$$\frac{2P}{a^2 - a \cdot \frac{P}{k_d \cdot a}} \leq k_r \quad \rightarrow \quad \frac{2P}{a^2 - \frac{P}{k_d}} \leq k_r$$

$$2P \leq k_r \cdot \left(a^2 - \frac{P}{k_d} \right) = k_r \cdot a^2 - k_r \cdot \frac{P}{k_d}$$

$$2P + \frac{P \cdot k_r}{k_d} \leq k_r \cdot a^2 \quad | :k_r$$

$$\frac{2P + \frac{P \cdot k_r}{k_d}}{k_r} \leq a^2 \quad \rightarrow \quad a \geq \sqrt{\frac{2P + \frac{P \cdot k_r}{k_d}}{k_r}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 30000 + \frac{30000 \cdot 10}{8}}{10}} = \sqrt{\frac{60000 + 37500}{10}} \approx 98.7 \text{ mm}$$

Przyjęto $a = 100 \text{ mm}$.

Z równania 2) otrzymuje się:

$$b \geq \frac{P}{k_d \cdot a} = \frac{30000}{8 \cdot 100} = \frac{30000}{800} = 37.5 \text{ mm}$$

Przyjęto $b = 38 \text{ mm}$.

Z warunku nośności na ścinanie (przekroje 3)

$$\tau = \frac{P}{A_3} \leq k_t$$

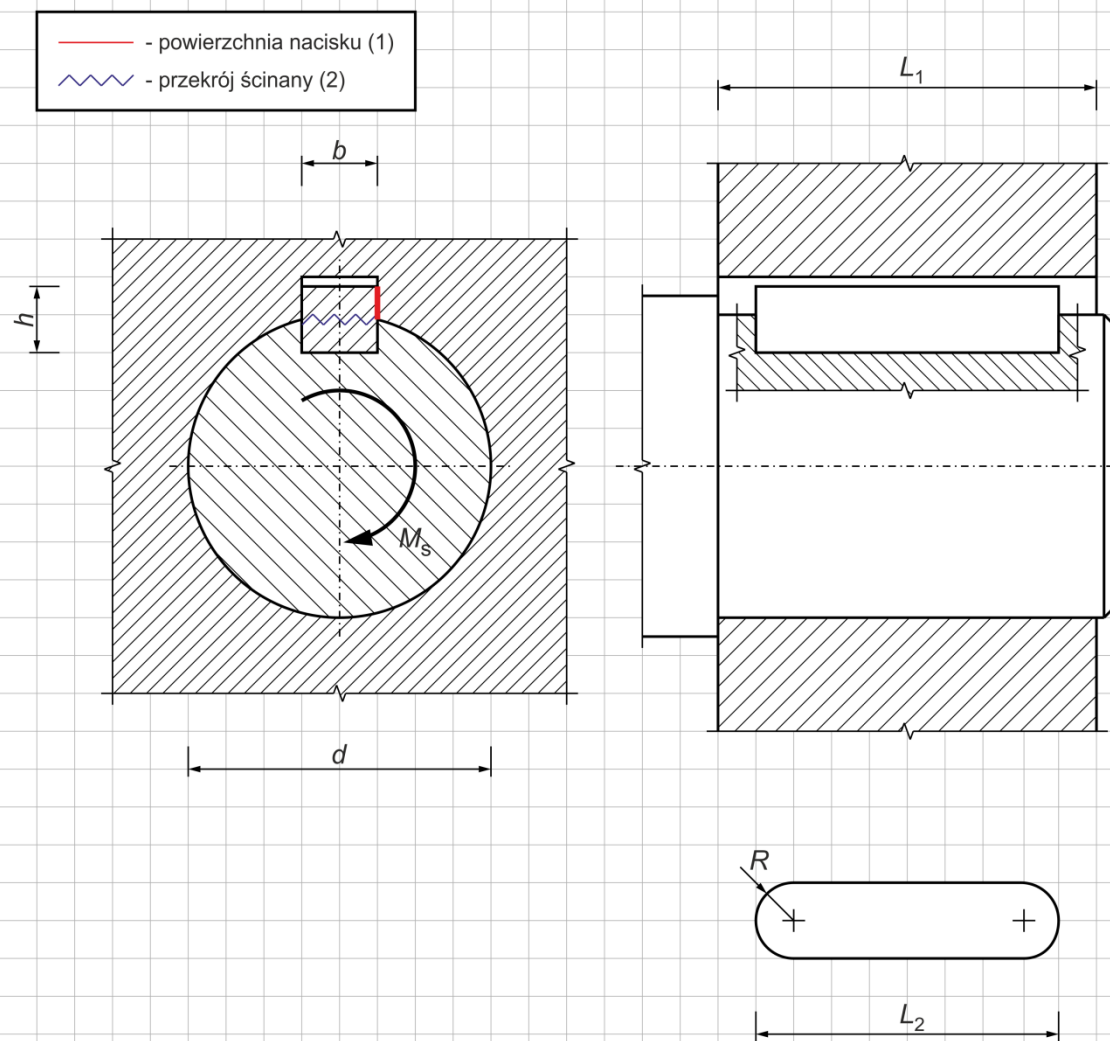
$$A_3 = c \cdot a$$

$$\frac{P}{c \cdot a} \leq k_t \quad | \cdot \frac{c}{k_t}$$

$$\frac{P}{k_t \cdot a} \leq c \quad \rightarrow \quad c \geq \frac{P}{k_t \cdot a} = \frac{30000}{1 \cdot 100} = 300 \text{ mm}$$

PRZYKŁAD 6.7

Na czopie o średnicy $d = 50$ mm osadzono za pomocą połączenia wpustowego piastę o długości $L_1 = 85$ mm. Wpust ma wymiary $b \times h \times L_2 = 14 \times 9 \times 80$ mm. Połączenie obciążone jest momentem skręcającym $M_s = 600000$ N·mm. Sprawdzić, czy połączenie spełnia warunki nośności, przy naprężeniach dopuszczalnych na ścinanie $k_t = 120$ MPa i naprężeniach dopuszczalnych na naciski powierzchniowe $k_d = 90$ MPa.



Rys. 6.7

ROZWIĄZANIE

Siła wywierana na wpust, wynikająca z momentu skręcającego M_s

$$P = \frac{M_s}{\frac{d}{2}} = \frac{2M_s}{d} = \frac{2 \cdot 600000}{50} = 24000 \text{ N}$$

Z warunku nośności na naciski powierzchniowe (powierzchnia 1)

$$\sigma_d = \frac{P}{A_1} \leq k_d$$

$$A_1 = \frac{h}{2} \cdot (L_2 - 2 \cdot R) = \frac{9}{2} \cdot (80 - 2 \cdot 7) = \frac{9}{2} \cdot 66 = 297 \text{ mm}^2$$

$$\sigma_d = \frac{P}{A_1} = \frac{24000}{297} \approx 80.8 \text{ MPa} \leq k_d = 90 \text{ MPa}$$

Z warunku nośności na ścinanie (przekrój 2)

$$\tau = \frac{P}{A_2} \leq k_t$$

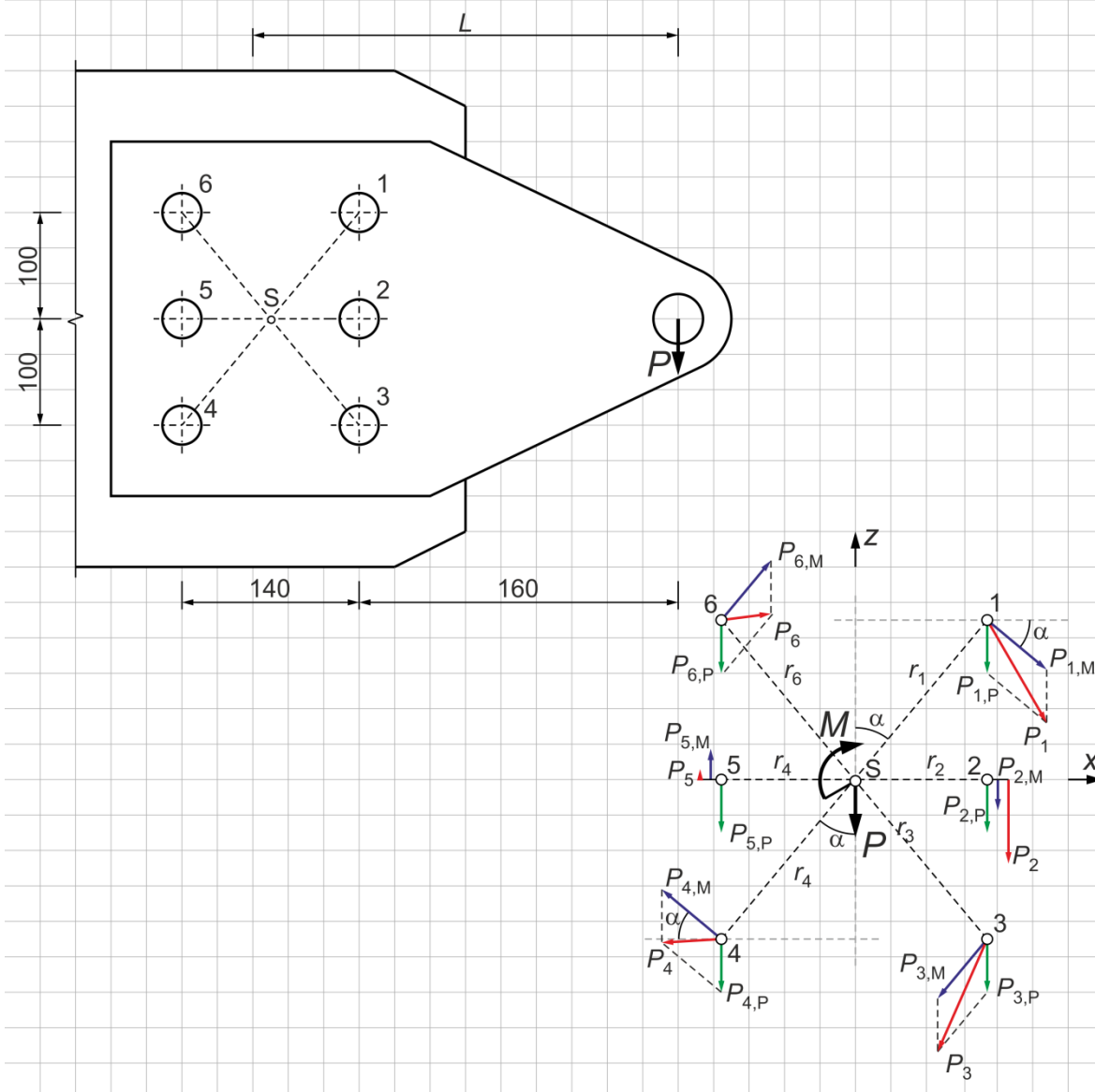
$$A_2 = b \cdot (L_2 - 2 \cdot R) = 14 \cdot (80 - 2 \cdot 7) = 14 \cdot 66 = 924 \text{ mm}^2$$

$$\tau = \frac{P}{A_2} = \frac{24000}{924} \approx 26 \text{ MPa} \leq k_t = 120 \text{ MPa}$$

Połączenie spełnia warunek nośności na naciski powierzchniowe i na ścinanie.

PRZYKŁAD 6.8

Wyznaczyć średnicę nitów niezbędną do przeniesienia siły $P = 3000\text{ N}$ przez złącze (rys. 6.8). Dopuszczalne naprężenia na ścinanie $k_t = 70\text{ MPa}$.



Rys. 6.8

ROZWIĄZANIE

W wyniku redukcji siły P do wspólnego środka geometrycznego S wszystkich przekrojów nitów, otrzymuje się siłę pionową P (dążącą do przesunięcia wspornika w kierunku działania siły) oraz moment M (dążący do obrotu wspornika dookoła środka S).

Siła P jest przenoszona równomiernie na wszystkie nity:

$$P_{i,P} = \frac{P}{n} = \frac{3000}{6} = 500\text{ N} \quad i = 1 \div 6$$

gdzie: n – liczba nitów.

Wartość momentu M wynosi:

$$M = P \cdot L = 3000 \cdot (160 + 70) = 3000 \cdot 230 = 690000 \text{ N}\cdot\text{mm}$$

Siły ścinające nity, wynikające z działania momentu M mają kierunki prostopadłe do linii łączących środek geometryczny przekrojów nitów S oraz środek geometryczny przekrojów poszczególnych nitów i mają wartość proporcjonalną do odległości r_i nita od środka S :

$$M = \sum_{i=1}^n P_{i,M} \cdot r_i$$

przy czym:

$$\frac{P_{i,M}}{P_{j,M}} = \frac{r_i}{r_j} \quad i, j = 1, 2, 3, \dots, 6 \quad i \neq j$$

Największe oddziaływanie $P_{\max,M}$ wystąpi w łączniku najbardziej oddalonym od środka geometrycznego S przekrojów nitów.

Przekształcając powyższe wzory otrzymuje się zależność na siłę od momentu M działającego na dowolny nit:

$$P_{i,M} = \frac{M \cdot r_i}{\sum_{i=1}^n r_i^2}$$

Odległości środków geometrycznych przekrojów nitów od wspólnego środka geometrycznego S wszystkich przekrojów nitów, wynoszą:

$$r_1 = r_3 = r_4 = r_6 = \sqrt{100^2 + 70^2} = \sqrt{10000 + 4900} = \sqrt{14900} \approx 122.1 \text{ mm}$$

$$r_2 = r_5 = 70 \text{ mm}$$

$$\sum_{i=1}^n r_i^2 = 4 \cdot 14900 + 2 \cdot 490 = 59600 + 980 = 60580 \text{ mm}^2$$

Kąt α wynosi:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{70}{100} = 0.7 \quad \rightarrow \quad \alpha \approx 35^\circ$$

Siły od momentu M działające na poszczególne nity:

$$P_{1,M} = P_{3,M} = P_{4,M} = P_{6,M} = \frac{690000 \cdot 122.1}{60580} = \frac{84249000}{60580} \approx 1391 \text{ N}$$

$$P_{2,M} = P_{5,M} = \frac{690000 \cdot 70}{60580} = \frac{48300000}{60580} \approx 797 \text{ N}$$

Siła działająca na nit 1 wynosi:

$$P_1 = \sqrt{P_{1,P}^2 + P_{1,M}^2 + 2 \cdot P_{1,P} \cdot P_{1,M} \cdot \cos(90 - \alpha)} = \sqrt{P_{1,P}^2 + P_{1,M}^2 + 2 \cdot P_{1,P} \cdot P_{1,M} \cdot \sin \alpha} =$$

$$= \sqrt{500^2 + 1391^2 + 2 \cdot 500 \cdot 1391 \cdot \sin 35^\circ} \approx 1727 \text{ N}$$

Siła działająca na nit 2 wynosi:

$$P_2 = P_{2,P} + P_{2,M} = 500 + 797 = 1297 \text{ N}$$

Siła działająca na nit 3 wynosi:

$$P_3 = P_1 = 1727 \text{ N}$$

Siła działająca na nit 4 wynosi:

$$P_4 = \sqrt{P_{4,P}^2 + P_{4,M}^2 + 2 \cdot P_{4,P} \cdot P_{4,M} \cdot \cos(90 + \alpha)} = \sqrt{P_{4,P}^2 + P_{4,M}^2 - 2 \cdot P_{4,P} \cdot P_{4,M} \cdot \sin \alpha} = \\ = \sqrt{500^2 + 1391^2 - 2 \cdot 500 \cdot 1391 \cdot \sin 35^\circ} \approx 1178 \text{ N}$$

Siła działająca na nit 5 wynosi:

$$P_5 = -P_{5,P} + P_{5,M} = -500 + 797 = 297 \text{ N}$$

Siła działająca na nit 6 wynosi:

$$P_6 = P_4 = 1178 \text{ N}$$

Najbardziej obciążone są nity 1 i 3.

Z warunku nośności na ścinanie przekrojów nitów

$$\tau = \frac{P_{\max}}{A} \leq k_t$$

$$A = \frac{\pi \cdot d^2}{4}$$

$$\tau = \frac{P_{\max}}{\frac{\pi \cdot d^2}{4}} = \frac{4P_{\max}}{\pi \cdot d^2} \leq k_t \quad | \cdot \frac{d^2}{k_t}$$

$$\frac{4P_{\max}}{\pi \cdot k_t} \leq d^2 \quad \rightarrow \quad d \geq \sqrt{\frac{4P_{\max}}{\pi \cdot k_t}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 1727}{\pi \cdot 70}} = \sqrt{\frac{6908}{\pi \cdot 70}} \approx 5.6 \text{ N}$$

Przyjęto $d = 6 \text{ mm}$.

PRZYKŁAD 6.9

Wyznaczyć dopuszczalną wartość siły P , jaką może przenieść połączenie sworzniowe (rys. 6.9).
Dopuszczalne naprężenia na rozciąganie $k_r = 120$ MPa, dopuszczalne naprężenia na ścinanie $k_t = 70$ MPa i dopuszczalne naprężenia na naciski powierzchniowe $k_d = 180$ MPa.

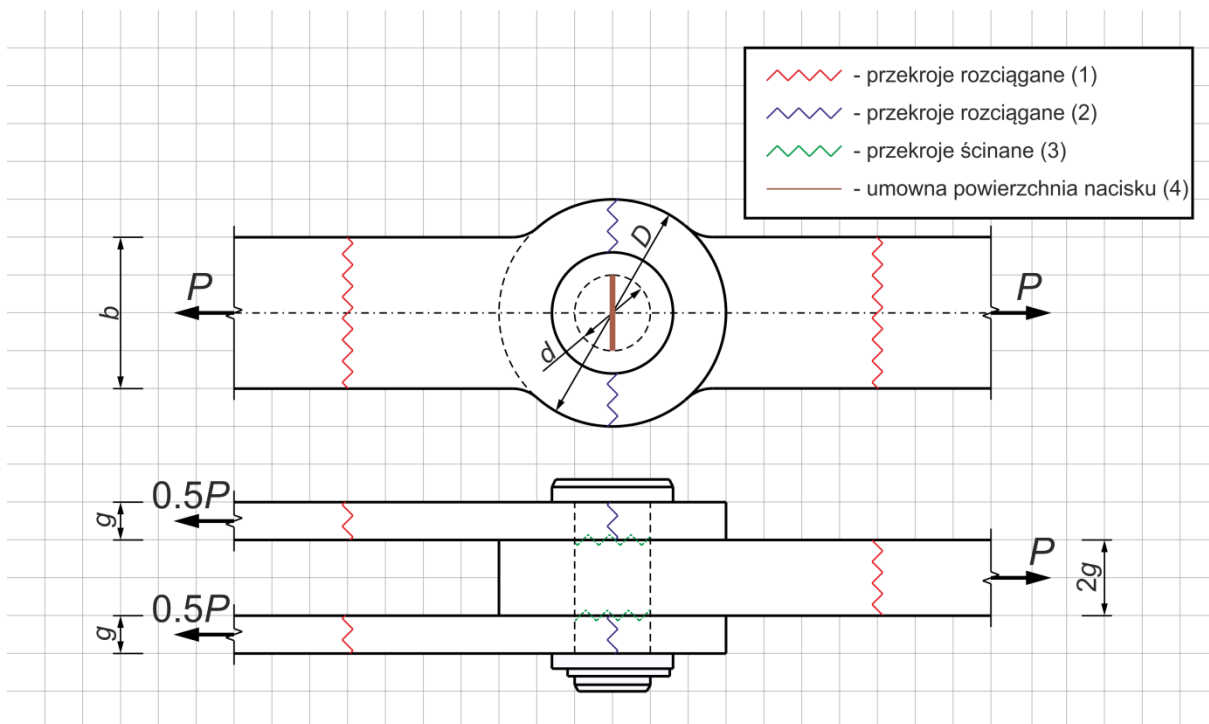
Dane:

$$b = 40 \text{ mm}$$

$$g = 10 \text{ mm}$$

$$d = 20 \text{ mm}$$

$$D = 80 \text{ mm}$$



Rys. 6.9

ROZWIĄZANIE

Z warunku nośności na rozciąganie płaskowników (przekroje 1)

$$\sigma_r = \frac{P}{A_1} \leq k_r$$

$$A_1 = 2 \cdot g \cdot b$$

$$\frac{P}{2 \cdot g \cdot b} \leq k_r \quad | \cdot (2 \cdot g \cdot b)$$

$$P \leq k_r \cdot 2 \cdot g \cdot b = 120 \cdot 2 \cdot 10 \cdot 40 = 96000 \text{ N} = 96 \text{ kN}$$

Z warunku nośności na rozciąganie ucha płaskownika (przekroje 2)

$$\sigma_r = \frac{P}{A_2} \leq k_r$$

$$A_1 = (D - d) \cdot 2 \cdot g$$

$$\frac{P}{(D-d) \cdot 2 \cdot g} \leq k_r \quad | \cdot (D - d) \cdot 2 \cdot g$$

$$P \leq k_r \cdot (D - d) \cdot 2 \cdot g = 120 \cdot (80 - 20) \cdot 2 \cdot 10 = 120 \cdot 60 \cdot 2 \cdot 10 = 144000 \text{ N} = 144 \text{ kN}$$

Z warunku nośności na ścinanie sworznia: (przekroje 3)

$$\tau = \frac{P}{A_3} \leq k_t$$

$$A_3 = \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot n$$

gdzie: n – liczba ścinanych przekrojów sworznia.

$$\frac{P}{\frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot n} \leq k_t \quad | \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot n$$

$$P \leq k_t \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot n = 70 \cdot \frac{\pi \cdot 20^2}{4} \cdot 2 = 70 \cdot \pi \cdot 200 \approx 43982 \text{ N} \approx 44 \text{ kN}$$

Z warunku nośności na naciski powierzchniowe (powierzchnia 4)

$$\sigma_d = \frac{P}{A_4} \leq k_d$$

$$A_4 = 2 \cdot g \cdot d$$

$$\frac{P}{2 \cdot g \cdot d} \leq k_d \quad | \cdot 2 \cdot g \cdot d$$

$$P \leq k_d \cdot 2 \cdot g \cdot d = 180 \cdot 2 \cdot 10 \cdot 20 = 72000 \text{ N} = 72 \text{ kN}$$

Decyduje najmniejsza wartość siły. Dopuszczalne obciążenie złącza wynosi $P = 44 \text{ kN}$.

PRZYKŁAD 6.10

Dwa płaskowniki połączone obustronnie nakładkami przyspawanymi spoiną pachwinową dookoła są obciążone siłą rozciągającą P (rys. 6.10). Zaprojektować połączenie, jeżeli dopuszczalne naprężenia na rozciąganie materiału płaskowników $k_r = 120$ MPa, a dopuszczalne naprężenia na ścinanie spoin $k_t = 50$ MPa.

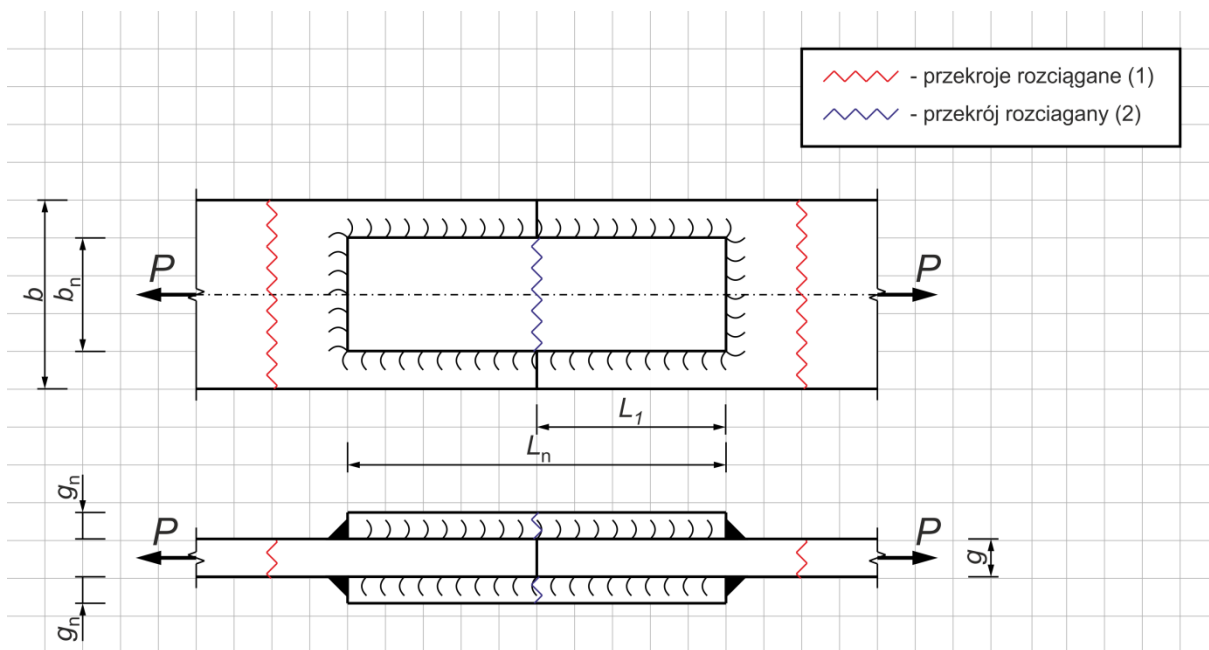
Dane:

$$b = 100 \text{ mm}$$

$$b_n = 80 \text{ mm}$$

$$g = 12 \text{ mm}$$

$$P = 140 \text{ kN}$$



Rys. 6.10

ROZWIĄZANIE

Z warunku nośności na rozciąganie płaskowników (przekrój 1)

$$\sigma_r = \frac{P}{A_1} \leq k_r$$

$$A_1 = b \cdot g = 100 \cdot 12 = 1200 \text{ mm}^2$$

$$\sigma_r = \frac{P}{A_1} = \frac{140000}{1200} \approx 116.7 \text{ MPa} \leq k_r = 120 \text{ MPa}$$

Płaskowniki spełniają warunek nośności na rozciąganie.

Wyznaczenie grubości nakładek g_n z warunku nośności na rozciąganie (przekrój 2)

$$\sigma_r = \frac{0.5P}{A_2} \leq k_r$$

$$A_2 = b_n \cdot g_n = 80g_n$$

$$\frac{0.5P}{80g_n} \leq k_r \quad | \cdot \frac{g_n}{k_r}$$

$$\sigma_r = \frac{0.5P}{80k_r} \leq g_n \quad \rightarrow \quad g_n \geq \frac{0.5 \cdot 140000}{80 \cdot 120} = 7.3 \text{ mm}$$

Przyjęto $g_n = 8 \text{ mm}$.

Zakładamy wysokość spoiny pachwinowej $h = 6 \text{ mm}$, stąd:

$$a = 0.7h = 0.7 \cdot 6 = 4.2 \text{ mm}$$

Z warunku nośności na ścinanie spoin

$$\tau = \frac{0.5P}{L \cdot a} \leq k_t' \quad | \cdot \frac{L}{k_t'}$$

$$\frac{0.5P}{a \cdot k_t'} \leq L \quad \rightarrow \quad L \geq \frac{0.5P}{a \cdot k_t'} = \frac{0.5 \cdot 140000}{4.2 \cdot 50} \approx 333.3 \text{ mm}$$

Przyjęto $L = 340 \text{ mm}$.

$$L = b_n + 2L_1 \quad \rightarrow \quad L_1 = \frac{L - b_n}{2} = \frac{340 - 80}{2} = 130 \text{ mm}$$

Długość nakładek

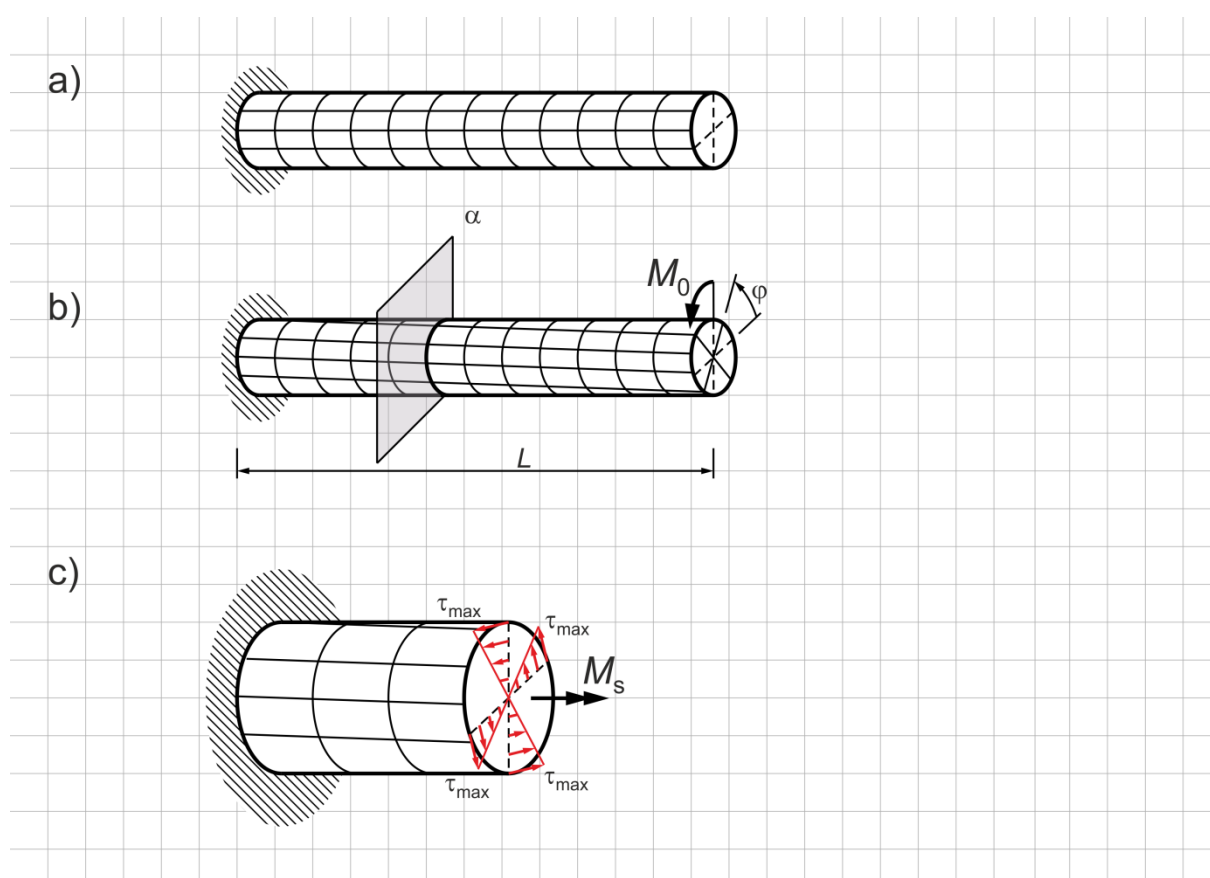
$$L_n = 2L_1 = 2 \cdot 130 = 260 \text{ mm}$$

7.

SKRĘCANIE SWOBODNE PRĘTÓW

Skęćanie swobodne jest drugim (po rozciąganiu/ściskaniu) prostym przypadkiem wytrzymałościowym.

W zadaniu podstawowym rozpatruje się pręt o przekroju kołowym, sztywno zamocowany na lewym końcu, obciążony momentem skęćającym M_0 na prawym końcu (rys. 7.1a,b). W dowolnym przekroju (α) tego pręta występują tylko naprężenia styczne τ (rys. 7.1c). Na rys. 7.1c przedstawiono moment skęćający (wielkość przekrojowa) w środku geometrycznym przekroju poprzecznego.



Rys. 7.1

W zakresie liniowo-sprężystym pracy materiału, naprężenia styczne τ wynoszą:

$$\tau = \frac{M_s}{W_s} \quad (7.1)$$

gdzie:

W_s – wskaźnik przekroju poprzecznego przy skręcaniu (tabela 7.1).

Kąt skręcenia pręta na długości L (od podpory do momenty skręcającego czynnego) wynosi:

$$\varphi = \frac{M_s \cdot L}{G \cdot I_s} \quad (7.2)$$

gdzie:

I_s – moment bezwładności przy skręcaniu,

G – moduł sprężystości postaciowej (moduł Kirchhoffa):

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (7.3)$$

W przypadku pręta o przekroju kołowym moment I_s jest równy centralnemu biegunowemu momentowi bezwładności tego przekroju I_0 . Jest to przypadek szczególny.

Jeśli pręt jest obciążony układem momentów skręcających, to traktuje się go jako zbiór prętów. Kąty skręcenia prętów sumują się, a kąt skręcenia całkowitego wynosi:

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \frac{M_{s_i} \cdot L_i}{G_i \cdot I_{s_i}} \quad (7.4)$$

Pręty skręcane projektowane są z warunku nośności (WN) i/lub warunku użyteczności (WU).

W przypadku warunku nośności należy wyznaczyć wartości naprężeń stycznych w poszczególnych odcinkach pręta i określić największe co do modułu naprężenie, które musi być mniejsze od naprężenia dopuszczalnego przy ścinaniu k_t :

$$\tau_i = \frac{M_{s_i}}{W_{s_i}}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad \rightarrow \quad \tau = |\tau_i|_{\max} \quad (7.5)$$

$$\tau \leq k_t \quad (7.6)$$

W przypadku warunku użyteczności należy wyznaczyć kąty skręcenia w punktach charakterystycznych pręta i określić największy co do modułu kąt skręcenia, który musi być mniejszy od kąta skręcenia dopuszczalnego φ_{dop} :

$$\varphi_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad \rightarrow \quad \varphi = |\varphi_i|_{\max} \quad (7.7)$$

$$\varphi \leq \varphi_{\text{dop}} \quad (7.8)$$

Naprężenia styczne w prętach skręcanych o przekroju cienkościennym otwartym oblicza się ze wzoru (7.1), wykorzystując wzory na moment bezwładności przy skręcaniu i wskaźnik wytrzymałości przy skręcaniu zestawione w tabeli 7.1. Największe naprężenia styczne występują w najgrubszej ścianie profilu cienkościennego otwartego.

Naprężenia styczne w prętach skręcanych o przekroju cienkościennym zamkniętym oblicza się ze wzoru (7.1), wykorzystując wzory na moment bezwładności przy skręcaniu i wskaźnik wytrzymałości przy skręcaniu zestawione w tabeli 7.1 (wiersz 5; A_k – pole powierzchni przekroju

poprzecznego ograniczone konturem przekroju poprzecznego). Największe naprężenia styczne występują w najcieńszej ściance profilu cienkościennego zamkniętego. Kontur przekroju poprzecznego tworzy linia środkowa płaskowników tworzących przekrój poprzeczny.

Naprężenia styczne w sprężynach śrubowych (rozciąganych lub ściskanych) obciążonych siłą P wynoszą:

$$\tau = \tau' + \tau'' = \frac{P}{A} + \frac{M_s}{W_s} = \frac{4 \cdot P}{\pi \cdot d^2} + \frac{8 \cdot P \cdot D}{\pi \cdot d^3} \quad (7.9)$$

gdzie:

τ' – naprężenie styczne w przekroju poprzecznym drutu sprężyny,

τ'' – naprężenie styczne od momentu skręcającego,

A – pole powierzchni przekroju poprzecznego drutu sprężyny,

W_s – wskaźnik przekroju poprzecznego przy skręcaniu drutu sprężyny,

$M_s = P \cdot \frac{D}{2}$ – moment skręcający drut sprężyny,

D – średnica podziałowa sprężyny,

d – średnica drutu.

Wydłużenie/skrócenie sprężyny śrubowej obciążonej siłą P (rozciągającą lub ściskającą) wynoszą:

$$\lambda = \frac{8 \cdot P \cdot D^3 \cdot n}{G \cdot d^4} \quad (7.10)$$

gdzie:

n – liczba czynnych zwojów sprężyny.

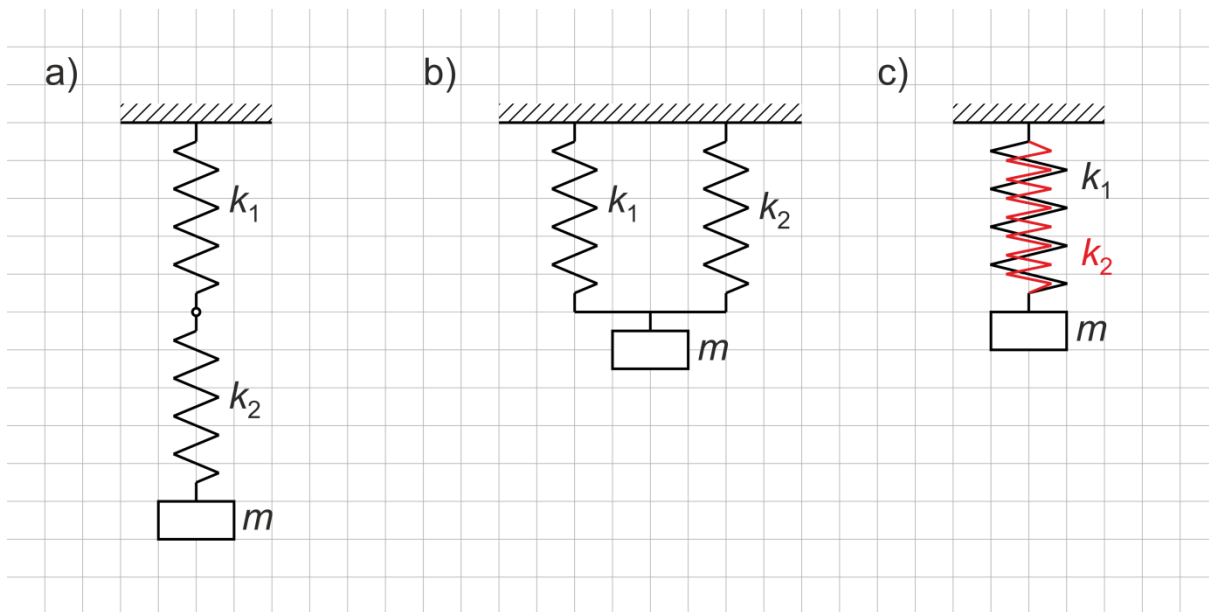
Wyróżnić można szeregowy (rys. 7.2a) i równoległy (rys. 7.2b) układy sprężyn. Dla połączenia szeregowego sztywność zastępcza układu sprężyn wynosi:

$$\frac{1}{k_z} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{k_i} \quad (7.11)$$

Dla połączenia równoległego sztywność zastępcza układu sprężyn wynosi:

$$k_z = \sum_{i=1}^n k_i \quad (7.12)$$

Dla połączenia współśrodkowego sprężyn (rys. 7.2c) sztywność zastępcza układu sprężyn wyznacza się ze wzoru (7.12).

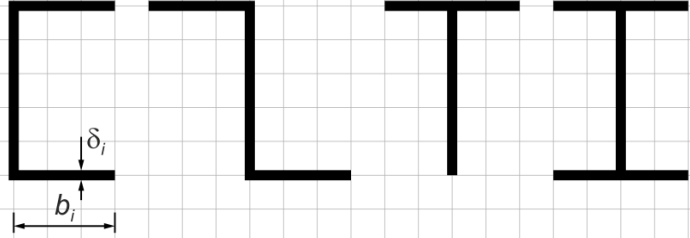
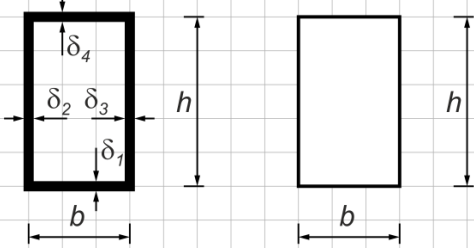


Rys. 7.2

Tabela 7.1 Momenty bezwładności przy skręcaniu i wskaźniki wytrzymałości przy skręcaniu wybranych przekrojów

Przekrój	Moment bezwładności przy skręcaniu	Wskaźnik wytrzymałości przy skręcaniu
	$I_s = \frac{\pi r^4}{2}$ <p>lub</p> $I_s = \frac{\pi d^4}{32}$	$W_s = \frac{\pi r^3}{2}$ <p>lub</p> $W_s = \frac{\pi d^3}{16}$
	$I_s = \frac{\pi}{2} (r_z^4 - r_w^4)$ <p>lub</p> $I_s = \frac{\pi}{32} (d_z^4 - d_w^4)$	$W_s = \frac{\pi}{2} \left(\frac{r_z^4 - r_w^4}{r_z} \right)$ <p>lub</p> $W_s = \frac{\pi}{16} \left(\frac{d_z^4 - d_w^4}{d_z} \right)$
	$I_s = 2\pi r^3 \delta$ <p>lub</p> $I_s = 0.25\pi d^3 \delta$	$W_s = 2\pi r^2 \delta$ <p>lub</p> $W_s = 0.5\pi d^2 \delta$

Tabela 7.1 Biegunowe momenty bezwładności i wskaźniki przy skręcaniu wybranych przekrojów

	$I_s = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^n b_i \delta_i^3$	$W_s = \frac{I_s}{\delta_{\max}}$
	$I_s = \frac{4A_k^2}{\sum_{i=1}^n \frac{b_i}{\delta_i}}$ $A_k = b \cdot h$	$W_s = 2A_k \delta_{\min}$ $A_k = b \cdot h$

PRZYKŁAD 7.1

Wyznaczyć średnicę pręta o przekroju kołowym z warunków nośności i użyteczności (rys. 7.3a). Średnicę [mm] zaokrąglić do liczby całkowitej.

Dane:

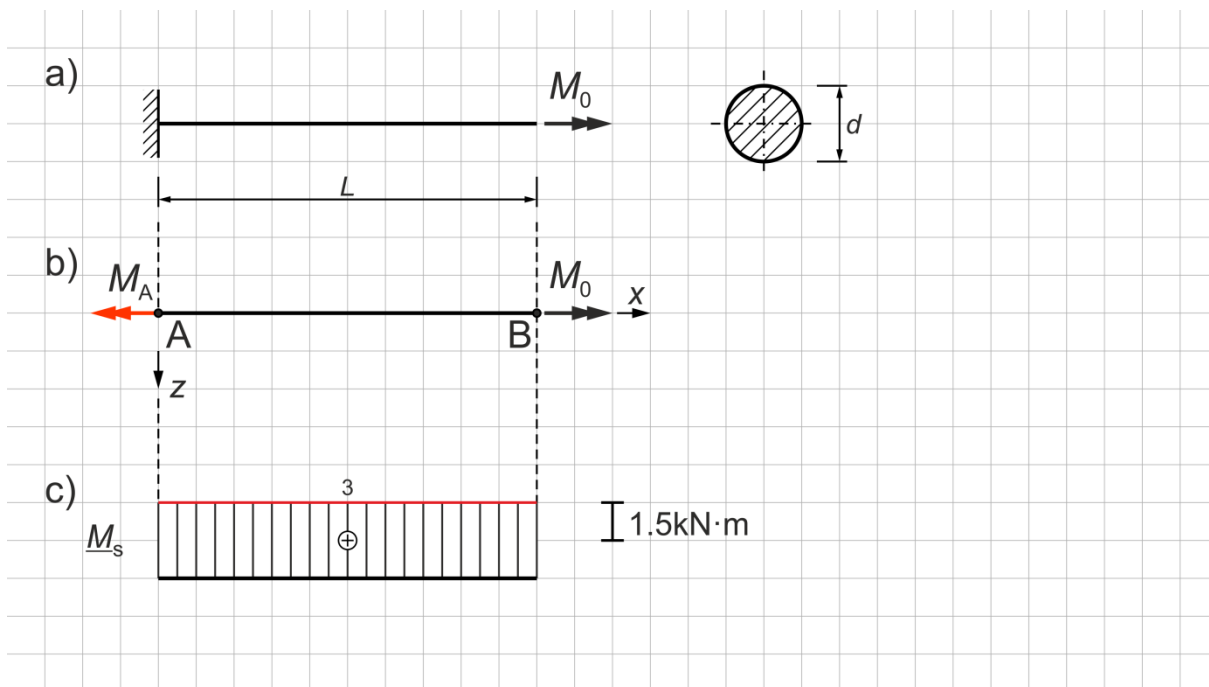
$$M_0 = 3 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$L = 2.0 \text{ m}$$

$$G = 80 \text{ GPa}$$

$$k_t = 100 \text{ MPa}$$

$$\varphi_{\text{dop}} = 1^\circ$$



Rys. 7.3

ROZWIĄZANIE

Na podporze powstaje moment skręcający podporowy M_A (rys. 7.3b).

Reakcja podporowa

$$\sum M_x = 0: \quad -M_A + M_0 = 0 \quad \rightarrow \quad M_A = M_0 = 3 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Moment skręcający mają stałą wartość na całej długości pręta.

Wartość momentu skręcającego (rys. 7.3c)

$$M_{s,AB} = M_A = M_0 = 3 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Moment bezwładności przy skręcaniu i wskaźnik przekroju przy skręcaniu

$$I_s = \frac{\pi d^4}{32}$$

$$W_s = \frac{\pi d^3}{16}$$

Warunek nośności

$$\tau = |\tau|_{\max} \leq k_t \rightarrow \tau = \frac{M_{s,AB}}{W_s} \leq k_t$$

$$\frac{M_{s,AB}}{\frac{\pi d^3}{16}} \leq k_t \rightarrow \frac{16M_{s,AB}}{\pi d^3} \leq k_t \quad | \cdot \frac{d^3}{k_t}$$

$$\frac{16M_{s,AB}}{\pi k_t} \leq d^3 \rightarrow d \geq \sqrt[3]{\frac{16M_{s,AB}}{\pi k_t}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 3000000}{\pi \cdot 100}} = \sqrt[3]{\frac{48000000}{\pi \cdot 100}} \approx 53.5 \text{ mm}$$

Warunek użytkowalności

$$\varphi = |\varphi|_{\max} \leq \varphi_d \rightarrow \varphi = \frac{M_{s,AB} \cdot L}{G \cdot I_s} \leq \varphi_d$$

$$\frac{M_{s,AB} \cdot L}{G \cdot \frac{\pi d^4}{32}} \leq \varphi_d \rightarrow \frac{32 \cdot M_{s,AB} \cdot L}{G \cdot \pi d^4} \leq \varphi_d \quad | \cdot \frac{d^4}{\varphi_d}$$

$$\frac{32 \cdot M_{s,AB} \cdot L}{G \cdot \pi \cdot \varphi_d} \leq d^4 \rightarrow d \geq \sqrt[4]{\frac{32 \cdot M_{s,AB} \cdot L}{G \cdot \pi \cdot \varphi_d}}$$

Zamiana stopni na radiany

$$\varphi_d = 1^\circ = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot 1^\circ = 0.01745 \text{ rad}$$

$$d \geq \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 3000000 \cdot 2000}{80000 \cdot \pi \cdot 0.01745}} \approx 81.3 \text{ mm}$$

Decyduje warunek użytkowalności. Przyjęto średnicę 82 mm.

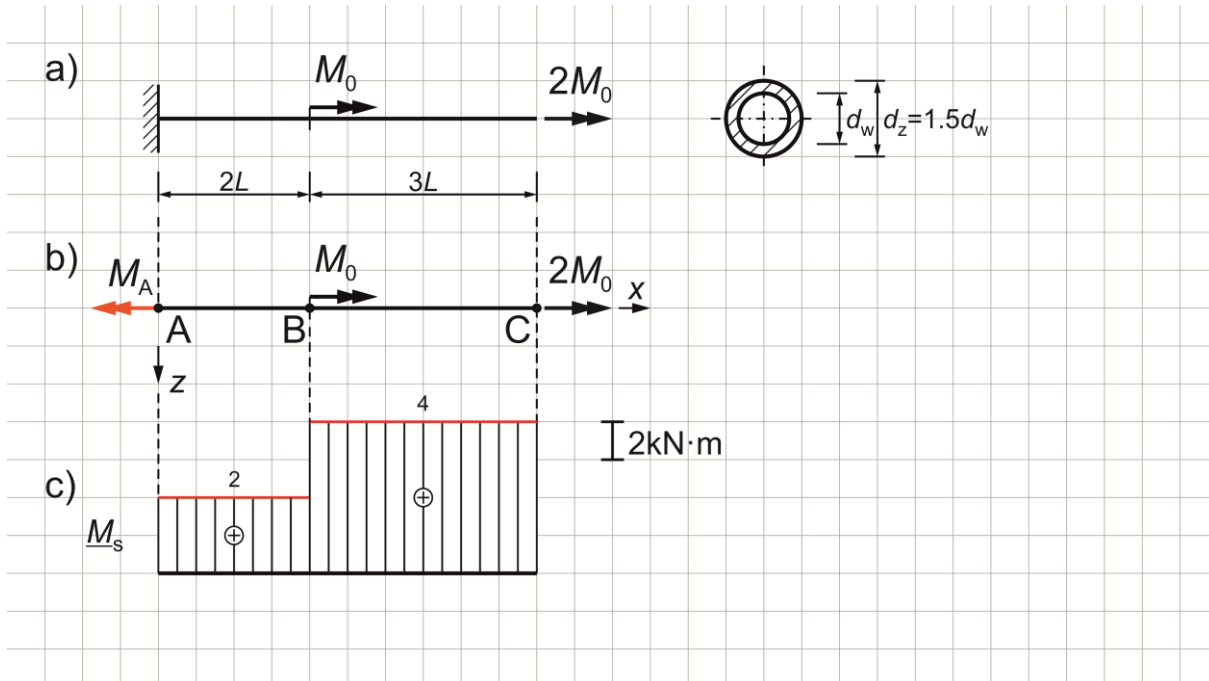
PRZYKŁAD 7.2

Wyznaczyć wymiary pierścieniowego przekroju poprzecznego z warunku nośności (rys. 7.4a). Średnicę [mm] zaokrąglić do liczby całkowitej.

Dane:

$$M_0 = 2 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$k_t = 100 \text{ MPa}$$



Rys. 7.4

ROZWIĄZANIE

Na podporze powstaje moment skręcający podporowy M_A (rys. 7.4b).

Reakcja podporowa

$$\begin{aligned} \sum M_x = 0: \quad & -M_A + M_0 + 2M_0 = 0 \\ & -M_A + 3M_0 = 0 \quad \rightarrow \quad M_A = 3M_0 = 3 \cdot 2 = 6 \text{ kN}\cdot\text{m} \end{aligned}$$

Wartości momentów skręcających (rys. 7.4c)

$$M_{s,AB} = M_A = 2 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{s,BC} = 2M_0 = 2 \cdot 2 = 4 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Wskaźnik przekroju przy skręcaniu

$$W_s = \frac{\pi}{16} \left(\frac{d_z^4 - d_w^4}{d_z} \right) = \frac{\pi}{16} \left(\frac{(1.5d_w)^4 - d_w^4}{1.5d_w} \right) = \frac{\pi}{16} \left(\frac{5.0625 \cdot d_w^4 - d_w^4}{1.5d_w} \right) \approx 0.5318 d_w^3$$

Przekrój poprzeczny jest stały na całej długości pręta, stąd największe naprężenia styczne wystąpią w przekroju, w którym występuje największy moment skręcający.

Warunek nośności

$$\tau = |\tau|_{\max} \leq k_t \rightarrow \tau = \frac{M_{s,BC}}{W_s} \leq k_t$$

$$\frac{M_{s,BC}}{0.5318d_w^3} \leq k_t \quad | \cdot \frac{d_w^3}{k_t}$$

$$\frac{M_{s,BC}}{0.5318k_t} \leq d_w^3 \rightarrow d_w \geq \sqrt[3]{\frac{M_{s,BC}}{0.5318k_t}} = \sqrt[3]{\frac{2 \cdot M_0}{0.5318k_t}} = \sqrt[3]{\frac{2 \cdot 2000000}{0.5318 \cdot 100}} \approx 42.2 \text{ mm}$$

Przyjęto średnicę wewnętrzną $d_w = 43 \text{ mm}$ i średnicę zewnętrzną $d_z = 65 \text{ mm}$.

PRZYKŁAD 7.3

Wyznaczyć wymiary kołowego cienkościennego przekroju poprzecznego pręta z warunku użytkowości (rys. 7.5a). Wymiary [mm] zaokrąglić do liczby całkowitej.

Dane:

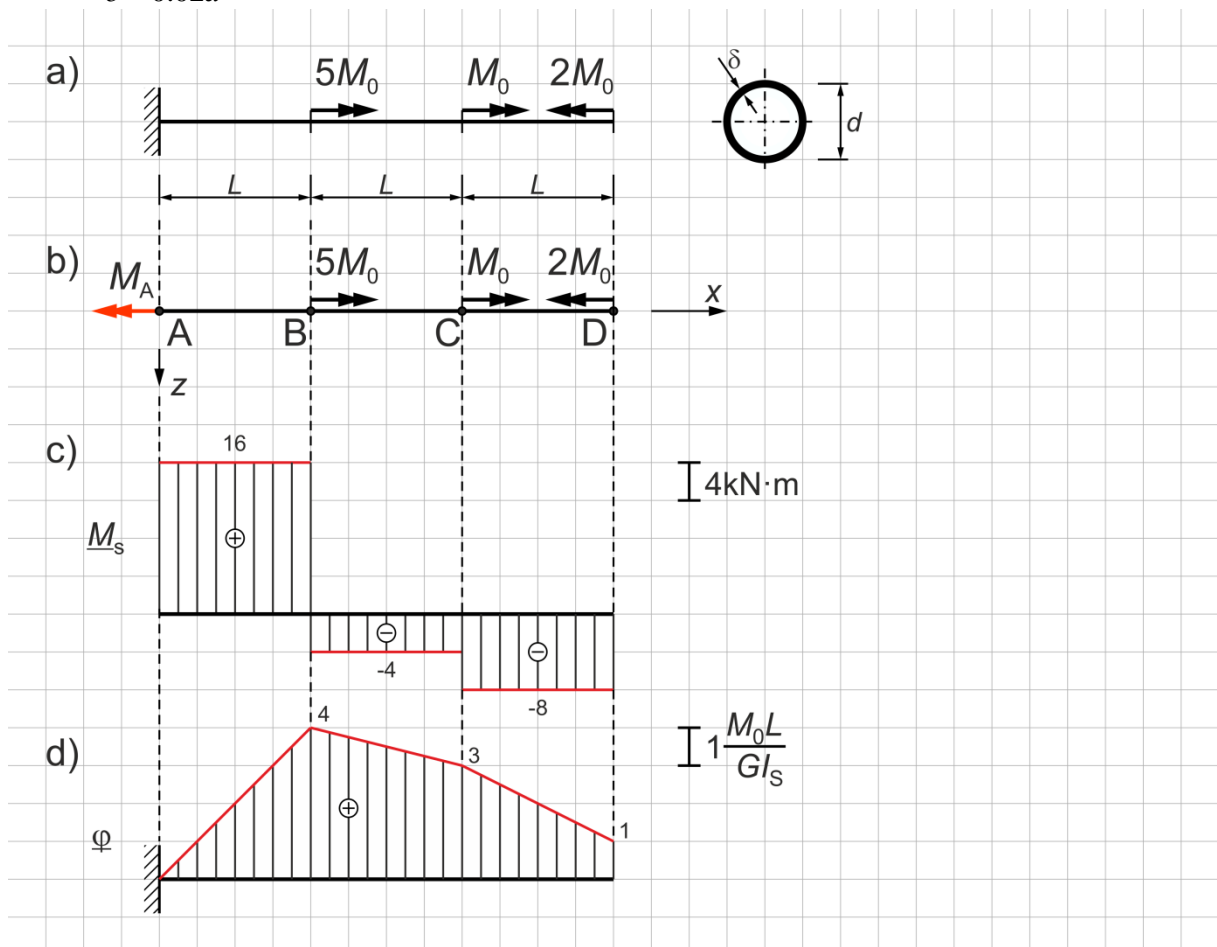
$$M_0 = 4 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$L = 1.0 \text{ m}$$

$$G = 80 \text{ GPa}$$

$$\varphi_{\text{dop}} = 2^\circ$$

$$\delta = 0.02d$$



Rys. 7.5

ROZWIĄZANIE

Na podporze powstaje moment skręcający podporowy M_A (rys. 7.5b).

Reakcja podporowa

$$\begin{aligned}\sum M_x = 0: \quad & -M_A + 5M_0 + M_0 - 2M_0 = 0 \\ & -M_A + 4M_0 = 0 \quad \rightarrow \quad M_A = 4M_0 = 4 \cdot 4 = 16 \text{ kN}\cdot\text{m}\end{aligned}$$

Wartości momentów skręcających (rys. 7.5c)

$$M_{s,AB} = M_A = 4M_0 = 4 \cdot 4 = 16 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{s,BC} = M_0 - 2M_0 = -M_0 = -4 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{s,CD} = -2M_0 = -2 \cdot 4 = -8 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Moment bezwładności na skręcanie

$$I_s = 0.25\pi d^3 \delta = 0.25\pi d^3 \cdot 0.02d = 0.005\pi d^4$$

Kąty skręcenia pręta (rys. 7.5d)

$$\varphi_A = 0$$

$$\varphi_B = \varphi_A + \varphi_{AB} = 0 + \frac{M_{s,AB} \cdot L}{G \cdot I_s} = \frac{4M_0 \cdot L}{G \cdot I_s}$$

$$\varphi_C = \varphi_B + \varphi_{BC} = \frac{4M_0 \cdot L}{G \cdot I_s} + \frac{M_{s,BC} \cdot L}{G \cdot I_s} = \frac{4M_0 \cdot L}{G \cdot I_s} + \frac{(-M_0) \cdot L}{G \cdot I_s} = \frac{4M_0 \cdot L}{G \cdot I_s} - \frac{M_0 \cdot L}{G \cdot I_s} = \frac{3M_0 \cdot L}{G \cdot I_s}$$

$$\varphi_D = \varphi_C + \varphi_{CD} = \frac{3M_0 \cdot L}{G \cdot I_s} + \frac{M_{s,CD} \cdot L}{G \cdot I_s} = \frac{3M_0 \cdot L}{G \cdot I_s} + \frac{(-2M_0) \cdot L}{G \cdot I_s} = \frac{3M_0 \cdot L}{G \cdot I_s} - \frac{2M_0 \cdot L}{G \cdot I_s} = \frac{M_0 \cdot L}{G \cdot I_s}$$

Największy kąt skręcenia występuje w punkcie B.

Warunek użytkowalności

$$\varphi = |\varphi|_{\max} \leq \varphi_{\text{dop}} \quad \rightarrow \quad \varphi = \frac{4M_0 \cdot L}{G \cdot I_s} \leq \varphi_{\text{dop}}$$

$$\frac{4M_0 \cdot L}{G \cdot 0.005\pi d^4} \leq \varphi_{\text{dop}} \quad \rightarrow \quad \frac{800 \cdot M_0 \cdot L}{G \cdot \pi d^4} \leq \varphi_{\text{dop}} \quad | \cdot \frac{d^4}{\varphi_{\text{dop}}}$$

$$\frac{800 \cdot M_0 \cdot L}{G \cdot \pi \cdot \varphi_{\text{dop}}} \leq d^4 \quad \rightarrow \quad d \geq \sqrt[4]{\frac{800 \cdot M_0 \cdot L}{G \cdot \pi \cdot \varphi_{\text{dop}}}}$$

Zamiana stopni na radiany

$$\varphi_{\text{dop}} = 2^\circ = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot 2^\circ = 0.03491 \text{ rad}$$

$$d \geq \sqrt[4]{\frac{800 \cdot 4000000 \cdot 1000}{80000 \cdot \pi \cdot 0.03491}} \approx 138.2 \text{ mm}$$

Przyjęto średnicę $d = 140 \text{ mm}$ i grubość ścianki $\delta = 3 \text{ mm}$.

PRZYKŁAD 7.4

Wyznaczyć wymiary pręta o przekroju cienkościennym zamkniętym z warunków nośności i użyteczności (rys. 7.6a).

Dane:

$$M_0 = 5 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

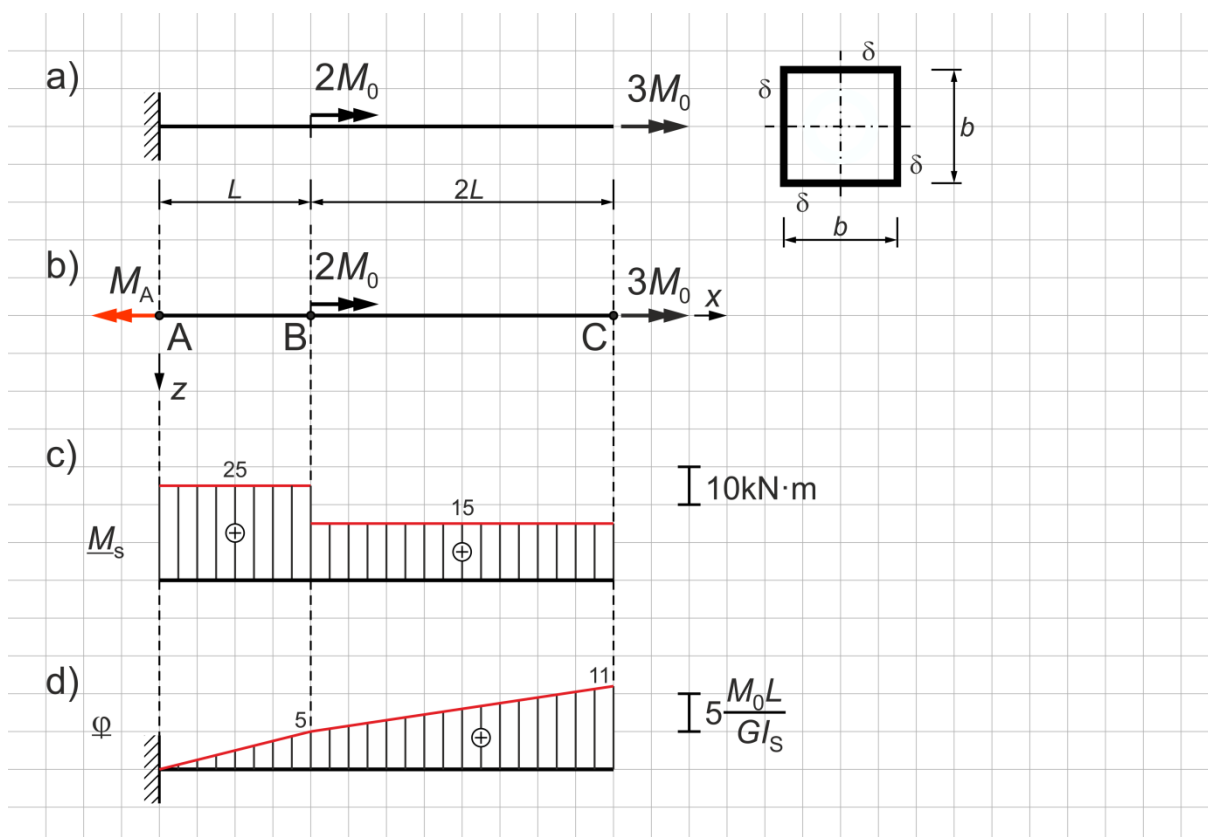
$$L = 1.0 \text{ m}$$

$$G = 80 \text{ GPa}$$

$$k_t = 100 \text{ MPa}$$

$$\varphi_{\text{dop}} = 1^\circ$$

$$\delta = 0.01b$$



Rys. 7.6

ROZWIĄZANIE

Na podporze powstaje moment skręcający podporowy M_A (rys. 7.6b).

Reakcja podporowa

$$\sum M_x = 0: \quad -M_A + 2M_0 + 3M_0 = 0$$

$$-M_A + 5M_0 = 0 \rightarrow M_A = 5M_0 = 5 \cdot 5 = 25 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Wartości momentów skręcających w poszczególnych odcinkach pręta (rys. 7.6c)

$$M_{s,AB} = M_A = 5M_0 = 5 \cdot 5 = 25 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{s,BC} = 3M_0 = 3 \cdot 5 = 15 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Moment bezwładności przy skręcaniu i wskaźnik przekroju przy skręcaniu

$$A_k = b \cdot b = b^2$$

$$I_s = \frac{4A_k^2}{\sum_{i=1}^n \frac{b_i}{\delta_i}} = \frac{4 \cdot (b^2)^2}{4 \cdot \frac{b}{\delta}} = \frac{b^4}{\frac{0.01b}{b}} = \frac{0.01b^5}{b} = 0.01b^4$$

$$W_s = 2A_k \delta_{\min} = 2 \cdot b^2 \cdot 0.01b = 0.02b^3$$

Przekrój poprzeczny jest stały na całej długości pręta, stąd największe naprężenia styczne wystąpią w przekroju, w którym występuje największy moment skręcający.

Warunek nośności

$$\tau = |\tau|_{\max} \leq k_t \rightarrow \tau = \frac{M_{s,AB}}{W_s} \leq k_t$$

$$\frac{M_{s,AB}}{0.02b^3} \leq k_t \rightarrow \frac{5M_0}{0.02b^3} \leq k_t \rightarrow \frac{250M_0}{b^3} \leq k_t \quad | \cdot \frac{b^3}{k_t}$$

$$\frac{250M_0}{k_t} \leq b^3 \rightarrow b \geq \sqrt[3]{\frac{250M_0}{k_t}} = \sqrt[3]{\frac{250 \cdot 5000000}{100}} \approx 232.1 \text{ mm}$$

Kąty skręcenia pręta (rys. 7.6d)

$$\varphi_A = 0$$

$$\varphi_B = \varphi_A + \varphi_{AB} = 0 + \frac{M_{s,AB} \cdot L}{G \cdot I_s} = \frac{5M_0 \cdot L}{G \cdot I_s}$$

$$\varphi_C = \varphi_B + \varphi_{BC} = \frac{5M_0 \cdot L}{G \cdot I_s} + \frac{M_{s,BC} \cdot 2L}{G \cdot I_s} = \frac{5M_0 \cdot L}{G \cdot I_s} + \frac{3M_0 \cdot 2L}{G \cdot I_s} = \frac{5M_0 \cdot L}{G \cdot I_s} + \frac{6M_0 \cdot L}{G \cdot I_s} = \frac{11M_0 \cdot L}{G \cdot I_s}$$

Największy kąt skręcenia występuje w punkcie C.

Warunek użyteczności

$$\varphi = |\varphi|_{\max} \leq \varphi_{\text{dop}} \rightarrow \varphi = \frac{11M_0 \cdot L}{G \cdot I_s} \leq \varphi_{\text{dop}}$$

$$\frac{11M_0 \cdot L}{G \cdot 0.01b^4} \leq \varphi_{\text{dop}} \rightarrow \frac{1100 \cdot M_0 \cdot L}{G \cdot b^4} \leq \varphi_{\text{dop}} \quad | \cdot \frac{b^4}{\varphi_{\text{dop}}}$$

$$\frac{1100 \cdot M_0 \cdot L}{G \cdot \varphi_{\text{dop}}} \leq b^4 \rightarrow b \geq \sqrt[4]{\frac{1100 \cdot M_0 \cdot L}{G \cdot \varphi_{\text{dop}}}}$$

Zamiana stopni na radiany

$$\varphi_{\text{dop}} = 1^\circ = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot 1^\circ = 0.01745 \text{ rad}$$

$$b \geq \sqrt[4]{\frac{1100 \cdot 5000000 \cdot 1000}{80000 \cdot 0.01745}} \approx 250.5 \text{ mm}$$

Decyduje warunek użytkowalności.

Przyjęto wymiar $b = 252 \text{ mm}$ i grubość ścianki $\delta = 2.6 \text{ mm}$.

PRZYKŁAD 7.5

Pręt poddany jest działaniu momentu skręcającego (rys. 7.7). Dobrać minimalne wymagane wymiary przekroju poprzecznego zamkniętego i otwartego tak, aby spełnione były warunki nośności i użytkowalności.

Dane:

$$M_0 = 20 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

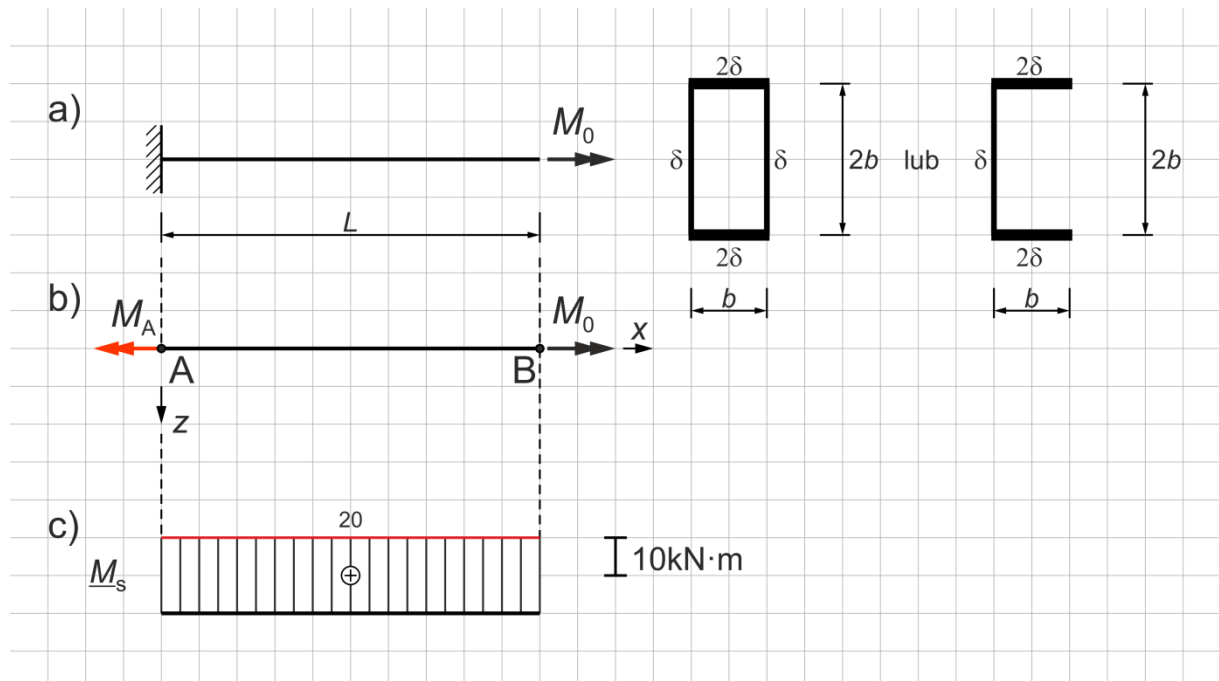
$$L = 2.0 \text{ m}$$

$$G = 80 \text{ GPa}$$

$$k_t = 100 \text{ MPa}$$

$$\varphi_{\text{dop}} = 1^\circ$$

$$\delta = 0.02b$$



Rys. 7.7

ROZWIĄZANIE

Obciążenie czynne wywołuje moment podporowy M_A (rys. 7.7b).

Reakcja

$$\sum M_x = 0: \quad -M_A + M_0 = 0 \quad \rightarrow \quad M_A = M_0 = 20 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Momenty skręcające mają stałą wartość na długości pręta.

Wartość momentu skręcającego (rys. 7.7c)

$$M_{s,AB} = M_A = M_0 = 20 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Zamiana stopni na radiany

$$\varphi_{\text{dop}} = 1^\circ = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot 1^\circ = 0.01745 \text{ rad}$$

PRZEKRÓJ ZAMKNIĘTY

Moment bezwładności na skręcanie i wskaźnik przekroju przy skręcaniu

$$A_k = 2b \cdot b = 2b^2$$

$$I_s = \frac{4A_k^2}{\sum_{i=1}^n \frac{b_i}{\delta_i}} = \frac{4 \cdot (2b^2)^2}{\frac{b}{2\delta} + \frac{2b}{\delta} + \frac{b}{2\delta} + \frac{2b}{\delta}} = \frac{4 \cdot 4b^4}{\frac{b+4b+b+4b}{2\delta}} = \frac{16b^4 \cdot 2\delta}{10b} = 1.6b^3 \cdot 2 \cdot 0.02b = 0.064b^4$$

$$W_s = 2A_k \delta_{\min} = 2 \cdot 2b^2 \cdot \delta = 4b^2 \cdot 0.02b = 0.08b^3$$

Warunek nośności

$$\tau = |\tau|_{\max} \leq k_t \quad \rightarrow \quad \tau = \frac{M_{s,AB}}{W_s} \leq k_t$$

$$\frac{M_{s,AB}}{0.08b^3} \leq k_t \quad \rightarrow \quad \frac{M_0}{0.08b^3} \leq k_t \quad | \cdot \frac{b^3}{k_t}$$

$$\frac{M_0}{0.08k_t} \leq b^3 \quad \rightarrow \quad b \geq \sqrt[3]{\frac{M_0}{0.08k_t}} = \sqrt[3]{\frac{20000000}{0.08 \cdot 100}} \approx 135.7 \text{ mm}$$

Warunek użytkowalności

$$\varphi = |\varphi|_{\max} \leq \varphi_{\text{dop}} \quad \rightarrow \quad \varphi = \frac{M_{s,AB} \cdot L}{G \cdot I_s} \leq \varphi_{\text{dop}}$$

$$\frac{M_{s,AB} \cdot L}{G \cdot 0.064b^4} \leq \varphi_{\text{dop}} \quad \rightarrow \quad \frac{M_0 \cdot L}{G \cdot 0.064b^4} \leq \varphi_{\text{dop}} \quad | \cdot \frac{b^4}{\varphi_{\text{dop}}}$$

$$\frac{M_0 \cdot L}{G \cdot 0.064 \cdot \varphi_{\text{dop}}} \leq b^4 \quad \rightarrow \quad b \geq \sqrt[4]{\frac{M_0 \cdot L}{G \cdot 0.064 \cdot \varphi_{\text{dop}}}} = \sqrt[4]{\frac{20000000 \cdot 2000}{80000 \cdot 0.064 \cdot 0.01745}} \approx 145.5$$

Decyduje warunek użytkowalności.

Przyjęto wymiar $b = 146 \text{ mm}$ i grubość ścianki $\delta = 3 \text{ mm}$.

PRZEKRÓJ OTWARTY

Moment bezwładności przy skręcaniu i wskaźnik przekroju przy skręcaniu

$$I_s = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^n b_i \delta_i^3 = \frac{1}{3} [b \cdot (2\delta)^3 + 2b \cdot \delta^3 + b \cdot (2\delta)^3] = \frac{1}{3} (b \cdot 8\delta^3 + 2b\delta^3 + b \cdot 8\delta^3) = \frac{1}{3} \cdot 18b\delta^3 = 6b\delta^3 =$$

$$= 6b(0.02b)^3 = 4.8 \cdot 10^{-5} b^4$$

$$W_s = \frac{I_s}{\delta_{\max}} = \frac{4.8 \cdot 10^{-5} b^4}{2\delta} = \frac{4.8 \cdot 10^{-5} b^4}{2 \cdot 0.02b} = 1.2 \cdot 10^{-3} b^3$$

Warunek nośności

$$\tau = |\tau|_{\max} \leq k_t \rightarrow \tau = \frac{M_{s,AB}}{W_s} \leq k_t$$

$$\frac{M_{s,AB}}{1.2 \cdot 10^{-3} b^3} \leq k_t \rightarrow \frac{M_0}{1.2 \cdot 10^{-3} b^3} \leq k_t \quad | \cdot \frac{b^3}{k_t}$$

$$\frac{M_0}{1.2 \cdot 10^{-3} k_t} \leq b^3 \rightarrow b \geq \sqrt[3]{\frac{M_0}{1.2 \cdot 10^{-3} k_t}} = \sqrt[3]{\frac{20000000}{1.2 \cdot 10^{-3} \cdot 100}} \approx 550.3 \text{ mm}$$

Warunek użyteczności

$$\varphi = |\varphi|_{\max} \leq \varphi_{\text{dop}} \rightarrow \varphi = \frac{M_{s,AB} \cdot L}{G \cdot I_s} \leq \varphi_{\text{dop}}$$

$$\frac{M_{s,AB} \cdot L}{G \cdot 4.8 \cdot 10^{-5} b^4} \leq \varphi_{\text{dop}} \rightarrow \frac{M_0 \cdot L}{G \cdot 4.8 \cdot 10^{-5} b^4} \leq \varphi_{\text{dop}} \quad | \cdot \frac{b^4}{\varphi_{\text{dop}}}$$

$$\frac{M_0 \cdot L}{G \cdot 4.8 \cdot 10^{-5} \varphi_{\text{dop}}} \leq b^4 \rightarrow b \geq \sqrt[4]{\frac{M_0 \cdot L}{G \cdot 4.8 \cdot 10^{-5} \varphi_{\text{dop}}}} = \sqrt[4]{\frac{20000000 \cdot 2000}{80000 \cdot 4.8 \cdot 10^{-5} \cdot 0.01745}} \approx 879.0 \text{ mm}$$

Decyduje warunek użyteczności.

Przyjęto wymiar $b = 880 \text{ mm}$ i grubość ścianki $\delta = 18 \text{ mm}$.

Zadanie pokazuje przewagę profili zamkniętych nad otwartymi w przenoszeniu momentów skręcających.

PRZYKŁAD 7.6

Wyznaczyć wykresy momentu skręcającego M_s , maksymalnego naprężenia stycznego τ i kąta obrotu φ dla pręta o kołowym przekroju poprzecznym, przedstawionym na rys. 7.8.

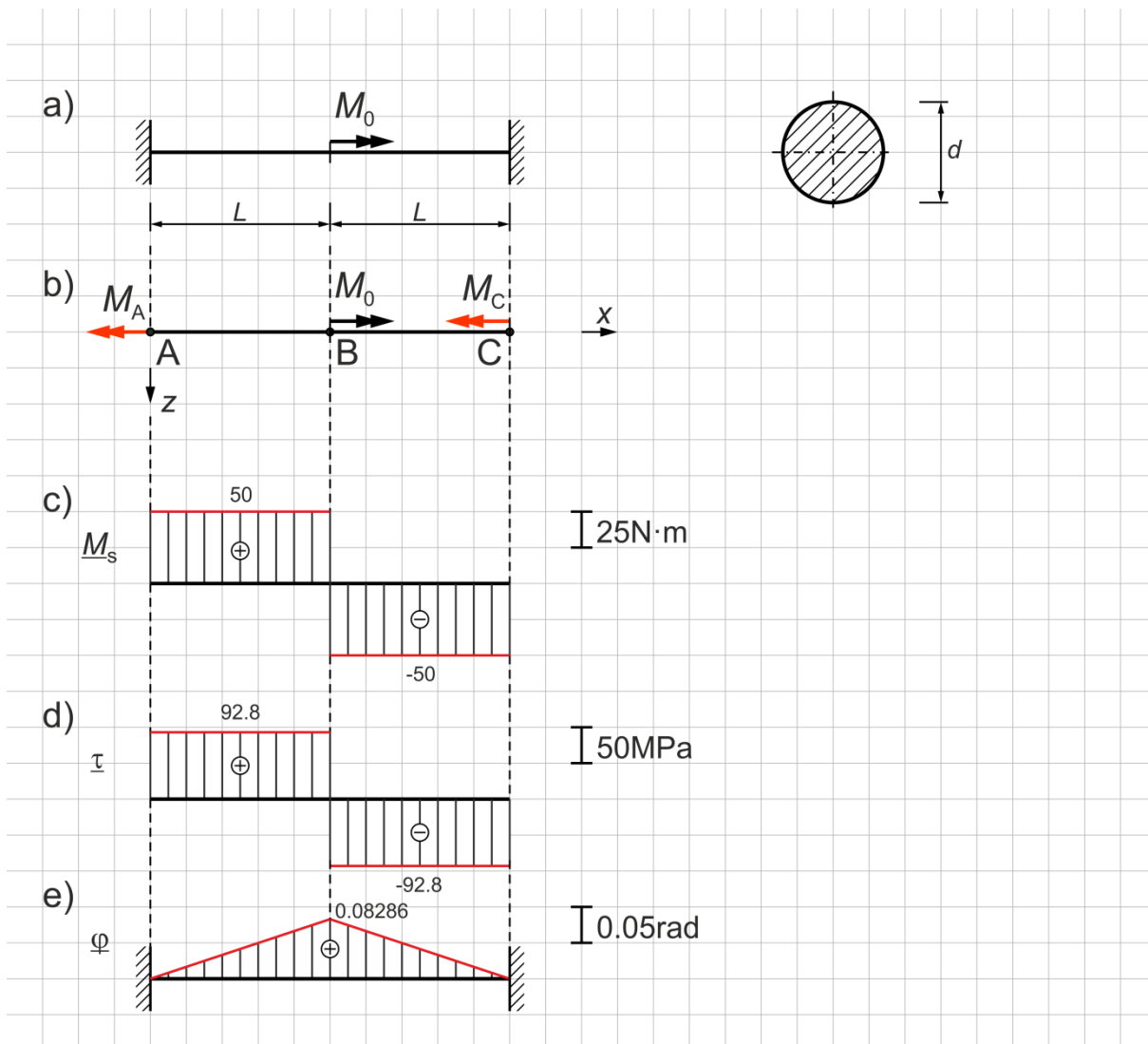
Dane:

$$M_0 = 100 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$L = 0.5 \text{ m}$$

$$G = 80 \text{ GPa}$$

$$d = 14 \text{ mm}$$



Rys. 7.8

ROZWIĄZANIE

Niezerowymi reakcjami w rozpatrywanym układzie są momenty podporowe M_A i M_C (rys. 7.8b). Pręt jest geometrycznie niezmienny (GN) i jednokrotnie statycznie niewyznaczalny (SN) ze względu na skręcanie. Równanie równowagi statycznej sumy momentów względem osi x nie wystarcza do wyznaczenia dwóch reakcji. Należy wprowadzić dodatkowe równanie, będące tzw. warunkiem geometrycznym.

- 1) $\sum M_x = 0: -M_A + M_0 - M_C = 0$ (równanie równowagi statycznej)
 2) $\varphi_C = 0: \varphi_{AB} + \varphi_{BC} = 0$ (warunek geometryczny)

Momenty skręcające

$$M_{s,AB} = M_0 - M_C$$

$$M_{s,BC} = -M_C$$

Moment bezwładności przy skręcaniu i wskaźnik przekroju przy skręcaniu

$$I_s = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi \cdot 14^4}{32} = \frac{\pi \cdot 38416}{32} \approx 3771.5 \text{ mm}^4$$

$$W_s = \frac{\pi d^3}{16} = \frac{\pi \cdot 14^3}{16} = \frac{\pi \cdot 2744}{16} \approx 538.8 \text{ mm}^3$$

z równania 2)

$$\varphi_{AB} + \varphi_{BC} = 0 \rightarrow \frac{M_{s,AB} \cdot L}{G \cdot I_s} + \frac{M_{s,BC} \cdot L}{G \cdot I_s} = 0$$

$$\frac{(M_0 - M_C) \cdot L}{G \cdot I_s} + \frac{(-M_C) \cdot L}{G \cdot I_s} = 0 \quad | \cdot \frac{G \cdot I_s}{L}$$

$$M_0 - M_C - M_C = 0 \rightarrow M_0 - 2M_C = 0$$

$$2M_C = M_0 \rightarrow M_C = 0.5M_0 = 0.5 \cdot 100 = 50 \text{ N}\cdot\text{m}$$

z równania 1)

$$M_A = M_0 - M_C = M_0 - 0.5M_0 = 0.5M_0 = 0.5 \cdot 100 = 50 \text{ N}\cdot\text{m}$$

Wartości momentów skręcających (rys. 7.8c)

$$M_{s,AB} = M_0 - M_C = M_0 - 0.5M_0 = 0.5M_0 = 0.5 \cdot 100 = 50 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$M_{s,BC} = -M_C = -0.5M_0 = -0.5 \cdot 100 = -50 \text{ N}\cdot\text{m}$$

Wartości maksymalnych naprężeń stycznych (rys. 7.8d)

$$\tau_{AB} = \frac{M_{s,AB}}{W_s} = \frac{0.5M_0}{W_s} = \frac{50000}{538.8} \approx 92.8 \text{ MPa}$$

$$\tau_{BC} = \frac{M_{s,BC}}{W_s} = -\frac{0.5M_0}{W_s} = -\frac{50000}{538.8} \approx -92.8 \text{ MPa}$$

Wartości kątów skręcenia (rys. 7.8e)

$$\varphi_A = 0$$

$$\varphi_B = \varphi_A + \varphi_{AB} = 0 + \frac{M_{s,AB} \cdot L}{G \cdot I_s} = \frac{0.5M_0 \cdot L}{G \cdot I_s} = \frac{0.5 \cdot 100000 \cdot 500}{80000 \cdot 3771.5} = 0.08286 \text{ rad}$$

$$\varphi_C = 0$$

PRZYKŁAD 7.7

Wyznaczyć wykresy momentu skręcającego M_s , maksymalnego naprężenia stycznego τ i kąta obrotu φ dla pręta o kołowym przekroju poprzecznym, przedstawionym na rys. 7.9.

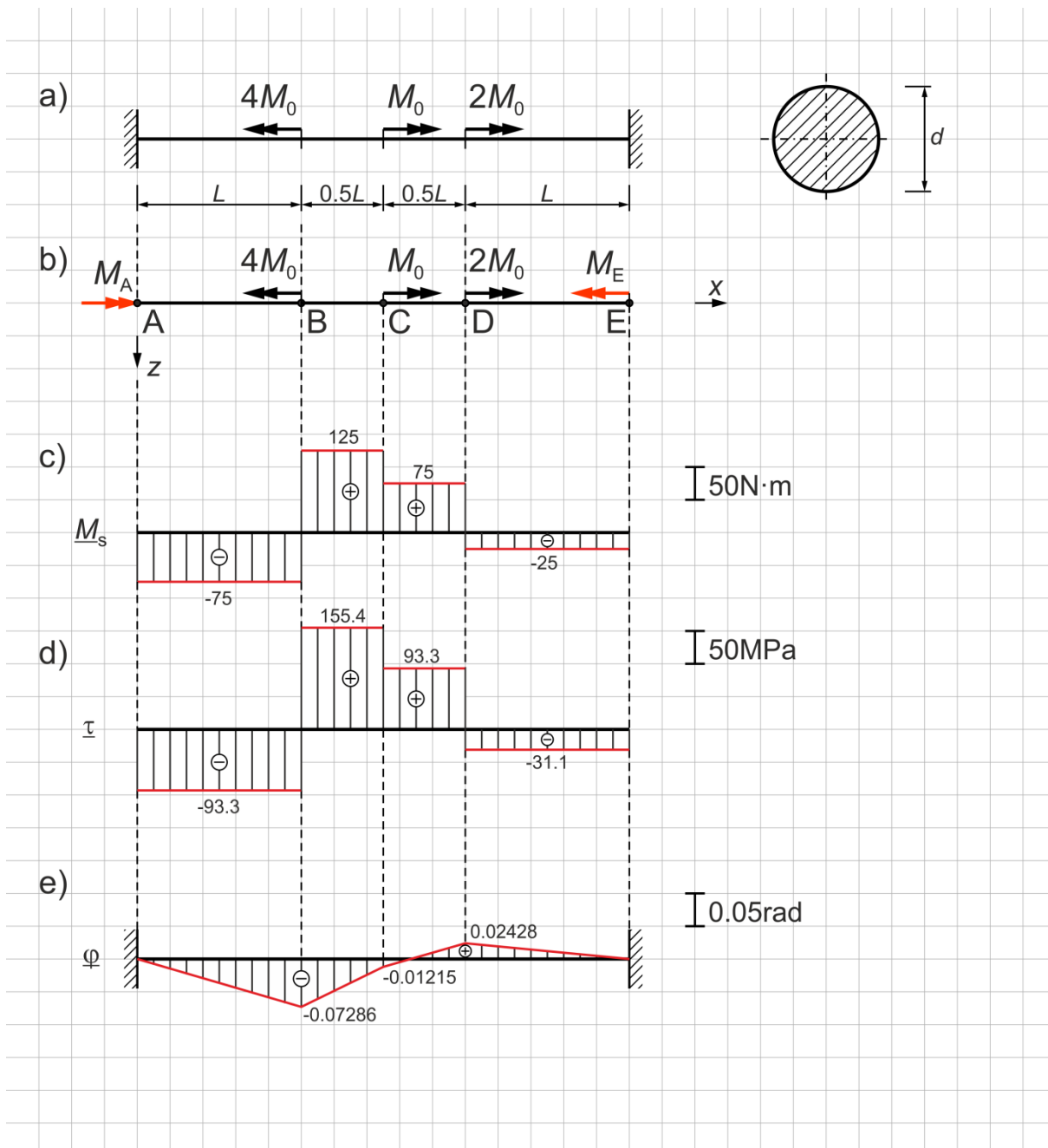
Dane:

$$M_0 = 50 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$L = 0.5 \text{ m}$$

$$G = 80 \text{ GPa}$$

$$d = 16 \text{ mm}$$



Rys. 7.9

ROZWIĄZANIE

Niezerowymi reakcjami w rozpatrywanym układzie są momenty podporowe M_A i M_E (rys. 7.9b). Pręt jest geometrycznie niezmienny (GN) i jednokrotnie statycznie niewyznaczalny (SN) ze względu na skręcanie (są również dodatkowe więzy nadliczbowe 1 lub 2 w zależności od założeń). Równanie równowagi statycznej sumy momentów względem osi x nie wystarcza do wyznaczenia dwóch reakcji. Należy wprowadzić dodatkowe równanie, będące tzw. warunkiem geometrycznym.

$$1) \quad \sum M_x = 0: \quad M_A - 4M_0 + M_0 + 2M_0 - M_E = 0 \quad (\text{równanie równowagi statycznej})$$

$$2) \quad \varphi_E = 0: \quad \varphi_{AB} + \varphi_{BC} + \varphi_{CD} + \varphi_{DE} = 0 \quad (\text{warunek geometryczny})$$

Momenty skręcające

$$M_{s,AB} = -4M_0 + M_0 + 2M_0 - M_E = -M_0 - M_E$$

$$M_{s,BC} = M_0 + 2M_0 - M_E = 3M_0 - M_E$$

$$M_{s,CD} = 2M_0 - M_E$$

$$M_{s,DE} = -M_E$$

Moment bezwładności przy skręcaniu i wskaźnik przekroju przy skręcaniu

$$I_s = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi \cdot 16^4}{32} = \frac{\pi \cdot 65536}{32} \approx 6434.0 \text{ mm}^4$$

$$W_s = \frac{\pi d^3}{16} = \frac{\pi \cdot 16^3}{16} = \frac{\pi \cdot 4096}{16} \approx 804.3 \text{ mm}^3$$

z równania 2)

$$\varphi_{AB} + \varphi_{BC} + \varphi_{CD} + \varphi_{DE} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{M_{s,AB} \cdot L}{G \cdot I_s} + \frac{M_{s,BC} \cdot 0.5L}{G \cdot I_s} + \frac{M_{s,CD} \cdot 0.5L}{G \cdot I_s} + \frac{M_{s,DE} \cdot L}{G \cdot I_s} = 0$$

$$\frac{(-M_0 - M_E) \cdot L}{G \cdot I_s} + \frac{(3M_0 - M_E) \cdot 0.5L}{G \cdot I_s} + \frac{(2M_0 - M_E) \cdot 0.5L}{G \cdot I_s} + \frac{(3 - M_E) \cdot L}{G \cdot I_s} = 0 \quad | \cdot \frac{G \cdot I_s}{L}$$

$$-M_0 - M_E + 0.5(3M_0 - M_E) + 0.5(2M_0 - M_E) - M_E = 0$$

$$-M_0 - M_E + 1.5M_0 - 0.5M_E + M_0 - 0.5M_E - M_E = 0$$

$$1.5M_0 - 3M_E = 0 \quad \rightarrow \quad 3M_E = 1.5M_0 \quad \rightarrow \quad M_E = 0.5M_0 = 0.5 \cdot 50 = 25 \text{ N} \cdot \text{m}$$

z równania 1)

$$M_A - 4M_0 + M_0 + 2M_0 - 0.5M_0 = 0$$

$$M_A - 1.5M_0 = 0 \quad \rightarrow \quad M_A = 1.5M_0 = 1.5 \cdot 50 = 75 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Wartości momentów skręcających (rys. 7.9c):

$$M_{s,AB} = -M_0 - M_E = -M_0 - 0.5M_0 = -1.5M_0 = -1.5 \cdot 50 = -75 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$M_{s,BC} = 3M_0 - M_E = 3M_0 - 0.5M_0 = 2.5M_0 = 2.5 \cdot 50 = 125 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$M_{s,CD} = 2M_0 - M_E = 2M_0 - 0.5M_0 = 1.5M_0 = 1.5 \cdot 50 = 75 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$M_{s,DE} = -M_E = -0.5M_0 = -0.5 \cdot 50 = -25 \text{ N}\cdot\text{m}$$

Wartości maksymalnych naprężeń stycznych (rys. 7.9d)

$$\tau_{AB} = \frac{M_{s,AB}}{W_s} = \frac{-1.5M_0}{W_s} = \frac{-1.5 \cdot 50000}{804.3} \approx -93.3 \text{ MPa}$$

$$\tau_{BC} = \frac{M_{s,BC}}{W_s} = \frac{2.5M_0}{W_s} = \frac{2.5 \cdot 50000}{804.3} \approx 155.4 \text{ MPa}$$

$$\tau_{CD} = \frac{M_{s,CD}}{W_s} = \frac{1.5M_0}{W_s} = \frac{1.5 \cdot 50000}{804.3} \approx 93.3 \text{ MPa}$$

$$\tau_{DE} = \frac{M_{s,DE}}{W_s} = \frac{-0.5M_0}{W_s} = \frac{-0.5 \cdot 50000}{804.3} \approx 31.1 \text{ MPa}$$

Wartości kątów skręcenia (rys. 7.9e)

$$\varphi_A = 0$$

$$\varphi_B = \varphi_A + \varphi_{AB} = 0 + \frac{M_{s,AB} \cdot L}{G \cdot I_s} = \frac{-1.5M_0 \cdot L}{G \cdot I_s} = \frac{-1.5 \cdot 50000 \cdot 500}{80000 \cdot 6434} = -0.07286 \text{ rad}$$

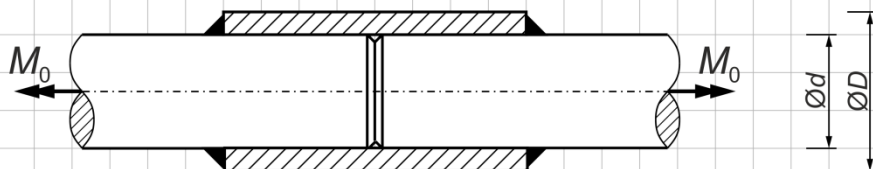
$$\begin{aligned} \varphi_C &= \varphi_B + \varphi_{BC} = \varphi_B + \frac{M_{s,BC} \cdot 0.5L}{G \cdot I_s} = -0.07286 + \frac{2.5M_0 \cdot 0.5L}{G \cdot I_s} = -0.07286 + \frac{2.5 \cdot 50000 \cdot 0.5 \cdot 500}{80000 \cdot 6434} = \\ &= -0.01215 \text{ rad} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_D &= \varphi_C + \varphi_{CD} = \varphi_C + \frac{M_{s,CD} \cdot 0.5L}{G \cdot I_s} = -0.01215 + \frac{1.5M_0 \cdot 0.5L}{G \cdot I_s} = -0.01215 + \frac{1.5 \cdot 50000 \cdot 0.5 \cdot 500}{80000 \cdot 6434} = \\ &= 0.02428 \text{ rad} \end{aligned}$$

$$\varphi_E = 0$$

PRZYKŁAD 7.8

Obliczyć średnicę d wału, średnicę D tulei i wysokość spoiny a połączenia przenoszącego moment skręcający $M_0 = 9000 \text{ N}\cdot\text{m}$. Naprężenia dopuszczalne na ścinanie materiału rodzimego i spoiny $k_t = 60 \text{ MPa}$.



Rys. 7.10

ROZWIĄZANIE

Wskaźnik wytrzymałości przy skręcaniu przekroju wału

$$W_{s1} = \frac{\pi d^3}{16}$$

Warunek nośności na skręcanie wału

$$\tau = |\tau|_{\max} \leq k_t \rightarrow \tau = \frac{M_0}{W_{s1}} \leq k_t$$

$$\tau = \frac{M_0}{\frac{\pi d^3}{16}} \leq k_t \rightarrow \frac{16M_0}{\pi d^3} \leq k_t \quad | \cdot \frac{d^3}{k_t}$$

$$\frac{16M_0}{\pi k_t} \leq d^3 \rightarrow d \geq \sqrt[3]{\frac{16M_0}{\pi k_t}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 9000000}{\pi \cdot 60}} = 91.4 \text{ mm}$$

Przyjęto $d = 92 \text{ mm}$.

Warunek nośności na ścinanie spoiny

$$\tau = \frac{T}{A} \leq k_t$$

$$T = \frac{M_0}{\frac{d}{2}} = \frac{2M_0}{d}$$

$$A = \pi \cdot d \cdot a \sqrt{2}$$

$$\tau = \frac{T}{\pi \cdot d \cdot a \sqrt{2}} \leq k_t \quad | \cdot \frac{a}{k_t}$$

$$\frac{T}{\pi \cdot d \cdot \sqrt{2} \cdot k_t} \leq a \rightarrow a \geq \frac{T}{\pi \cdot d \cdot \sqrt{2} \cdot k_t} = \frac{2M_0}{\pi \cdot d^2 \cdot \sqrt{2} \cdot k_t} = \frac{2 \cdot 9000000}{\pi \cdot 92^2 \cdot \sqrt{2} \cdot 60} = 8 \text{ mm}$$

Aby można było wykonać spoinę o wysokości $a = 8$ mm, średnica tulei musi być równa:

$$D = d + 2 \cdot a\sqrt{2} = 92 + 2 \cdot 8 \cdot \sqrt{2} = 114.6 \text{ mm}$$

Przyjęto $D = 116$ mm.

Wskaźnik wytrzymałości przy skręcaniu przekroju tulei

$$W_{sII} = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{16D} = \frac{\pi(116^4 - 92^4)}{16 \cdot 116} = 185219.6 \text{ mm}^3$$

Sprawdzenie tulei z warunku nośności na skręcanie

$$\tau = |\tau|_{\max} \leq k_t \rightarrow \frac{M_0}{W_{sII}} \leq k_t$$

$$\tau = \frac{M_0}{W_{sII}} = \frac{9000000}{185219.6} = 48.6 \text{ MPa} \leq k_t = 60 \text{ MPa}$$

Warunek nośności na skręcanie tulei jest spełniony.

PRZYKŁAD 7.9

Sprężyna śrubowa o średnicy podziałowej $D = 50$ mm, średnicy drutu $d = 6$ mm i ilości zwojów $n = 10$, obciążona jest siłą rozciągającą $P = 500$ N. Obliczyć maksymalne naprężenia ścinające w przekroju drutu i wydłużenie sprężyny. Moduł sprężystości postaciowej materiału drutu sprężyny $G = 80$ GPa.

ROZWIĄZANIE

Naprężenia od ścinania przekroju drutu sprężyny

$$\tau' = \frac{P}{A} = \frac{4 \cdot P}{\pi \cdot d^2} = \frac{4 \cdot 500}{\pi \cdot 6^2} = \frac{2000}{\pi \cdot 36} = 17.7 \text{ MPa}$$

Naprężenia od skręcania przekroju drutu sprężyny

$$\tau'' = \frac{M_s}{W_s} = \frac{8 \cdot P \cdot D}{\pi \cdot d^3} = \frac{8 \cdot 500 \cdot 50}{\pi \cdot 6^3} = \frac{200000}{\pi \cdot 216} = 294.7 \text{ MPa}$$

Wypadkowe naprężenie styczne

$$\tau_{\max} = \tau' + \tau'' = 17.7 + 294.7 = 312.4 \text{ MPa}$$

Wydłużenie całkowite sprężyny

$$\lambda = \frac{8 \cdot P \cdot D^3 \cdot n}{G \cdot d^4} = \frac{8 \cdot 500 \cdot 50^3 \cdot 10}{80000 \cdot 6^4} = 48.2 \text{ mm}$$

PRZYKŁAD 7.10

Sprężyna śrubowa pod działaniem siły ściskającej $P = 600 \text{ N}$ może wydłużyć się o $\lambda_d = 5 \text{ cm}$. Naprężenia dopuszczalne na ścinanie materiału sprężyny $k_t = 400 \text{ MPa}$. Moduł sprężystości postaciowej materiału drutu sprężyny $G = 80 \text{ GPa}$. Wyznaczyć średnicę podziałową sprężyny D , średnicę drutu sprężyny d i liczbę zwojów n , przy założeniu $D/d = 10$.

ROZWIĄZANIE

Warunek nośności

$$\tau \leq k_t$$

$$\tau = \tau' + \tau'' = \frac{4 \cdot P}{\pi \cdot d^2} + \frac{8 \cdot P \cdot D}{\pi \cdot d^3} = \frac{4P}{\pi \cdot d^2} \left(1 + \frac{2D}{d}\right) = \frac{4P}{\pi \cdot d^2} \left(\frac{d}{d} + \frac{2D}{d}\right) = \frac{4P}{\pi \cdot d^2} \left(\frac{d+2D}{d}\right) = \frac{4P(d+2D)}{\pi \cdot d^3}$$

$$\frac{D}{d} = 10 \rightarrow D = 10d$$

$$\frac{4P(d+2D)}{\pi \cdot d^3} = \frac{4P(d+2 \cdot 10d)}{\pi \cdot d^3} = \frac{4P(d+20d)}{\pi \cdot d^3} = \frac{4P \cdot 21d}{\pi \cdot d^3} = \frac{84Pd}{\pi \cdot d^3} = \frac{84P}{\pi \cdot d^2}$$

$$\frac{84P}{\pi \cdot d^2} \leq k_t \quad | \cdot \frac{d^2}{k_t}$$

$$\frac{84P}{\pi \cdot k_t} \leq d^2 \rightarrow d \geq \sqrt{\frac{84P}{\pi \cdot k_t}} = \sqrt{\frac{84 \cdot 600}{\pi \cdot 400}} = 6.3 \text{ mm}$$

Przyjęto średnicę drutu $d = 7 \text{ mm}$.

Średnica podziałowa sprężyny

$$D = 10d = 10 \cdot 7 = 70 \text{ mm}$$

Warunek użytkowości

$$\lambda_d = \frac{8 \cdot P \cdot D^3 \cdot n}{G \cdot d^4} \rightarrow n = \frac{\lambda_d \cdot G \cdot d^4}{8 \cdot P \cdot D^3} = \frac{50 \cdot 80000 \cdot 7^4}{8 \cdot 600 \cdot 70^3} = 5.8$$

Przyjęto liczbę zwojów $n = 6$.

PRZYKŁAD 7.11

Dwie sprężyny w układzie współśrodkowym (rys. 7.11a) ściskane są siłą $P = 3.5$ kN. Długość swobodna sprężyny zewnętrznej jest o 80 mm większa od długości swobodnej sprężyny wewnętrznej. Wyznaczyć siły, przemieszczenia (skrócenia) i naprężenia w obu sprężynach, Sporządzić charakterystykę sztywnościową układu.

Dane:

$$D_1 = 100 \text{ mm}$$

$$D_2 = 60 \text{ mm}$$

$$n_1 = 12 \text{ zwojów}$$

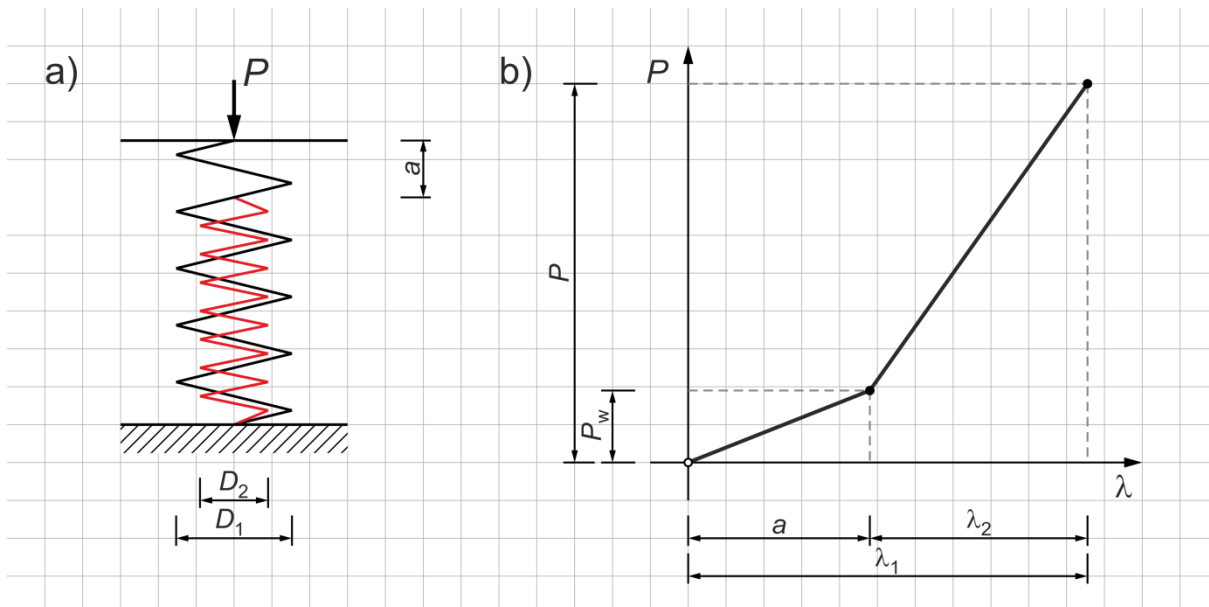
$$n_2 = 10 \text{ zwojów}$$

$$P = 3.5 \text{ kN}$$

$$a = 80 \text{ mm}$$

$$d = 10 \text{ mm}$$

$$G = 80 \text{ GPa}$$



Rys. 7.11

ROZWIĄZANIE

Siłę P_w potrzebną do ściśnięcia sprężyny zewnętrznej o $a = 80$ mm można obliczyć ze wzoru (7.10):

$$\lambda = a = \frac{8P_w \cdot D_1^3 \cdot n_1}{G \cdot d^4} \rightarrow aG \cdot d^4 = 8P_w \cdot D_1^3 \cdot n_1 \rightarrow P_w = \frac{a \cdot G \cdot d^4}{8D_1^3 \cdot n_1} = \frac{80 \cdot 80000 \cdot 10^4}{8 \cdot 100^3 \cdot 12} = 667 \text{ N}$$

Siła P_w jest mniejsza od siły P , dlatego spowoduje skrócenie sprężyn o odpowiednio λ_1 i λ_2 .

Warunek równowagi sił w układzie sprężyn:

$$P_1 + P_2 = P$$

Warunek zgodności przemieszczeń (skróceń) w układzie sprężyn:

$$a + \lambda_2 = \lambda_1$$

gdzie

$$\lambda_1 = \frac{8 \cdot P_1 \cdot D_1^3 \cdot n_1}{G \cdot d^4}, \quad \lambda_2 = \frac{8 \cdot P_2 \cdot D_2^3 \cdot n_2}{G \cdot d^4}$$

$$a + \frac{8 \cdot P_2 \cdot D_2^3 \cdot n_2}{G \cdot d^4} = \frac{8 \cdot P_1 \cdot D_1^3 \cdot n_1}{G \cdot d^4}$$

$$80 + \frac{8 \cdot P_2 \cdot 60^3 \cdot 10}{80000 \cdot 10^4} = \frac{8 \cdot P_1 \cdot 100^3 \cdot 12}{80000 \cdot 10^4}$$

$$1) \quad 80 + 0.0216P_2 = 0.12P_1 \rightarrow 80 + 0.0216P_2 - 0.12P_1 = 0$$

$$2) \quad P_1 + P_2 = P \rightarrow P_1 = P - P_2 = 3500 - P_2$$

Podstawiamy wzór 2) do równania 1):

$$80 + 0.0216P_2 - 0.12 \cdot (3500 - P_2) = 0$$

$$80 + 0.0216P_2 - 420 + 0.12P_2 = 0$$

$$0.1416P_2 - 340 = 0$$

$$0.1416P_2 = 340$$

$$P_2 = 2401.1 \text{ N}$$

z równania 2)

$$P_1 = 3500 - P_2 = 3500 - 2401.1 = 1098.9 \text{ N}$$

Przemieszczenia (skrócenia) sprężyn

$$\lambda_1 = \frac{8 \cdot P_1 \cdot D_1^3 \cdot n_1}{G \cdot d^4} = \frac{8 \cdot 1098.9 \cdot 100^3 \cdot 12}{80000 \cdot 10^4} = 131.9 \text{ mm}$$

$$\lambda_2 = \frac{8 \cdot P_2 \cdot D_2^3 \cdot n_2}{G \cdot d^4} = \frac{8 \cdot 2401.1 \cdot 60^3 \cdot 10}{80000 \cdot 10^4} = 51.9 \text{ mm}$$

Naprężenia ścinające w sprężynach

$$\tau_1 = \frac{4 \cdot P_1}{\pi \cdot d^2} + \frac{8 \cdot P_1 \cdot D_1}{\pi \cdot d^3} = \frac{4 \cdot 1098.9}{\pi \cdot 10^2} + \frac{8 \cdot 1098.9 \cdot 100}{\pi \cdot 10^3} = 13.99 + 279.83 = 293.8 \text{ MPa}$$

$$\tau_2 = \frac{4 \cdot P_2}{\pi \cdot d^2} + \frac{8 \cdot P_2 \cdot D_2}{\pi \cdot d^3} = \frac{4 \cdot 2401.1}{\pi \cdot 10^2} + \frac{8 \cdot 2401.1 \cdot 60}{\pi \cdot 10^3} = 30.57 + 366.86 = 397.4 \text{ MPa}$$

Charakterystyka sztywnościowa układu sprężyn (rys 7.11b)

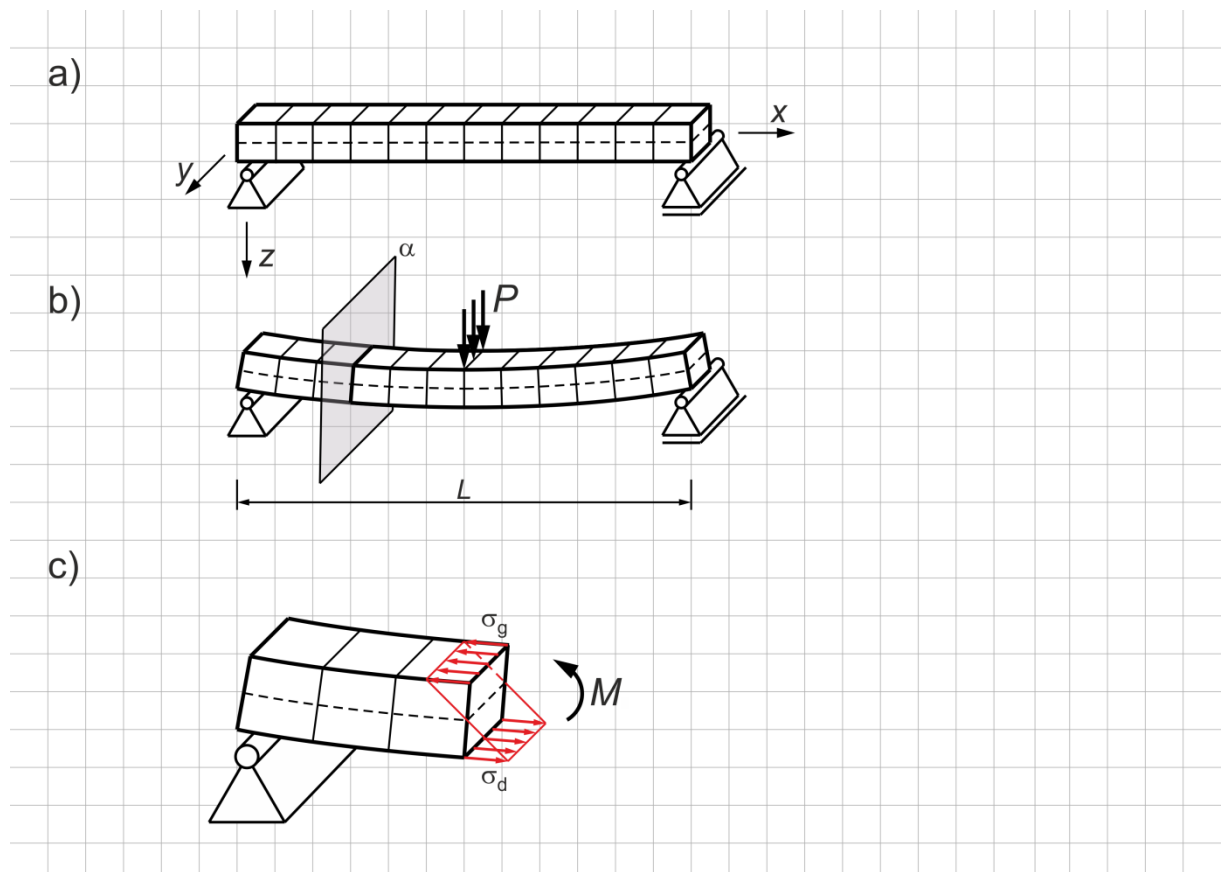
$$P_w = k_I \cdot a \rightarrow k_I = \frac{P_w}{a} = \frac{667}{80} = 8.3 \text{ N/mm}$$

$$P - P_w = k_{II} \cdot \lambda_2 \rightarrow k_{II} = \frac{P - P_w}{\lambda_2} = \frac{3500 - 667}{51.9} = 54.6 \text{ N/mm}$$

8.

ZGINANIE PROSTE BELEK

Zginanie proste pręta prostego występuje wówczas, gdy obciążenie czynne działające w płaszczyźnie pionowej centralnej wywołuje momenty gnące i siły tnące w tej płaszczyźnie (rys. 8.1b). Pręt jest wówczas nazywany belką. Działanie momentu gnącego M w płaszczyźnie xz pokazano na rys. 8.1c. Rozkład naprężeń normalnych σ jest liniowo zmienny w kierunku osi z i stały na szerokości przekroju poprzecznego.



Rys. 8.1

W zakresie liniowo-sprężystym pracy materiału, naprężenia normalne σ w skrajnych włóknach bisymetrycznych przekrojów poprzecznych wynoszą:

$$\sigma_g = -\frac{M}{W_y} \quad , \quad \sigma_d = \frac{M}{W_y} \quad (8.1)$$

gdzie:

M – moment zginający,

W_y – wskaźnik przekroju poprzecznego przy zginaniu względem osi centralnej y (rys. 8.1, tabela 8.1).

Wskaźniki przy zginaniu belki o dowolnym monosymetrycznym przekroju poprzecznym oblicza się ze wzorów:

$$W_{yg} = \frac{I_y}{h_g} \quad , \quad W_{yd} = \frac{I_y}{h_d} \quad (8.2)$$

gdzie:

W_{yg}, W_{yd} – wskaźnik przekroju poprzecznego przy zginaniu, odpowiednio dla włókien górnych i dolnych,

h_g, h_d – odległość od osi y , odpowiednio włókien górnych i dolnych.

W przypadku przekrojów monosymetrycznych, wyznacza się dwa wskaźniki (8.2), a następnie wartości naprężeń we włóknach górnych i dolnych:

$$\sigma_g = -\frac{M}{W_{yg}} \quad , \quad \sigma_d = \frac{M}{W_{yd}} \quad (8.3)$$

Dla przekrojów bisymetrycznych $h_g = h_d$, co prowadzi do jednej wartości wskaźnika przekroju przy zginaniu W_y .

Naprężenia styczne przy zginaniu wyznacza się ze wzoru Żurawskiego:

$$\tau_{xz} = \frac{T \cdot S_z}{I_y \cdot b(z)} \quad (8.4)$$

gdzie:

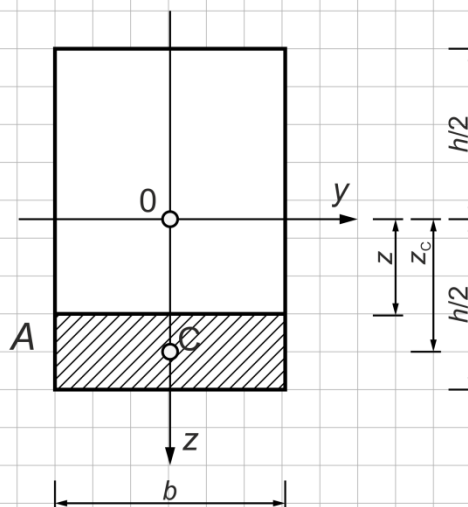
T – siła tnąca,

S_z – moment statyczny odciętej części przekroju względem osi z (rys. 8.2),

I_y – moment bezwładności przekroju względem osi centralnej y ,

$b(z)$ – szerokość przekroju na poziomie z .

Wielkości występujące we wzorze Żurawskiego (8.4) zilustrowano na przykładzie belki o przekroju prostokątnym (rys. 8.2).



Rys. 8.2

Linie ugięcia belki wyznacza się, rozwiązując (całkując) równanie różniczkowe osi odkształconej belki (równanie Eulera):

$$EI_y w''(x) = -M(x) \quad (8.5)$$

gdzie:

E – moduł sprężystości wzdłużnej (moduł Younga) materiału belki,
 $w''(x)$ – druga pochodna funkcji ugięcia belki.

Dokonując całkowania równania (8.5), otrzymuje się :

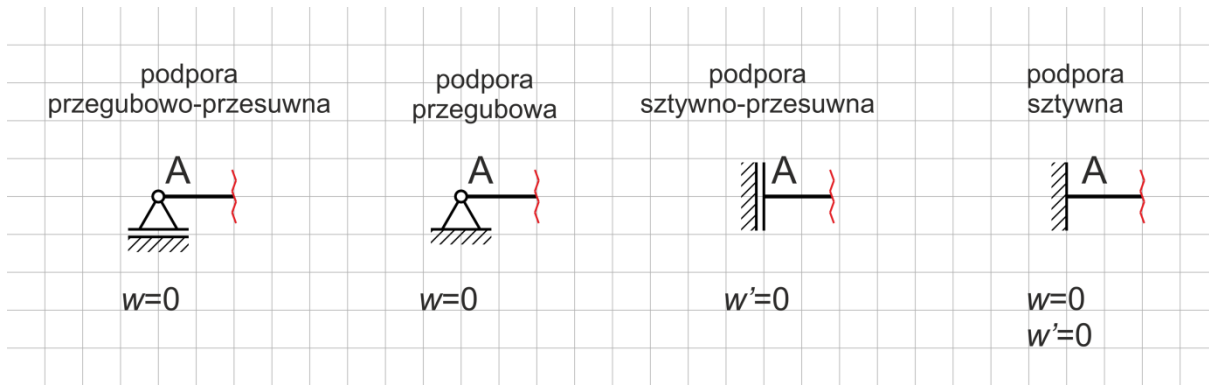
$$EI_y w'(x) = -\int M(x) dx + C \rightarrow \varphi(x) = w'(x) \quad (8.6)$$

$$EI_y w(x) = -\int [\int M(x) dx] dx + Cx + D \rightarrow w(x) \quad (8.7)$$

Do całkowania równania różniczkowego osi odkształconej belki prostej stosuje się metodę Clebsha, opierającą się na czterech zasadach:

- 1) początek układu xz przyjmuje się w lewym końcu belki,
- 2) moment zginający oblicza się od lewej strony i powtarza się wyrazy z poprzednich przedziałów,
- 3) moment gnący wywołany momentem skupionym zapisuje się za pomocą odciętej podniesionej do potęgi 0,
- 4) nie otwiera się nawiasów.

Stałe całkowania C i D wyznacza się na podstawie warunków brzegowych (rys. 8.3).



Rys. 8.3

Belki zginane projektowane są z warunku nośności (WN) i/lub warunku użytkowości (WU).

W przypadku warunku nośności, należy wyznaczyć wartości naprężeń normalnych w poszczególnych odcinkach belki i określić największe co do modułu naprężenie, które musi być mniejsze od naprężenia dopuszczalnego przy zginaniu k_g :

$$\sigma_i = \frac{M_i}{W_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n \rightarrow \sigma = |\sigma_i|_{\max} \quad (8.7)$$

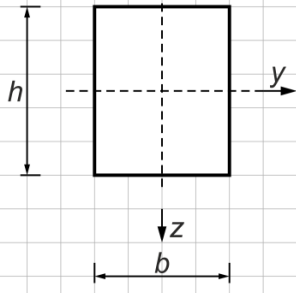
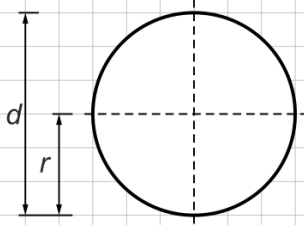
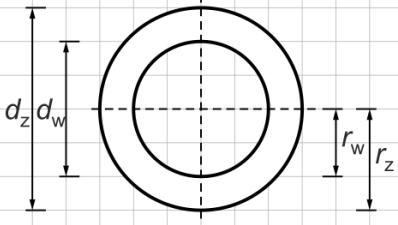
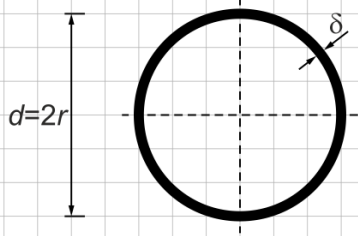
$$\sigma \leq k_g \quad (8.8)$$

W przypadku warunku użytkowości, należy wyznaczyć przemieszczenia (ugięcia) w punktach charakterystycznych belki i określić największe co do modułu ugięcie, które musi być mniejsze od ugięcia dopuszczalnego f :

$$w_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \rightarrow w = |w_i|_{\max} \quad (8.9)$$

$$w \leq f \quad (8.10)$$

Tabela 8.1 Wskaźniki przy zginaniu dla wybranych przekrojów poprzecznych regularnych

Przekrój poprzeczny	Wskaźnik przekroju poprzecznego przy zginaniu
	$W_y = \frac{bh^2}{6}$ $W_z = \frac{hb^2}{6}$
	$W = \frac{\pi r^3}{4}$ <p style="text-align: center;">lub</p> $W = \frac{\pi d^3}{32}$
	$W = \frac{\pi}{4} \left(\frac{r_z^4 - r_w^4}{r_z} \right)$ <p style="text-align: center;">lub</p> $W = \frac{\pi}{32} \left(\frac{d_z^4 - d_w^4}{d_z} \right)$
	$W = \pi r^2 \delta$ <p style="text-align: center;">lub</p> $W = 0.25 \pi d^2 \delta$

PRZYKŁAD 8.1

Zaprojektować belkę z warunku nośności i użyteczności (rys. 8.4a). Wyznaczyć wykresy naprężeń normalnych σ i stycznych τ_{xz} w przekroju B¹. Wymiary [mm] zaokrąglić do liczby całkowitej.

Dane:

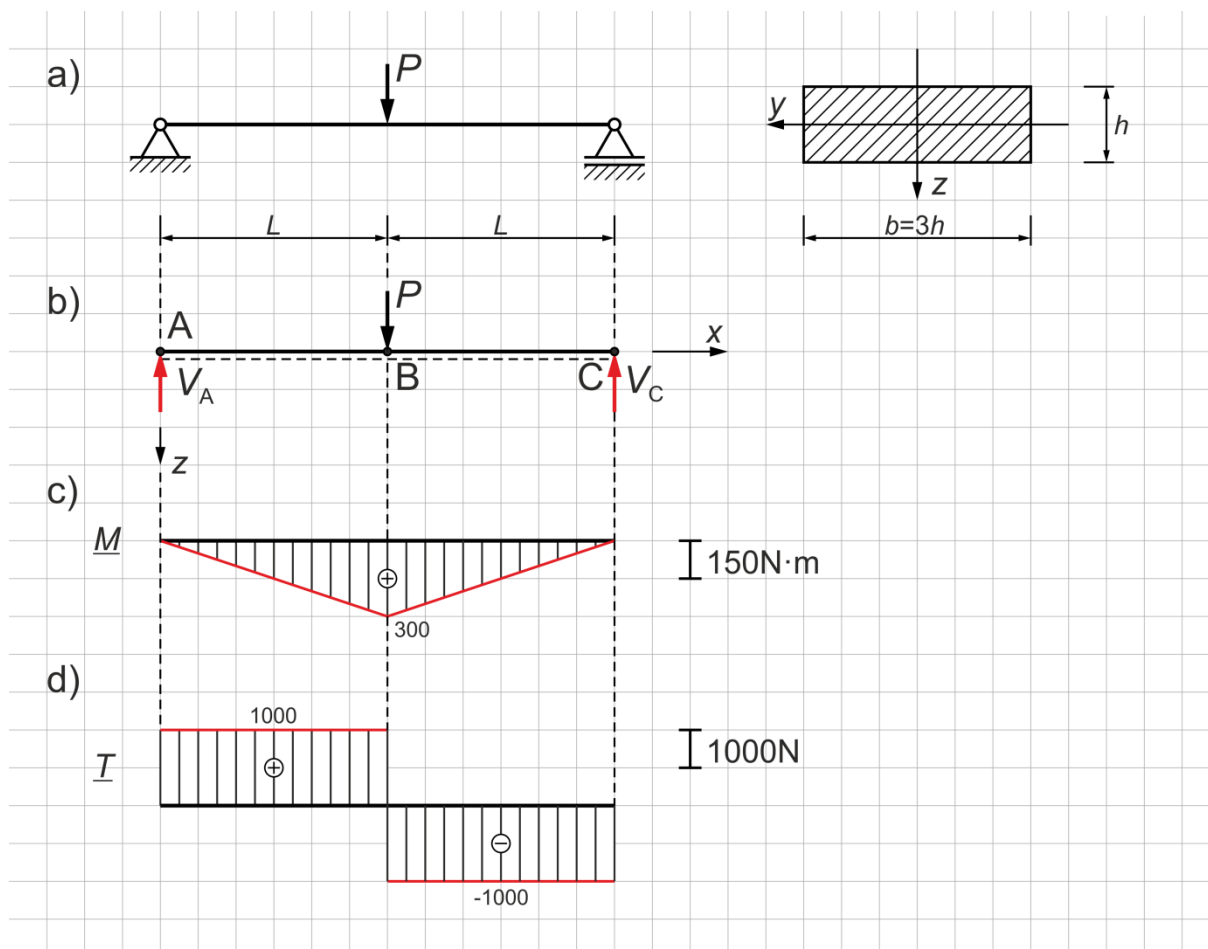
$$P = 2000 \text{ N}$$

$$L = 0.3 \text{ m}$$

$$E = 210 \text{ GPa}$$

$$k_g = 180 \text{ MPa}$$

$$f = 1 \text{ mm}$$



Rys. 8.4

ROZWIĄZANIE

Belka poddana jest działaniu siły skupionej prostopadłej do jej osi. Wielkościami przekrojowymi w tym przypadku są momenty zginające i siły tnące.

Przed przystąpieniem do wyznaczania wielkości przekrojowych, należy wyznaczyć reakcje (rys. 8.4b). Reakcja pozioma H_A jest równa zero, ponieważ nie ma obciążenia w kierunku osi belki.

Reakcje

$$\sum M_A = 0: \quad -P \cdot L + V_C \cdot 2L = 0$$

$$V_C \cdot 2L = P \cdot L \quad | : 2L$$

$$V_C = \frac{P \cdot L}{2L} = 0.5P = 0.5 \cdot 2000 = 1000 \text{ N}$$

$$\sum P_{iz} = 0: \quad -V_A + P - V_C = 0$$

$$V_A = P - V_C = P - 0.5P = 0.5P = 0.5 \cdot 2000 = 1000 \text{ N}$$

Równanie sprawdzające

$$\sum M_B = 0: \quad -V_A \cdot L + V_C \cdot L = 0 \quad \rightarrow \quad -0.5P \cdot L + 0.5P \cdot L = 0 \quad \rightarrow \quad 0 = 0$$

Wartości momentów zginających (rys. 8.4c)

$$M_A = 0$$

$$M_B = V_A \cdot L = 0.5P \cdot L = 0.5 \cdot 2000 \cdot 0.3 = 300 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$M_C = 0$$

Wartości sił tnących (rys. 8.4d)

$$T_{AB} = V_A = 0.5P = 0.5 \cdot 2000 = 1000 \text{ N}$$

$$T_{BC} = -V_C = -0.5P = -0.5 \cdot 2000 = -1000 \text{ N}$$

Moment bezwładności i wskaźnik przy zginaniu przekroju poprzecznego względem osi centralnej y

$$I_y = \frac{b \cdot h^3}{12} = \frac{3h \cdot h^3}{12} = \frac{3h^4}{12} = \frac{h^4}{4} = 0.25h^4$$

$$W_y = \frac{b \cdot h^2}{6} = \frac{3h \cdot h^2}{6} = \frac{3h^3}{6} = \frac{h^3}{2} = 0.5h^3$$

Warunek nośności

$$\sigma = |\sigma|_{\max} \leq k_g \quad \rightarrow \quad \sigma = \frac{|M|_{\max}}{W_y} \leq k_g$$

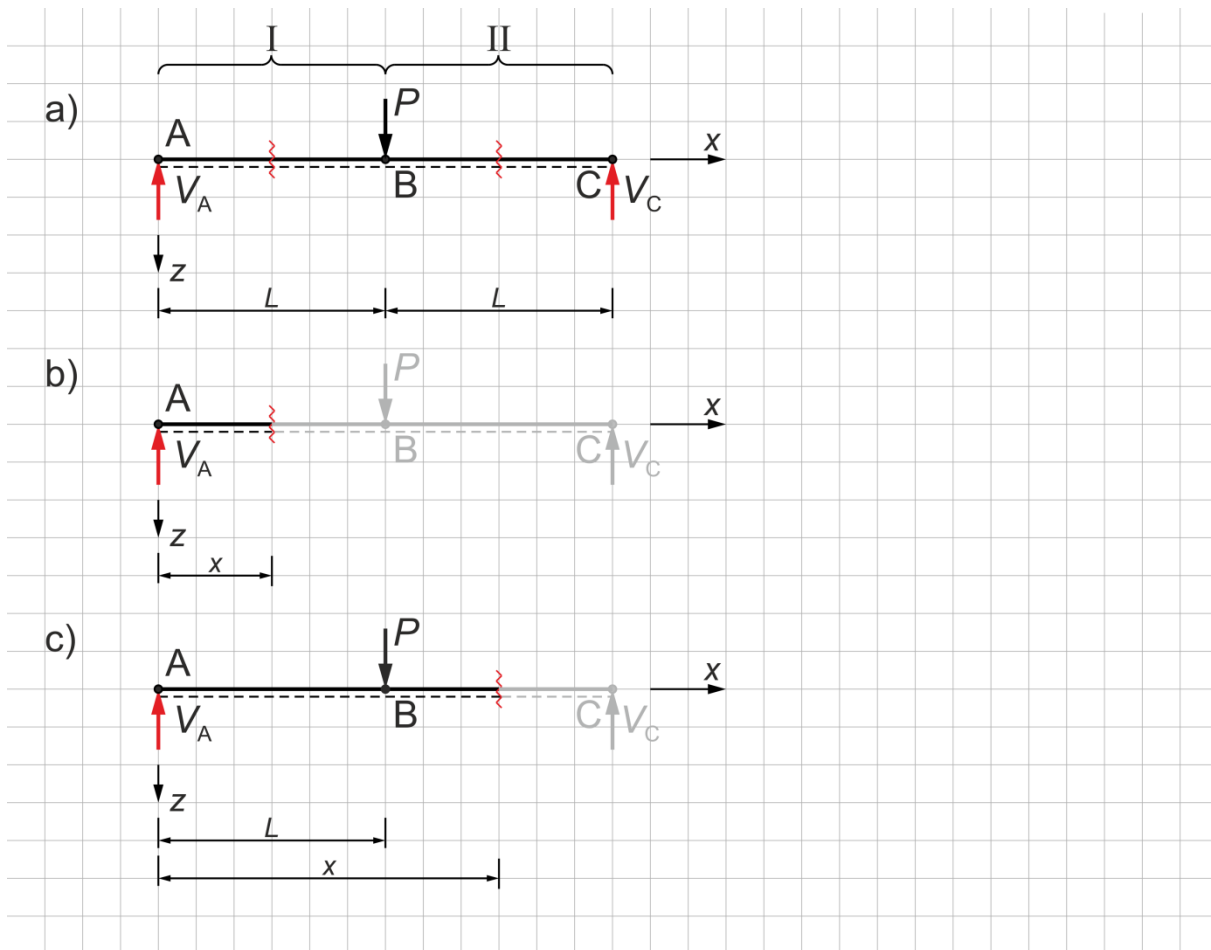
$$\frac{0.5P \cdot L}{0.5h^3} \leq k_g \quad \rightarrow \quad \frac{P \cdot L}{h^3} \leq k_g \quad | \cdot \frac{h^3}{k_g}$$

$$\frac{P \cdot L}{k_g} \leq h^3 \quad \rightarrow \quad h \geq \sqrt[3]{\frac{P \cdot L}{k_g}} = \sqrt[3]{\frac{2000 \cdot 300}{180}} \approx 14.9 \text{ mm}$$

Funkcja ugięcia belki

Rozpatrywaną belkę dzielimy na dwa przedziały (rys. 8.5a). Wzór na moment zginający dla pierwszego (rys. 8.5b) i drugiego (rys. 8.5c) przedziału jest następujący:

$$M(x) = V_A \cdot x|_I - P(x-L)|_{II} = \frac{1}{2}P \cdot x|_I - P(x-L)|_{II}$$



Rys. 8.5

Po podstawieniu do równania różniczkowego osi odkształconej (8.4), otrzymuje się:

$$EI_y w''(x) = -M(x) = -\frac{1}{2}P \cdot x|_I + P(x-L)|_{II}$$

Pierwsze całkowanie

$$EI_y w'(x) = -\frac{1}{2}P \cdot \frac{1}{2}x^2|_I + P \cdot \frac{1}{2}(x-L)^2|_{II} + C = -\frac{1}{4}Px^2|_I + \frac{1}{2}P(x-L)^2|_{II} + C$$

Drugie całkowanie

$$\begin{aligned} EI_y w(x) &= -\frac{1}{4}P \cdot \frac{1}{3}x^3|_I + \frac{1}{2}P \cdot \frac{1}{3}(x-L)^3|_{II} + Cx + D = \\ &= -\frac{1}{12}Px^3|_I + \frac{1}{6}P(x-L)^3|_{II} + Cx + D \end{aligned}$$

Uwzględnienie warunków brzegowych (wyznaczenie stałych całkowania C i D)

$$w(x=0) = 0 \rightarrow EI_y w(x=0) = -\frac{1}{12}P \cdot 0^3|_I + C \cdot 0 + D = 0 \rightarrow D = 0$$

$$\begin{aligned}
 w(x=2L) = 0 &\rightarrow EI_y w(x=2L) = -\frac{1}{12}P \cdot (2L)^3 \Big|_I + \frac{1}{6}P(2L-L)^3 \Big|_{II} + C \cdot 2L = 0 \\
 -\frac{1}{12}P \cdot 8L^3 + \frac{1}{6}PL^3 + 2CL = 0 &\rightarrow -\frac{8}{12}PL^3 + \frac{1}{6}PL^3 + 2CL = 0 \\
 -\frac{4}{6}PL^3 + \frac{1}{6}PL^3 + 2CL = 0 &\rightarrow -\frac{3}{6}PL^3 + 2CL = 0 \rightarrow 2CL = \frac{1}{2}PL^3 \quad | : 2L \\
 C = \frac{1}{4}PL^2
 \end{aligned}$$

Uwzględniając wyznaczone stałe całkowania, funkcja ugięcia przyjmuje postać:

$$w(x) = \frac{1}{EI_y} \left[-\frac{1}{12}Px^3 \Big|_I + \frac{1}{6}P(x-L)^3 \Big|_{II} + \frac{1}{4}PL^2 \cdot x \right]$$

Maksymalne przemieszczenie (ugięcie) występuje w punkcie B (tylko I przedział):

$$\begin{aligned}
 w_{\max} = w_B = w(x=L) &= \frac{1}{EI_y} \left[-\frac{1}{12}P \cdot L^3 + \frac{1}{4}PL^2 \cdot L \right] = \frac{1}{EI_y} \left[-\frac{1}{12}PL^3 + \frac{1}{4}PL^3 \right] = \\
 &= \frac{1}{EI_y} \left[-\frac{1}{12}PL^3 + \frac{3}{12}PL^3 \right] = \frac{1}{EI_y} \left[\frac{2}{12}PL^3 \right] = \frac{PL^3}{6EI_y}
 \end{aligned}$$

Warunek użytkowalności

$$\begin{aligned}
 w = |w|_{\max} \leq f &\rightarrow w = \frac{PL^3}{6EI_y} \leq f \rightarrow \frac{PL^3}{6E \cdot 0.25h^4} \leq f \\
 \frac{PL^3}{1.5E \cdot h^4} \leq f &\quad | \cdot \frac{h^4}{f} \\
 \frac{PL^3}{1.5E \cdot f} \leq h^4 &\rightarrow h \geq \sqrt[4]{\frac{PL^3}{1.5E \cdot f}} = \sqrt[4]{\frac{2000 \cdot 300^3}{1.5 \cdot 210000 \cdot 3}} \approx 15.5 \text{ mm}
 \end{aligned}$$

Decyduje warunek użytkowalności. Przyjęto:

$$h = 16 \text{ mm}$$

$$b = 3h = 3 \cdot 16 = 48 \text{ mm}$$

Wartość momentu bezwładności i wskaźnika przekroju poprzecznego przy zginaniu względem osi centralnej y:

$$I_y = 0.25h^4 = 0.25 \cdot 16^4 = 16384 \text{ mm}^4$$

$$W_y = 0.5h^3 = 0.5 \cdot 16^3 = 2048 \text{ mm}^3$$

Maksymalna wartość naprężenia normalnego σ w przekroju B¹ (rys. 8.6a)

$$\sigma_{\max} = \frac{M_B}{W_y} = \frac{300000}{2048} = 146.5 \text{ MPa}$$

We włóknach górnych występuje ściskanie (naprężenia ujemne), a we włóknach dolnych – rozciąganie (naprężenia dodatnie).

Wartości naprężeń stycznych τ w przekroju B¹ (rys. 8.6b)

moment statyczny odciętej części przekroju dla $z = \pm h/2$

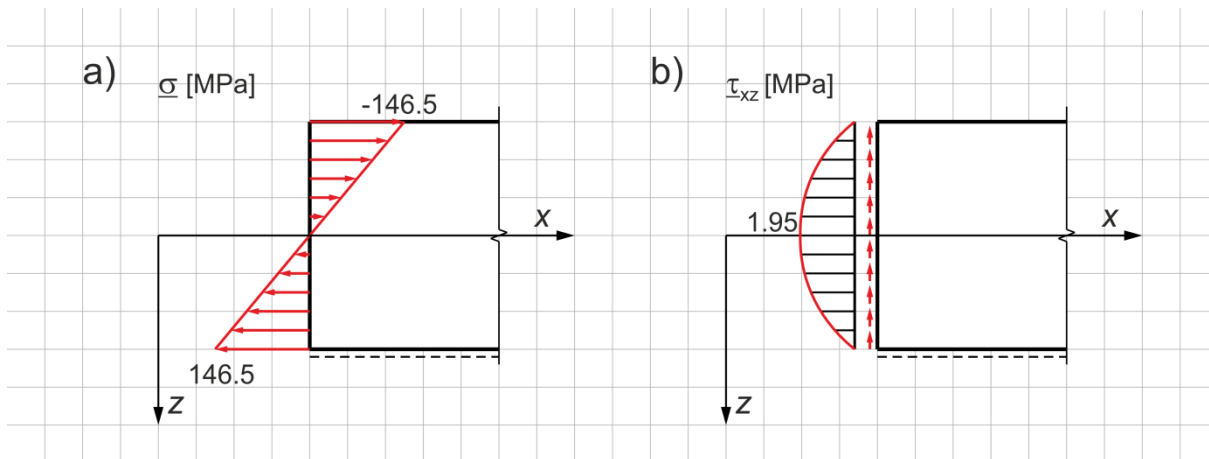
$$S\left(\pm \frac{h}{2}\right) = 0$$

moment statyczny odciętej części przekroju dla $z = 0$

$$S(0) = A \cdot z_C = b \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{h}{4} = \frac{b \cdot h^2}{8} = \frac{48 \cdot 16^2}{8} = 1536 \text{ mm}^3$$

$$\tau_{xz}\left(\pm \frac{h}{2}\right) = \frac{T_B \cdot S\left(\pm \frac{h}{2}\right)}{I_y \cdot b\left(\pm \frac{h}{2}\right)} = \frac{0.5P \cdot 0}{16384 \cdot 48} = 0$$

$$\tau_{xz}(0) = \frac{T_B \cdot S(0)}{I_y \cdot b(0)} = \frac{0.5P \cdot 1536}{16384 \cdot 48} = \frac{1000 \cdot 1536}{16384 \cdot 48} = 1.95 \text{ MPa}$$



Rys. 8.6

PRZYKŁAD 8.2

Zaprojektować belkę z warunku nośności i użyteczności (rys. 8.7a). Wyznaczyć wykresy naprężenia normalnego σ i stycznego τ_{xz} w przekroju A^P . Wymiary [mm] zaokrąglić do liczby całkowitej.

Dane:

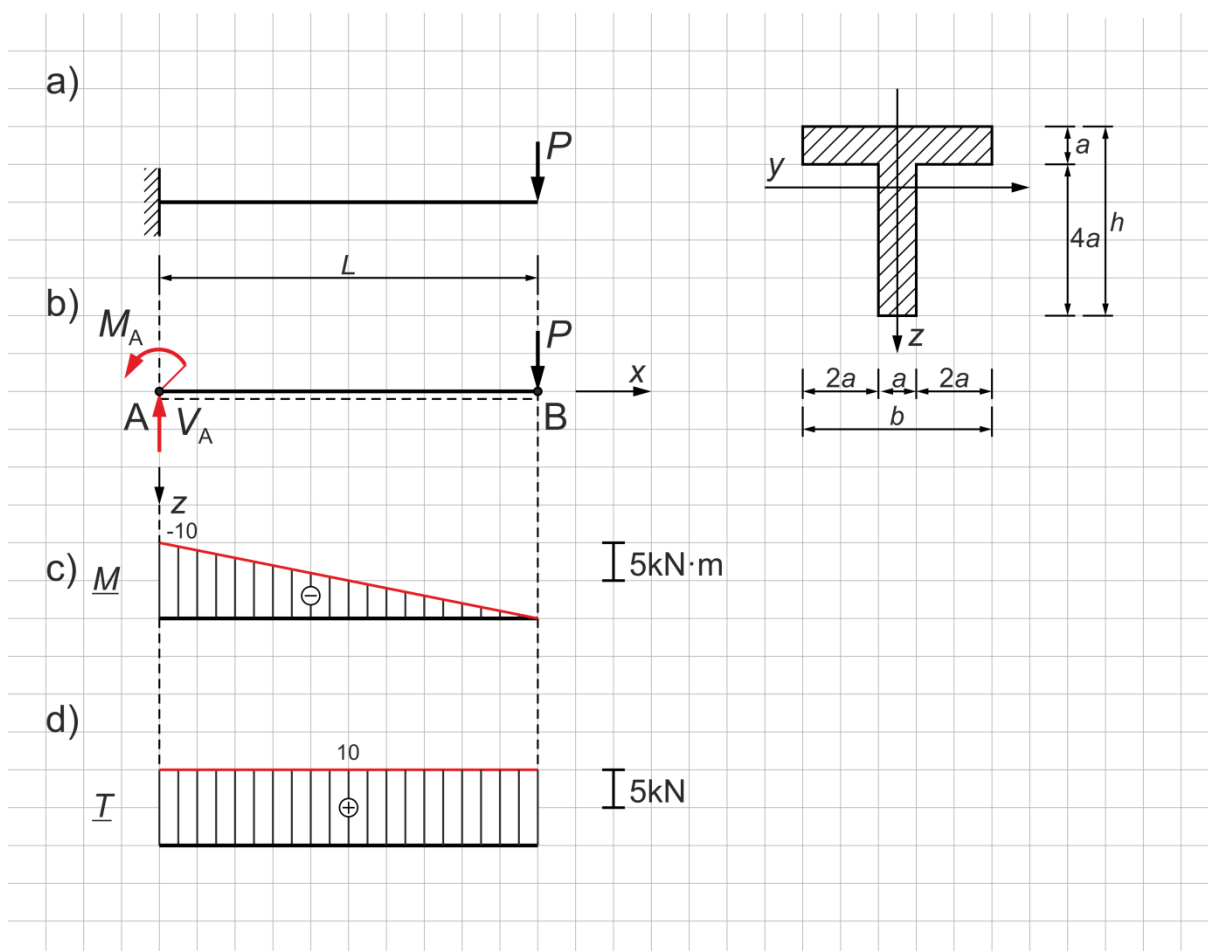
$$P = 10 \text{ kN}$$

$$L = 1.0 \text{ m}$$

$$E = 210 \text{ GPa}$$

$$k_g = 180 \text{ MPa}$$

$$f = 5 \text{ mm}$$



Rys. 8.7

ROZWIĄZANIE

Belka poddana jest działaniu siły skupionej pionowej. Wielkościami przekrojowymi są moment zginający i siła tnąca.

Przed przystąpieniem do wyznaczania wielkości przekrojowych, należy wyznaczyć reakcje (rys. 8.7b). Reakcja pozioma H_A jest równa zero, ponieważ nie ma obciążenia w kierunku osi belki.

Reakcje

$$\sum P_{iz} = 0: \quad -V_A + P = 0 \quad \rightarrow \quad V_A = P = 10 \text{ kN}$$

$$\sum M_A = 0: \quad M_A - P \cdot L = 0 \quad \rightarrow \quad M_A = P \cdot L = 10 \cdot 1.0 = 10 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Równanie sprawdzające

$$\sum M_B = 0: \quad M_A - V_A \cdot L = 0 \quad \rightarrow \quad P \cdot L - P \cdot L = 0 \quad \rightarrow \quad 0 = 0$$

Wartości momentów zginających (rys. 8.7c)

$$M_A^l = 0$$

$$M_A^p = -M_A = -P \cdot L = -10 \cdot 1.0 = -10 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_B = 0$$

Wartości sił tnących (rys. 8.7d)

$$T_{AB} = V_A = P = 10 \text{ kN}$$

Wyznaczenie charakterystyk geometrycznych przekroju poprzecznego

Środek geometryczny przekroju poprzecznego znajduje się na osi v . Jest to pionowa oś symetrii przekroju (rys. 8.8). Należy jedynie określić jego położenie na tej osi.

Współrzędne środków geometrycznych figur składowych (rys. 8.8a)

$$C_1 = (0, 0.5a)$$

$$C_2 = (0, 3a)$$

Pola powierzchni figur składowych (rys. 8.8a)

$$A_1 = 5a \cdot a = 5a^2$$

$$A_2 = a \cdot 4a = 4a^2$$

Pole powierzchni przekroju poprzecznego

$$A = \sum_{i=1}^2 A_i = 5a^2 + 4a^2 = 9a^2$$

Moment statyczny przekroju poprzecznego względem osi u (rys. 8.8a)

$$S_u = \sum_{i=1}^2 A_i \cdot v_i = 5a^2 \cdot 0.5a + 4a^2 \cdot 3a = 2.5a^3 + 12a^3 = 14.5a^3$$

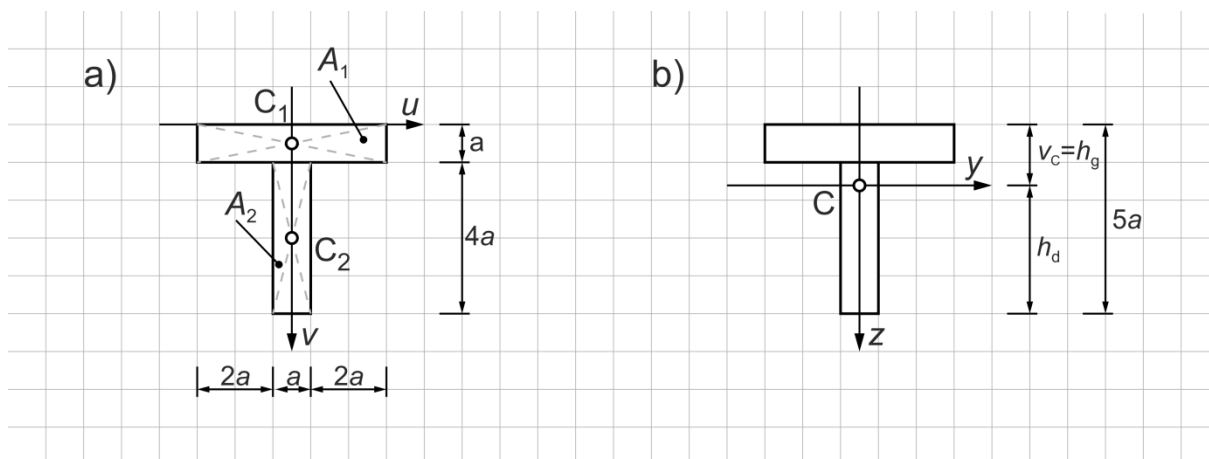
Położenie środka geometrycznego przekroju poprzecznego na osi v (rys. 8.8b)

$$v_c = \frac{S_u}{A} = \frac{14.5a^3}{9a^2} = 1.61a$$

Odległość włókien skrajnych górnych i dolnych od osi obojętnej (rys. 8.8b)

$$h_g = v_c = 1.61a$$

$$h_d = 5a - 1.61a = 3.39a$$



Rys. 8.8

Moment bezwładności przekroju poprzecznego względem osi centralnej y (rys. 8.8)

$$\begin{aligned} I = I_y &= \sum_{i=1}^2 I_{y_i} + A_i (v_c - v_{c_i})^2 = I_{y_1} + A_1 (v_c - v_{c_1})^2 + I_{y_2} + A_2 (v_c - v_{c_2})^2 = \\ &= \frac{5a \cdot a^3}{12} + 5a^2 \cdot (1.61a - 0.5a)^2 + \frac{a \cdot (4a)^3}{12} + 4a^2 \cdot (1.61a - 3a)^2 = \\ &= \frac{5a^4}{12} + 5a^2 \cdot (1.11a)^2 + \frac{64a^4}{12} + 4a^2 \cdot (-1.39a)^2 = \frac{5}{12}a^4 + 6.16a^4 + \frac{64}{12}a^4 + 7.73a^4 = \\ &= 19.64a^4 \end{aligned}$$

Wskaźniki przekroju poprzecznego przy zginaniu dla włókien górnych i dolnych (rys. 8.8b)

$$W_g = \frac{I}{h_g} = \frac{19.64a^4}{1.61a} = 12.20a^3$$

$$W_d = \frac{I}{h_d} = \frac{19.64a^4}{3.39a} = 5.79a^3$$

Warunek nośności

$$\sigma = |\sigma|_{\max} \leq k_g \rightarrow \sigma = \frac{M_{\max}}{W_{\min}} \leq k_g$$

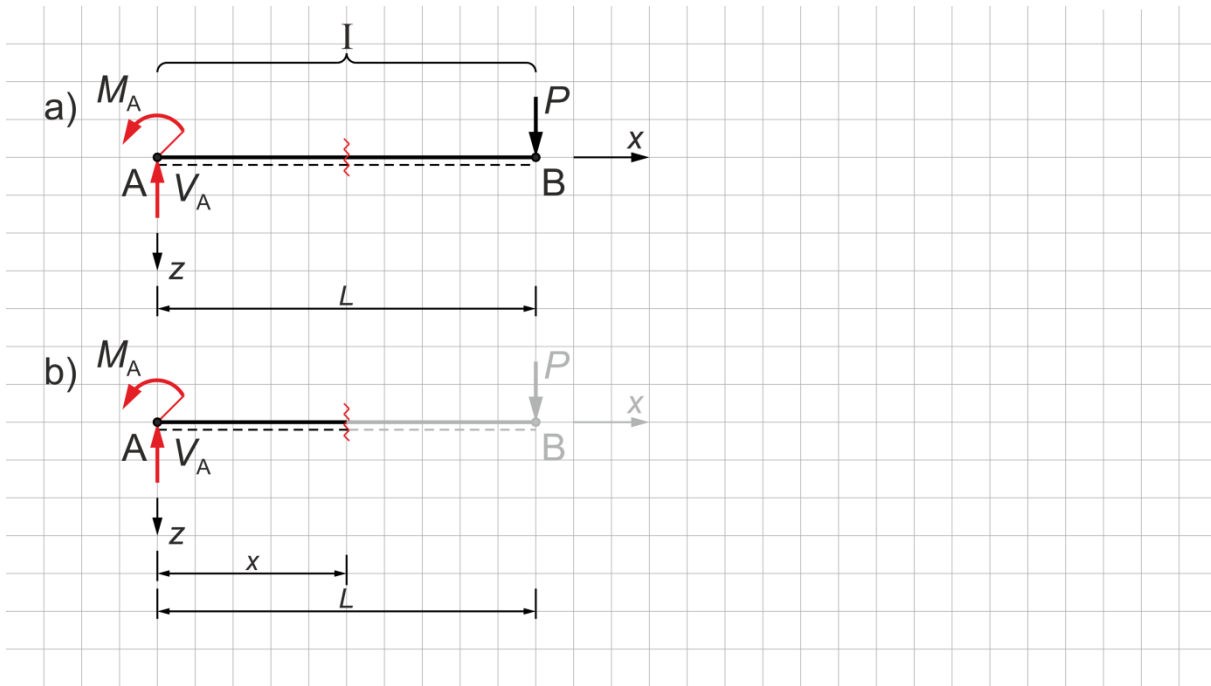
$$\frac{M_{\max}}{W_{\min}} = \frac{|M_A^P|}{W_d} = \frac{P \cdot L}{5.79a^3} \leq k_g \quad | \cdot \frac{a^3}{k_g}$$

$$\frac{P \cdot L}{5.79 k_g} \leq a^3 \rightarrow a \geq \sqrt[3]{\frac{P \cdot L}{5.79 k_g}} = \sqrt[3]{\frac{10000 \cdot 1000}{5.79 \cdot 180}} \approx 21.3 \text{ mm}$$

Funkcja ugięcia belki

W rozpatrywanej belce występuje jeden przedział (rys. 8.9a). Wzór na moment zginający (rys. 8.9b) ma postać:

$$M(x) = -M_A \cdot x^0 + V_A \cdot x = -PL \cdot x^0 + P \cdot x$$



Rys. 8.9

Po podstawieniu wyrażenia na $M(x)$ do równania różniczkowego osi odkształconej (8.4), otrzymuje się:

$$EI_y w''(x) = -M(x) = PL \cdot x^0 - P \cdot x$$

Pierwsze całkowanie

$$EI_y w'(x) = PL \cdot x - P \cdot \frac{1}{2} \cdot x^2 + C$$

Drugie całkowanie

$$EI_y w(x) = PL \cdot \frac{1}{2} \cdot x^2 - \frac{1}{2} \cdot P \cdot \frac{1}{3} \cdot x^3 + Cx + D = \frac{1}{2} PL \cdot x^2 - \frac{1}{6} P \cdot x^3 + Cx + D$$

Uwzględnienie warunków brzegowych (wyznaczenie stałych całkowania C i D):

$$w'(x=0) = 0 \rightarrow EI_y w'(x=0) = PL \cdot 0 - \frac{1}{2} \cdot P \cdot 0^2 + C = 0 \rightarrow C = 0$$

$$w(x=0) = 0 \rightarrow EI_y w(x=0) = \frac{1}{2} PL \cdot 0^2 - \frac{1}{6} P \cdot 0^3 + D = 0 \rightarrow D = 0$$

Uwzględniając wyznaczone stałe całkowania, funkcja ugięcia przyjmuje postać:

$$w(x) = \frac{1}{EI_y} \left[\frac{1}{2} PL \cdot x^2 - \frac{1}{6} P \cdot x^3 \right]$$

Maksymalne przemieszczenie (ugięcie) występuje w punkcie B:

$$\begin{aligned} w_{\max} = w_B = w(x=L) &= \frac{1}{EI_y} \left[\frac{1}{2} PL \cdot L^2 - \frac{1}{6} P \cdot L^3 \right] = \frac{1}{EI_y} \left[\frac{1}{2} PL^3 - \frac{1}{6} PL^3 \right] = \\ &= \frac{1}{EI_y} \left[\frac{3}{6} PL^3 - \frac{1}{6} PL^3 \right] = \frac{1}{EI_y} \left[\frac{2}{6} PL^3 \right] = \frac{PL^3}{3EI_y} \end{aligned}$$

Warunek użytkowości WU

$$w = |w|_{\max} \leq f \rightarrow w = \frac{PL^3}{3EI_y} \leq f \rightarrow \frac{PL^3}{3E \cdot 19.64a^4} \leq f$$

$$\frac{PL^3}{58.92E \cdot a^4} \leq f \quad | \cdot \frac{a^4}{f}$$

$$\frac{PL^3}{58.92E \cdot f} \leq a^4 \rightarrow a \geq \sqrt[4]{\frac{PL^3}{58.92E \cdot f}} = \sqrt[4]{\frac{10000 \cdot 1000^3}{58.92 \cdot 210000 \cdot 5}} \approx 20.1 \text{ mm}$$

Decyduje warunek nośności. Przyjęto:

$$a = 22 \text{ mm}$$

$$b = 5a = 5 \cdot 22 = 110 \text{ mm}$$

$$h = 5a = 5 \cdot 22 = 110 \text{ mm}$$

Wartości momentu bezwładności i wskaźników przekroju poprzecznego przy zginaniu względem osi centralnej y

$$I_y = 19.64a^4 = 19.64 \cdot 22^4 = 4600787.8 \text{ mm}^4$$

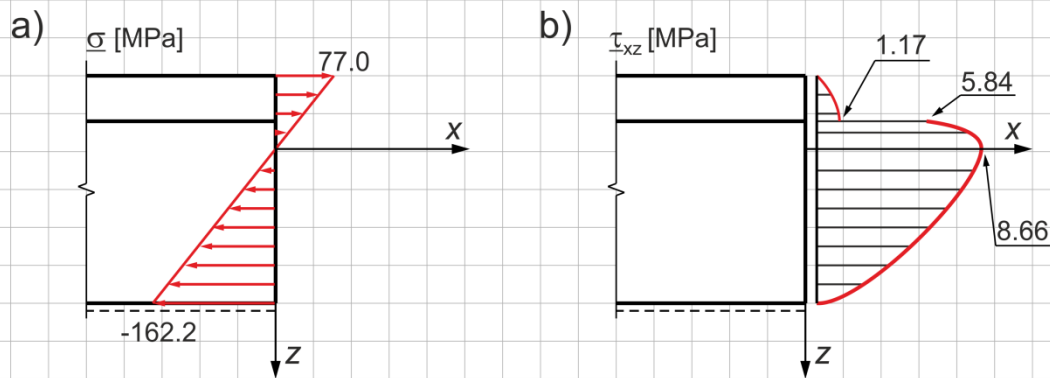
$$W_g = 12.20a^3 = 12.20 \cdot 22^3 = 129905.6 \text{ mm}^3$$

$$W_d = 5.79a^3 = 5.79 \cdot 22^3 = 61651.9 \text{ mm}^3$$

Maksymalne wartości naprężeń normalnych σ we włóknach górnych i dolnych w przekroju A^p (rys. 8.10a)

$$\sigma_{g,\max} = -\frac{M_A^p}{W_g} = -\frac{(-10000000)}{129905.6} = 77.0 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{d,\max} = \frac{M_A^p}{W_g} = \frac{-10000000}{61651.9} = -162.2 \text{ MPa}$$



Rys. 8.10

Wartości naprężeń stycznych τ w przekroju A^P (rys. 8.10b):

moment statyczny odciętej części przekroju dla punktu A ($z = -1.61a$; rys. 8.11)

$$S(-1.61a) = 0$$

moment statyczny odciętej części przekroju dla punktów B i D ($z = -0.61a$; rys. 8.11a)

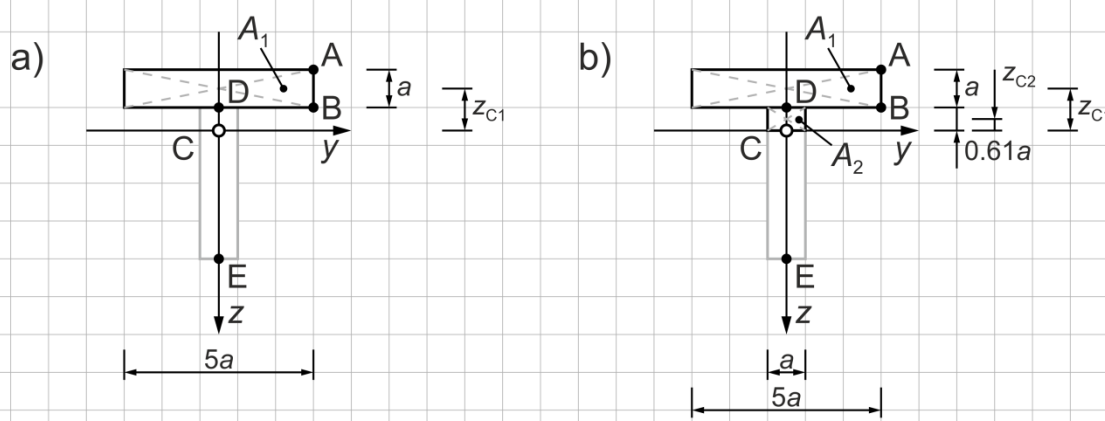
$$S(-0.61a) = A_1 \cdot z_{C1} = 5a^2 \cdot a \cdot 1.11a = 5.55a^3 = 5.55 \cdot 22^3 = 59096.4 \text{ mm}^3$$

moment statyczny odciętej części przekroju dla punktu C ($z = 0$; rys. 8.11b)

$$S(0) = A_1 \cdot z_{C1} + A_2 \cdot z_{C2} = 5a^2 \cdot a \cdot 1.61a + a \cdot 0.61a \cdot 0.305a = 8.05a^3 + 0.186a^3 = 8.236a^3 = 8.236 \cdot 22^3 = 87696.9 \text{ mm}^3$$

moment statyczny odciętej części przekroju dla punktu E ($z = 3.39a$; rys. 8.11)

$$S(3.39a) = 0$$



Rys. 8.11

$$\tau_{xz,A}(-1.61a) = \frac{T_A \cdot S(-1.61a)}{I_y \cdot b(-1.61a)} = \frac{10000 \cdot 0}{4600787.8 \cdot 110} = 0$$

$$\tau_{xz,B}(-0.61a) = \frac{T_A \cdot S(-0.61a)}{I_y \cdot b(-0.61a)} = \frac{10000 \cdot 59096.4}{4600787.8 \cdot 110} = 1.17 \text{ MPa}$$

$$\tau_{xz,C}(-0.61a) = \frac{T_A \cdot S(-0.61a)}{I_y \cdot b(-0.61a)} = \frac{10000 \cdot 59096.4}{4600787.8 \cdot 22} = 5.84 \text{ MPa}$$

$$\tau_{xz,D}(0) = \frac{T_A \cdot S(0)}{I_y \cdot b(0)} = \frac{10000 \cdot 87696.9}{4600787.8 \cdot 22} = 8.66 \text{ MPa}$$

$$\tau_{xz,E}(3.39a) = \frac{T_A \cdot S(3.39a)}{I_y \cdot b(3.39a)} = \frac{10000 \cdot 0}{4600787.8 \cdot 22} = 0 \text{ MPa}$$

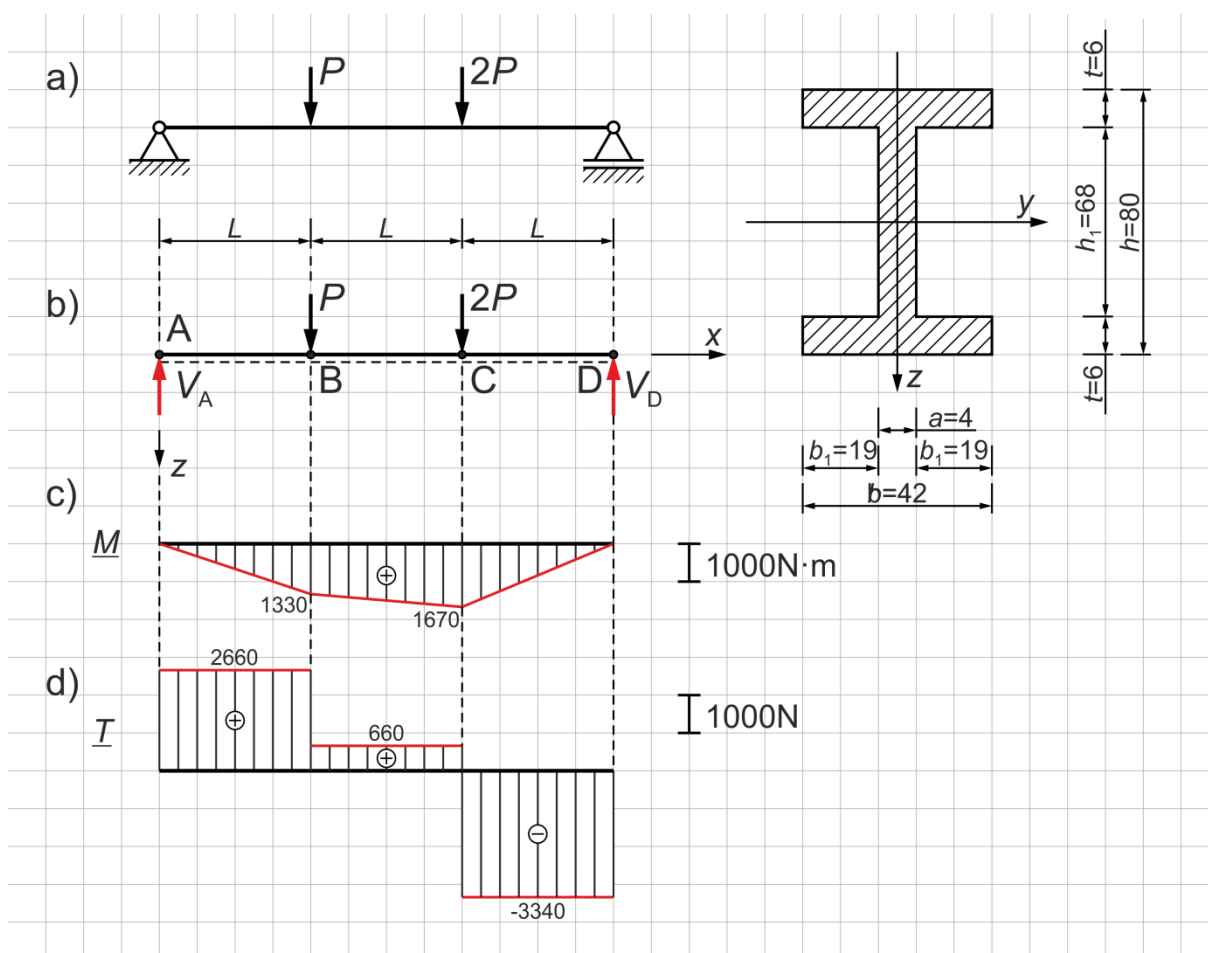
PRZYKŁAD 8.3

Wyznaczyć wykresy σ , τ_{xz} w przekroju C^P belki swobodnie podpartej (rys. 8.12).

Dane:

$$P = 2000 \text{ N}$$

$$L = 0.5 \text{ m}$$



Rys. 8.12

ROZWIĄZANIE

Belka poddana jest działaniu sił skupionych prostopadłych do jej osi. Wielkościami przekrojowymi są moment zginający i siła tnąca.

Przed przystąpieniem do wyznaczania wielkości przekrojowych, należy wyznaczyć reakcje (rys. 8.12b). Reakcja pozioma H_A jest równa zero, ponieważ nie ma obciążenia w kierunku osi belki.

Reakcje

$$\begin{aligned}\sum M_A = 0: & -P \cdot L - 2P \cdot 2L + V_D \cdot 3L = 0 \\ & V_D \cdot 3L = PL + 4PL = 5PL \quad | : 3L \\ & V_D = \frac{5}{3}P = 1.67P = 1.67 \cdot 2000 = 3340 \text{ N}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum P_{iz} = 0: & -V_A + P + 2P - V_D = 0 \\ & -V_A + P + 2P - 1.67P = 0 \\ & -V_A + 1.33P = 0 \quad \rightarrow \quad V_A = 1.33P = 1.33 \cdot 2000 = 2660 \text{ N}\end{aligned}$$

Równanie sprawdzające

$$\begin{aligned}\sum M_C = 0: & -V_A \cdot 2L + P \cdot L + V_D \cdot L = 0 \\ & -1.33P \cdot 2L + PL + 1.67P \cdot L = 0 \\ & -2.66PL + PL + 1.67PL = 0 \quad \rightarrow \quad 0 = 0\end{aligned}$$

Wartości momentów zginających (rys. 8.12c)

$$\begin{aligned}M_A &= 0 \\ M_B &= V_A \cdot L = 1.33P \cdot L = 1.33 \cdot 2000 \cdot 0.5 = 1330 \text{ N}\cdot\text{m} \\ M_C &= V_D \cdot L = 1.67P \cdot L = 1.67 \cdot 2000 \cdot 0.5 = 1670 \text{ N}\cdot\text{m} \\ M_D &= 0\end{aligned}$$

Wartości sił tnących (rys. 8.12d)

$$\begin{aligned}T_{AB} &= V_A = 1.33P = 1.33 \cdot 2000 = 2660 \text{ N} \\ T_{BC} &= V_A - P = 1.33P - P = 0.33P = 0.33 \cdot 2000 = 660 \text{ N} \\ T_{CD} &= -V_D = -1.67P = -1.67 \cdot 2000 = -3340 \text{ N}\end{aligned}$$

Wartości momentu bezwładności i wskaźnika przekroju poprzecznego przy zginaniu względem osi centralnej y

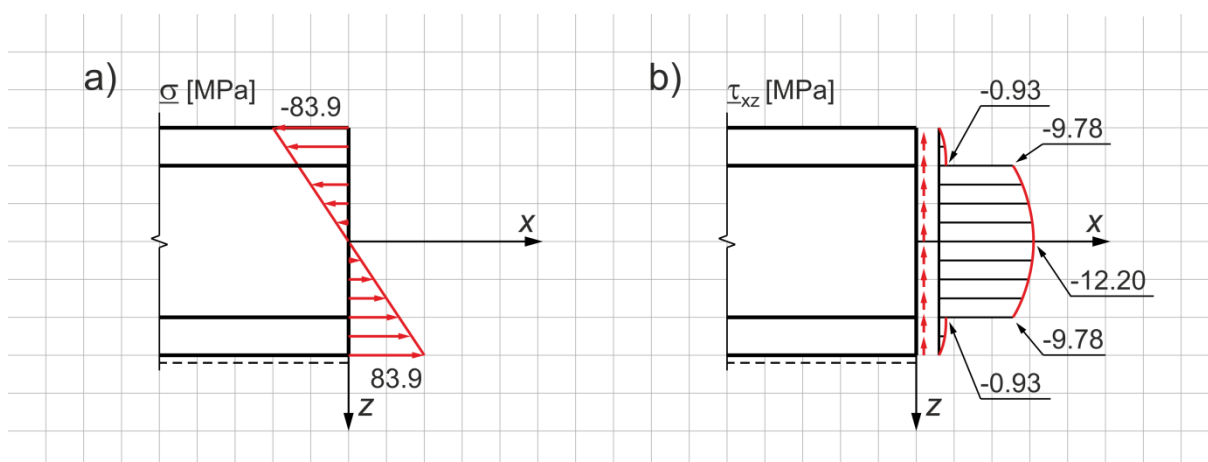
$$\begin{aligned}I = I_y &= \frac{b \cdot h^3}{12} - 2 \cdot \frac{b_1 \cdot h_1^3}{12} = \frac{42 \cdot 80^3}{12} - 2 \cdot \frac{19 \cdot 68^3}{12} = 1792000 - 2 \cdot 497850.67 = \\ &= 796298.66 \text{ mm}^4\end{aligned}$$

$$W = \frac{I}{h/2} = \frac{796298.66}{40} = 19907.47 \text{ mm}^3$$

Maksymalna wartość naprężenia normalnego σ w przekroju C^P (rys. 8.13):

$$\sigma_{\max} = \frac{M_C}{W} = \frac{1670000}{19907.47} = 83.9 \text{ MPa}$$

We włóknach górnych występuje ściskanie (naprężenia ujemne), a we włóknach dolnych – rozciąganie (naprężenia dodatnie).



Rys. 8.13

Wartości naprężeń stycznych τ_{xz} w przekroju C^p (rys. 8.13)

moment statyczny odciętej części przekroju dla punktu A ($z = 40$ mm; rys. 8.14a)

$$S_A(z = 40\text{mm}) = 0$$

moment statyczny odciętej części przekroju dla punktów B i D ($z = 34$ mm; rys. 8.14b)

$$S_{B,D}(z = 34\text{mm}) = A_1 \cdot z_{C1} = 42 \cdot 6 \cdot 37 = 9324 \text{ mm}^3$$

moment statyczny odciętej części przekroju dla punktu C ($z = 0$; rys. 8.14c)

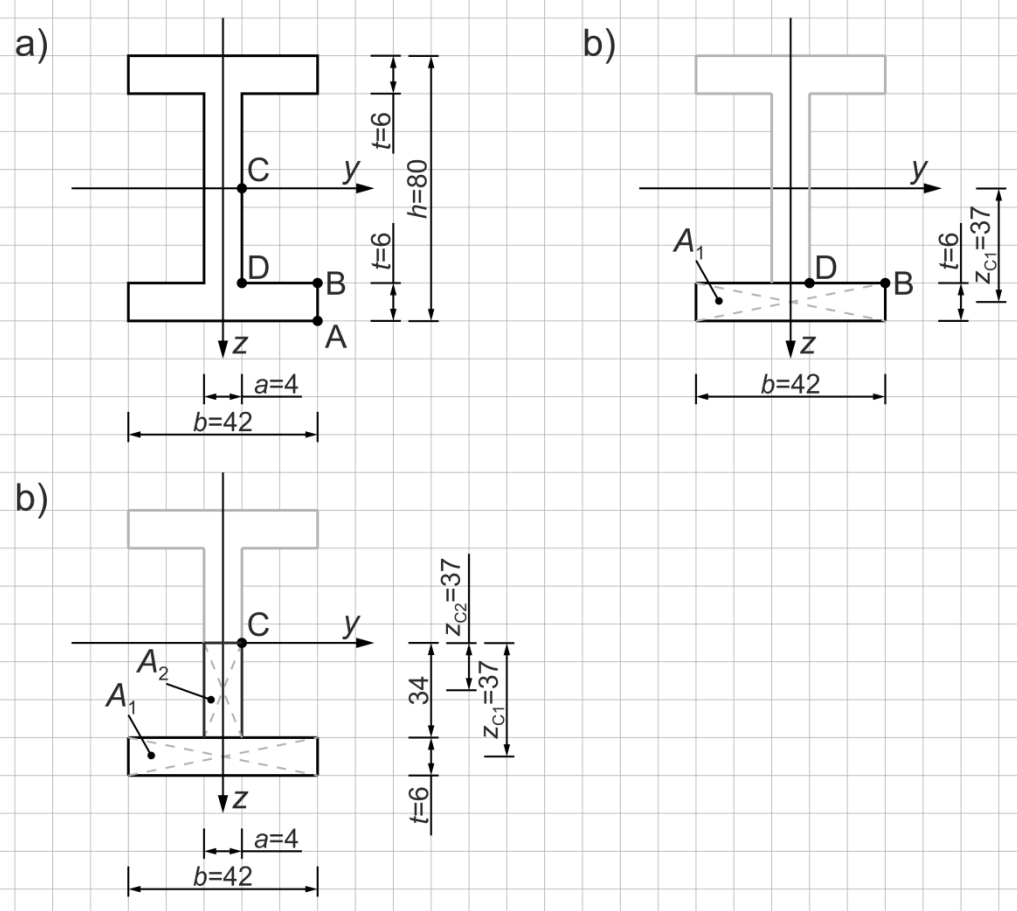
$$S_C(z = 0) = A_1 \cdot z_{C1} + A_2 \cdot z_{C2} = 42 \cdot 6 \cdot 37 + 4 \cdot 34 \cdot 17 = 9324 + 2312 = 11636 \text{ mm}^3$$

$$\tau_{xz,A}(z = 40\text{mm}) = \frac{T \cdot S_A}{I_y \cdot b_A} = \frac{-3340 \cdot 0}{796298.66 \cdot 42} = 0$$

$$\tau_{xz,B}(z = 34\text{mm}) = \frac{T \cdot S_B}{I_y \cdot b_B} = \frac{-3340 \cdot 9324}{796298.66 \cdot 42} = -0.93 \text{ MPa}$$

$$\tau_{xz,D}(z = 34\text{mm}) = \frac{T \cdot S_D}{I_y \cdot b_D} = \frac{-3340 \cdot 9324}{796298.66 \cdot 4} = -9.78 \text{ MPa}$$

$$\tau_{xz,C}(z = 0) = \frac{T \cdot S_C}{I_y \cdot b_C} = \frac{-3340 \cdot 11636}{796298.66 \cdot 4} = -12.20 \text{ MPa}$$



Rys. 8.14

PRZYKŁAD 8.4

Wyznaczyć funkcję ugięcia belki (rys. 8.15a) oraz przemieszczenia punktu A (ugięcie i obrót).
Narysować wykres osi odkształconej.

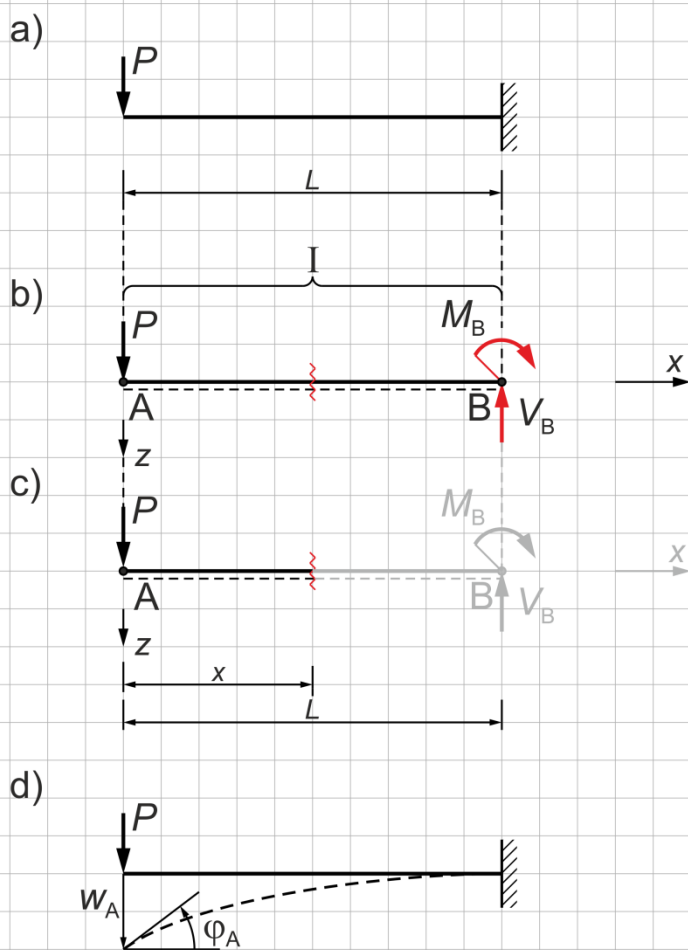
Dane:

$$P = 10 \text{ kN}$$

$$L = 2.0 \text{ m}$$

$$E = 210 \text{ GPa}$$

$$I_y = 4500000 \text{ mm}^4$$



Rys. 8.15

ROZWIĄZANIE

Dla rozpatrywanego układu reakcje (rys. 8.15b) nie występują w równaniu osi odkształconej belki.

W belce występuje jeden przedział (rys. 8.15b). Wzór określający moment zginający (rys. 8.15c) ma postać:

$$M(x) = -P \cdot x$$

Po podstawieniu $M(x)$ do równania różniczkowego osi odkształconej (8.4), otrzymuje się:

$$EI_y w''(x) = -M(x) = P \cdot x$$

Pierwsze całkowanie

$$EI_y w'(x) = P \cdot \frac{1}{2} \cdot x^2 + C$$

Drugie całkowanie

$$EI_y w(x) = \frac{1}{2} \cdot P \cdot \frac{1}{3} \cdot x^3 + Cx + D = \frac{1}{6} P \cdot x^3 + Cx + D$$

Uwzględnienie warunków brzegowych (wyznaczenie stałych całkowania C i D)

$$w'(x=L) = 0 \rightarrow EI_y w'(x=L) = \frac{1}{2} \cdot P \cdot L^2 + C = 0 \rightarrow C = -\frac{1}{2} PL^2$$

$$w(x=L) = 0 \rightarrow EI_y w(x=L) = \frac{1}{6} P \cdot L^3 + \left(-\frac{1}{2} PL^2\right) \cdot L + D = 0$$

$$\frac{1}{6} P \cdot L^3 - \frac{1}{2} PL^3 + D = 0 \rightarrow \frac{1}{6} P \cdot L^3 - \frac{3}{6} PL^3 + D = 0$$

$$-\frac{2}{6} PL^3 + D = 0 \rightarrow D = \frac{1}{3} PL^3$$

Uwzględniając wyznaczone stałe całkowania, funkcje obrotu i ugięcia przyjmują postać:

$$w'(x) = \varphi(x) = \frac{1}{EI_y} \left[\frac{1}{2} \cdot P \cdot x^2 - \frac{1}{2} PL^2 \right]$$

$$w(x) = \frac{1}{EI_y} \left[\frac{1}{6} P \cdot x^3 - \frac{1}{2} PL^2 \cdot x + \frac{1}{3} PL^3 \right]$$

Przemieszczenia (obrót i ugięcie) w punkcie A wynoszą (rys. 8.15d):

$$\varphi_A = w'(x=0) = \frac{1}{EI_y} \left[\frac{1}{2} \cdot P \cdot 0^2 - \frac{1}{2} PL^2 \right] = -\frac{PL^2}{2EI_y} = -\frac{10000 \cdot 2000^2}{2 \cdot 210000 \cdot 45000000} = -0.021 \text{ rad}$$

$$w_B = w(x=0) = \frac{1}{EI_y} \left[\frac{1}{6} P \cdot 0^3 - \frac{1}{2} PL^2 \cdot 0 + \frac{1}{3} PL^3 \right] = \frac{PL^3}{3EI_y} = \frac{10000 \cdot 2000^3}{3 \cdot 210000 \cdot 45000000} = 28.2 \text{ mm}$$

PRZYKŁAD 8.5

Wyznaczyć funkcję ugięcia belki (rys. 8.16a) oraz przemieszczenia punktu A. Narysować wykres osi odkształconej.

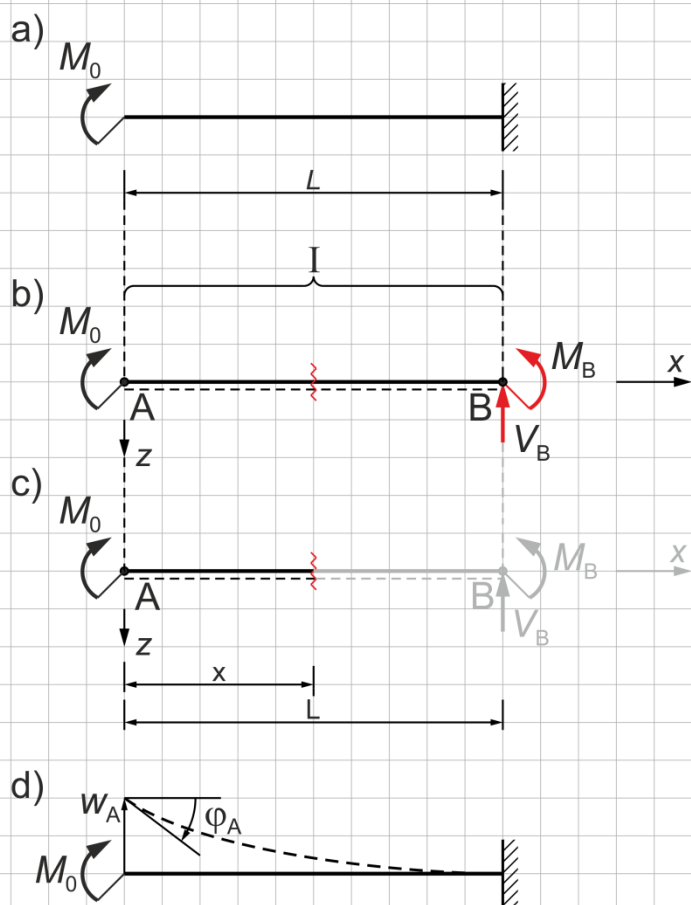
Dane:

$$M_0 = 100 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$L = 1.0 \text{ m}$$

$$E = 210 \text{ GPa}$$

$$I_y = 16300 \text{ mm}^4$$



Rys. 8.16

Dla rozpatrywanego układu reakcje (rys. 8.16b) nie występują w równaniu osi odkształconej belki.

W belce występuje jeden przedział (rys. 8.16b). Wyrażenie określające momenty zginające (rys. 8.16c) jest następujące:

$$M(x) = M_0 \cdot x^0$$

Po podstawieniu $M(x)$ do równania różniczkowego osi odkształconej (8.4), otrzymuje się:

$$EI_y w''(x) = -M(x) = -M_0 \cdot x^0$$

Pierwsze całkowanie

$$EI_y w'(x) = -M_0 \cdot x + C$$

Drugie całkowanie

$$EI_y w(x) = -M_0 \cdot \frac{1}{2} \cdot x^2 + Cx + D$$

Uwzględnienie warunków brzegowych (wyznaczenie stałych całkowania C i D)

$$w'(x=L) = 0 \rightarrow EI_y w'(x=L) = -M_0 \cdot L + C = 0 \rightarrow C = M_0 \cdot L$$

$$w(x=L) = 0 \rightarrow EI_y w(x=L) = -\frac{1}{2} \cdot M_0 \cdot L^2 + M_0 \cdot L \cdot L + D = 0$$

$$-\frac{1}{2} \cdot M_0 \cdot L^2 + M_0 \cdot L^2 + D = 0$$

$$\frac{1}{2} M_0 \cdot L^2 + D = 0 \rightarrow D = -\frac{1}{2} M_0 \cdot L^2$$

Uwzględniając wyznaczone stałe całkowania, funkcje obrotu i ugięcia przyjmują postać:

$$w'(x) = \varphi(x) = \frac{1}{EI_y} [-M_0 \cdot x + M_0 \cdot L]$$

$$w(x) = \frac{1}{EI_y} \left[-\frac{1}{2} \cdot M_0 \cdot x^2 + M_0 \cdot L \cdot x - \frac{1}{2} M_0 \cdot L^2 \right]$$

Przemieszczenia (obrót i ugięcie) w punkcie A wynoszą (rys. 8.16d):

$$\varphi_A = w'(x=0) = \frac{1}{EI_y} [-M_0 \cdot 0 + M_0 \cdot L] = \frac{M_0 \cdot L}{EI_y} = \frac{100000 \cdot 1000}{210000 \cdot 16300} = 0.029 \text{ rad}$$

$$w_A = w(x=0) = \frac{1}{EI_y} \left[-\frac{1}{2} \cdot M_0 \cdot 0^2 + M_0 \cdot L \cdot 0 - \frac{1}{2} M_0 \cdot L^2 \right] = -\frac{M_0 \cdot L^2}{2EI_y} =$$

$$= -\frac{100000 \cdot 1000^2}{2 \cdot 210000 \cdot 16300} = 14.6 \text{ mm}$$

PRZYKŁAD 8.6

Wyznaczyć funkcję ugięcia belki (rys. 8.17a) oraz przemieszczenia punktu B. Narysować wykres osi odkształconej.

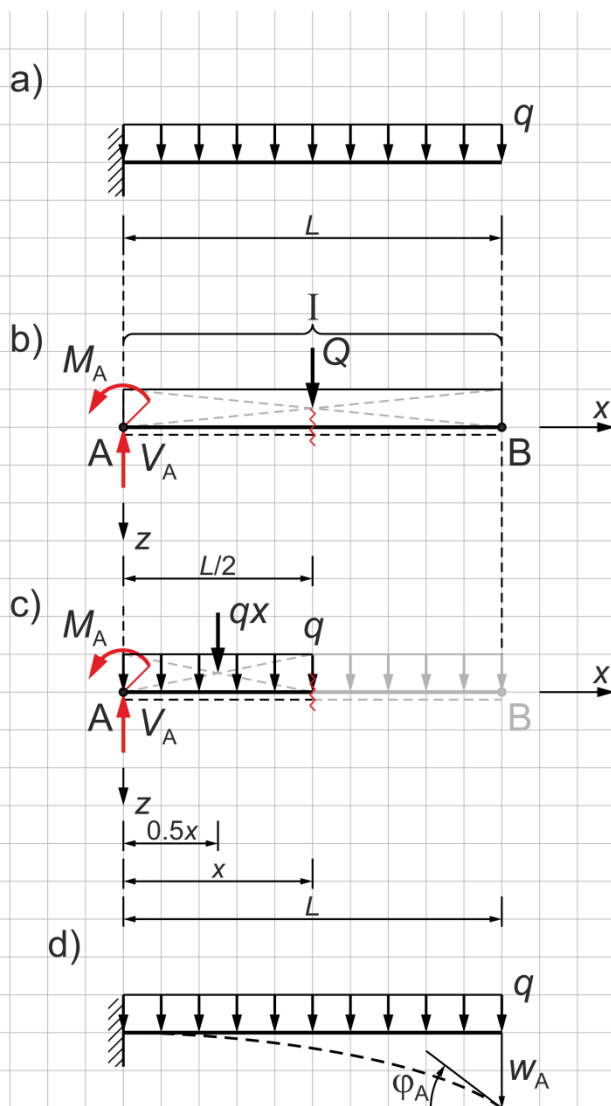
Dane:

$$q = 5000 \text{ N/m}$$

$$L = 2.0 \text{ m}$$

$$E = 210 \text{ GPa}$$

$$I_y = 64500000 \text{ mm}^4$$



Rys. 8.17

ROZWIĄZANIE

Przed przystąpieniem do wyznaczenia wzoru na moment zginający, należy wyznaczyć reakcje (rys. 8.17b). Reakcja pozioma H_A jest równa zero, ponieważ nie ma obciążenia w kierunku osi belki.

Reakcje

$$Q = q \cdot L = 500 \cdot 2 = 1000 \text{ N}$$

$$\sum P_{iz} = 0: \quad -V_A + Q = 0$$

$$V_A = Q = qL = 5000 \cdot 2 = 10000 \text{ N}$$

$$\sum M_A = 0: \quad M_A - Q \cdot 0.5L = 0$$

$$M_A = Q \cdot 0.5L = qL \cdot 0.5L = 0.5qL^2 = 0.5 \cdot 5000 \cdot 2^2 = 10000 \text{ N}\cdot\text{m}$$

W belce występuje jeden przedział (rys. 8.17b). Wzór na moment zginający (rys. 8.17c) jest następujący:

$$\begin{aligned} M(x) &= -M_A \cdot x^0 + V_A \cdot x - qx \cdot 0.5x = -0.5qL^2 \cdot x^0 + qL \cdot x - qx \cdot 0.5x = \\ &= -0.5qL^2 \cdot x^0 + qL \cdot x - 0.5qx^2 \end{aligned}$$

Po podstawieniu $M(x)$ do równania różniczkowego osi odkształconej (8.4), otrzymuje się:

$$EI_y w''(x) = 0.5qL^2 \cdot x^0 - qL \cdot x + 0.5qx^2$$

Pierwsze całkowanie

$$EI_y w'(x) = \frac{1}{2}qL^2 \cdot x - qL \cdot \frac{1}{2} \cdot x^2 + \frac{1}{2}q \cdot \frac{1}{3}x^3 + C = \frac{1}{2}qL^2 \cdot x - \frac{1}{2}qL \cdot x^2 + \frac{1}{6}q \cdot x^3 + C$$

Drugie całkowanie

$$\begin{aligned} EI_y w(x) &= \frac{1}{2}qL^2 \cdot \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}qL \cdot \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{6}q \cdot \frac{1}{4}x^4 + Cx + D = \\ &= \frac{1}{4}qL^2 \cdot x^2 - \frac{1}{6}qL \cdot x^3 + \frac{1}{24}q \cdot x^4 + Cx + D \end{aligned}$$

Uwzględnienie warunków brzegowych (wyznaczenie stałych całkowania C i D)

$$w'(x=0) = 0 \rightarrow EI_y w'(x=0) = \frac{1}{2}qL^2 \cdot 0 - \frac{1}{2}qL \cdot 0^2 + \frac{1}{6}q \cdot 0^3 + C = 0 \rightarrow C = 0$$

$$w(x=0) = 0 \rightarrow EI_y w(x=0) = \frac{1}{4}qL^2 \cdot 0^2 - \frac{1}{6}qL \cdot 0^3 + \frac{1}{24}q \cdot 0^4 + D = 0 \rightarrow D = 0$$

Uwzględniając wyznaczone stałe całkowania, funkcje obrotu i ugięcia przyjmują postać:

$$w'(x) = \varphi(x) = \frac{1}{EI_y} \left[\frac{1}{2}qL^2 \cdot x - \frac{1}{2}qL \cdot x^2 + \frac{1}{6}q \cdot x^3 \right]$$

$$w(x) = \frac{1}{EI_y} \left[\frac{1}{4}qL^2 \cdot x^2 - \frac{1}{6}qL \cdot x^3 + \frac{1}{24}q \cdot x^4 \right]$$

Przemieszczenia (obrót i ugięcie) w punkcie B wynoszą (rys. 8.17d):

$$\begin{aligned}\varphi_B = w'(x = L) &= \frac{1}{EI_y} \left[\frac{1}{2} qL^2 \cdot L - \frac{1}{2} qL \cdot L^2 + \frac{1}{6} q \cdot L^3 \right] = \frac{1}{EI_y} \left[\frac{1}{2} qL^3 - \frac{1}{2} qL^3 + \frac{1}{6} qL^3 \right] = \\ &= \frac{1}{EI_y} \left[\frac{1}{6} qL^3 \right] = \frac{qL^3}{6EI_y} = \frac{5 \cdot 2000^3}{6 \cdot 210000 \cdot 4500000} = 0.007 \text{ rad}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}w_B = w(x = L) &= \frac{1}{EI_y} \left[\frac{1}{4} qL^2 \cdot L^2 - \frac{1}{6} qL \cdot L^3 + \frac{1}{24} q \cdot L^4 \right] = \frac{1}{EI_y} \left[\frac{1}{4} qL^4 - \frac{1}{6} qL^4 + \frac{1}{24} qL^4 \right] = \\ &= \frac{1}{EI_y} \left[\frac{6}{24} qL^4 - \frac{4}{24} qL^4 + \frac{1}{24} qL^4 \right] = \frac{1}{EI_y} \left[\frac{3}{24} qL^4 \right] = \frac{qL^4}{8EI_y} = \\ &= \frac{5 \cdot 2000^4}{8 \cdot 210000 \cdot 4500000} = 10.6 \text{ mm}\end{aligned}$$

PRZYKŁAD 8.7

Wyznaczyć funkcję ugięcia belki (rys. 8.18a) oraz przemieszczenia punktu C. Narysować wykres osi odkształconej.

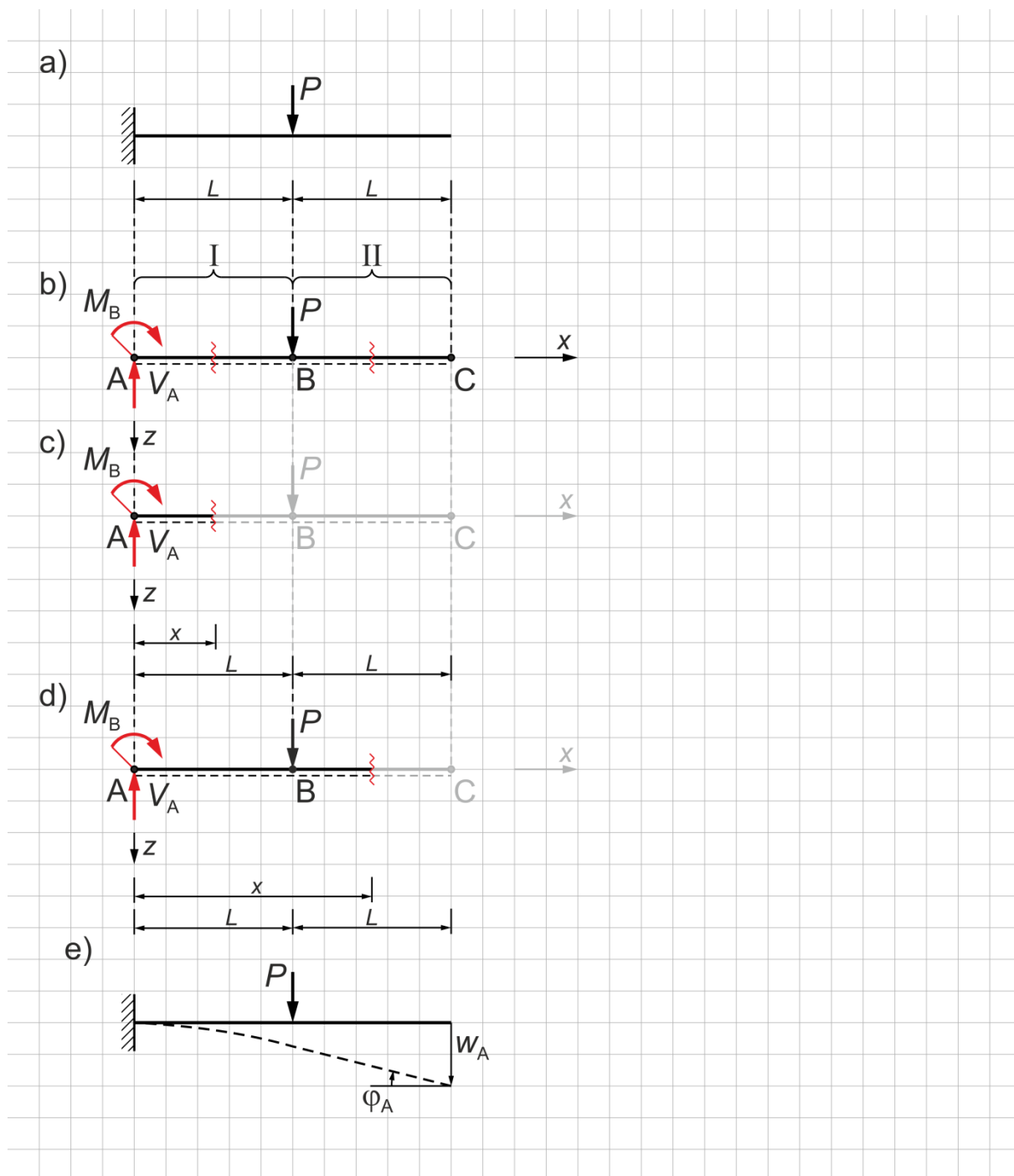
Dane:

$$P = 2000 \text{ N}$$

$$L = 1.0 \text{ m}$$

$$E = 210 \text{ GPa}$$

$$I_y = 200000 \text{ mm}^4$$



Rys. 8.18

ROZWIĄZANIE

Przed przystąpieniem do wyznaczenia wzoru na moment zginający, należy wyznaczyć reakcje (rys. 8.18b). Reakcja pozioma H_A jest równa zero, ponieważ nie ma obciążenia w kierunku osi belki.

Reakcje

$$\sum P_{iz} = 0: \quad -V_A + P = 0$$

$$V_A = P = 2000 \text{ N}$$

$$\sum M_A = 0: \quad -M_A - P \cdot L = 0$$

$$M_A = -P \cdot L = -2000 \cdot 1 = -2000 \text{ N}\cdot\text{m}$$

W belce występują dwa przedziały (rys. 8.18b). Wzór na moment zginający (rys. 8.18c i 8.18d) jest następujący:

$$M(x) = M_A \cdot x^0 + V_A \cdot x|_I - P(x-L)|_{II} = -PL \cdot x^0 + P \cdot x|_I - P(x-L)|_{II}$$

Po podstawieniu $M(x)$ do równania różniczkowego osi odkształconej (8.4), otrzymuje się:

$$EI_y w''(x) = PL \cdot x^0 - P \cdot x|_I + P(x-L)|_{II}$$

Pierwsze całkowanie

$$EI_y w'(x) = PL \cdot x - P \cdot \frac{1}{2} x^2 \Big|_I + P \cdot \frac{1}{2} (x-L)^2 \Big|_{II} + C =$$

$$= PL \cdot x - \frac{1}{2} P \cdot x^2 \Big|_I + \frac{1}{2} P \cdot (x-L)^2 \Big|_{II} + C$$

Drugie całkowanie

$$EI_y w(x) = PL \cdot \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} P \cdot \frac{1}{3} x^3 \Big|_I + \frac{1}{2} P \cdot \frac{1}{3} (x-L)^3 \Big|_{II} + Cx + D =$$

$$= \frac{1}{2} PL \cdot x^2 - \frac{1}{6} P \cdot x^3 \Big|_I + \frac{1}{6} P \cdot (x-L)^3 \Big|_{II} + Cx + D$$

Uwzględnienie warunków brzegowych (wyznaczenie stałych całkowania C i D)

$$w'(x=0) = 0 \rightarrow EI_y w'(x=0) = PL \cdot 0 - \frac{1}{2} P \cdot 0^2 \Big|_I + C = 0 \rightarrow C = 0$$

$$w(x=0) = 0 \rightarrow EI_y w(x=0) = \frac{1}{2} PL \cdot 0^2 - \frac{1}{6} P \cdot 0^3 \Big|_I + D = 0 \rightarrow D = 0$$

Uwzględniając wyznaczone stałe całkowania, funkcje obrotu i ugięcia przyjmują postać:

$$w'(x) = \varphi(x) = \frac{1}{EI_y} \left[PL \cdot x - \frac{1}{2} P \cdot x^2 \Big|_I + \frac{1}{2} P \cdot (x-L)^2 \Big|_{II} \right]$$

$$w(x) = \frac{1}{EI_y} \left[\frac{1}{2} PL \cdot x^2 - \frac{1}{6} P \cdot x^3 \Big|_I + \frac{1}{6} P \cdot (x - L)^3 \Big|_{II} \right]$$

Przemieszczenia (obrót i ugięcie) w punkcie C wynoszą (rys. 8.18e):

$$\begin{aligned} \varphi_C = w'(x = 2L) &= \frac{1}{EI_y} \left[PL \cdot 2L - \frac{1}{2} P \cdot (2L)^2 \Big|_I + \frac{1}{2} P \cdot (2L - L)^2 \Big|_{II} \right] = \\ &= \frac{1}{EI_y} \left[2PL^2 - \frac{1}{2} P \cdot 4L^2 \Big|_I + \frac{1}{2} P \cdot L^2 \Big|_{II} \right] = \frac{1}{EI_y} \left[2PL^2 - 2PL^2 \Big|_I + \frac{1}{2} PL^2 \Big|_{II} \right] = \\ &= \frac{1}{EI_y} \left[\frac{1}{2} PL^2 \right] = \frac{PL^2}{2EI_y} = \frac{2000 \cdot 1000^2}{2 \cdot 210000 \cdot 200000} = 0.024 \text{ rad} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_C = w(x = 2L) &= \frac{1}{EI_y} \left[\frac{1}{2} PL \cdot (2L)^2 - \frac{1}{6} P \cdot (2L)^3 \Big|_I + \frac{1}{6} P \cdot (2L - L)^3 \Big|_{II} \right] = \\ &= \frac{1}{EI_y} \left[\frac{1}{2} PL \cdot 4L^2 - \frac{1}{6} P \cdot 8L^3 \Big|_I + \frac{1}{6} P \cdot L^3 \Big|_{II} \right] = \\ &= \frac{1}{EI_y} \left[2PL^3 - \frac{4}{3} PL^3 \Big|_I + \frac{1}{6} PL^3 \Big|_{II} \right] = \frac{1}{EI_y} \left[\frac{12}{6} PL^3 - \frac{8}{6} PL^3 \Big|_I + \frac{1}{6} PL^3 \Big|_{II} \right] = \\ &= \frac{1}{EI_y} \left[\frac{5}{6} PL^3 \right] = \frac{5PL^3}{6EI_y} = \frac{5 \cdot 2000 \cdot 1000^3}{6 \cdot 210000 \cdot 200000} = 39.7 \text{ mm} \end{aligned}$$

PRZYKŁAD 8.8

Wyznaczyć funkcję ugięcia belki (rys. 8.19a) oraz przemieszczenie (ugięcie) punktu B. Narysować wykres osi odkształconej.

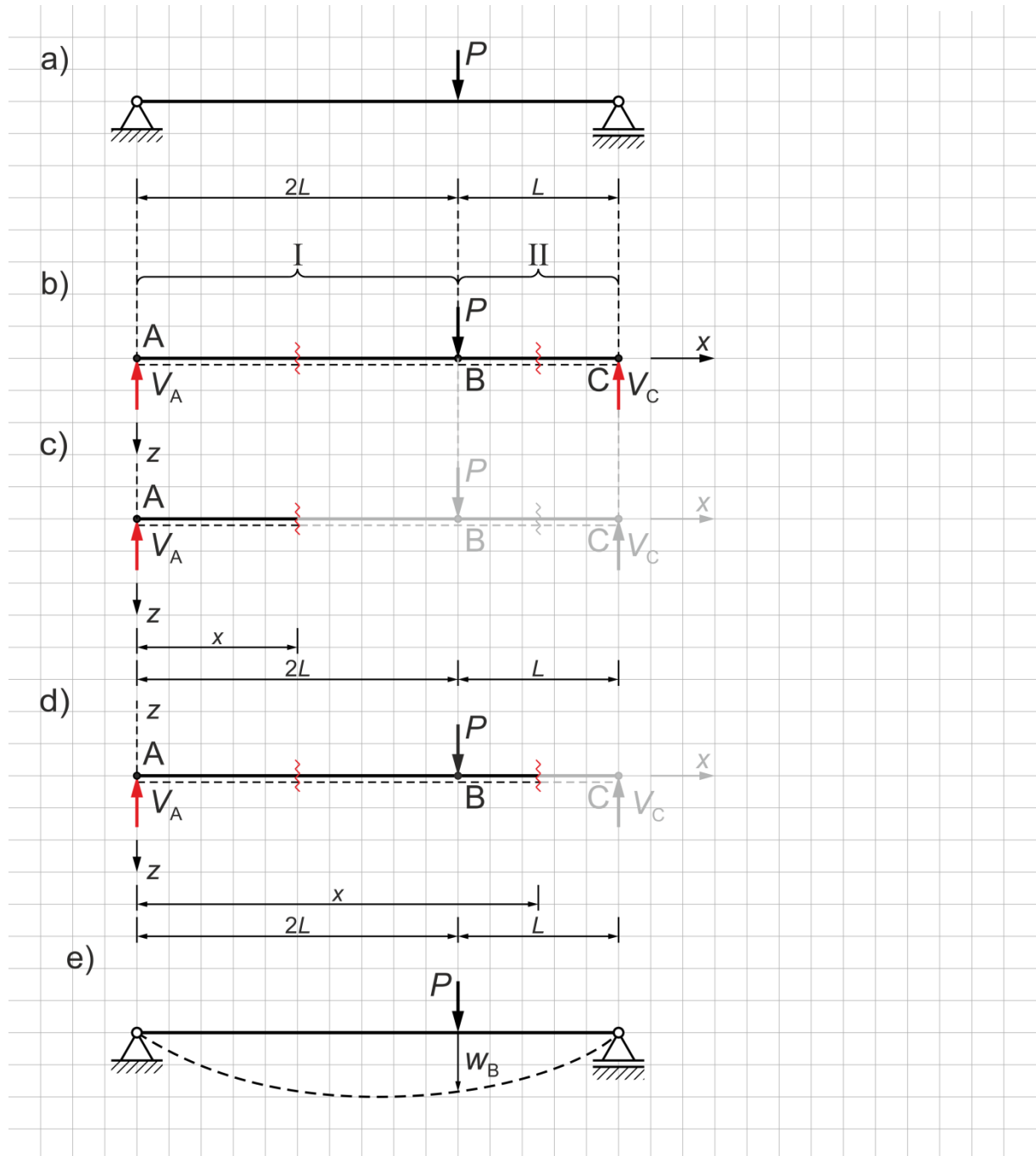
Dane:

$$P = 2000 \text{ N}$$

$$L = 0.5 \text{ m}$$

$$E = 210 \text{ GPa}$$

$$I_y = 200000 \text{ mm}^4$$



Rys. 8.19

ROZWIĄZANIE

Przed przystąpieniem do wyznaczenia wzoru na moment zginający, należy wyznaczyć wartości reakcji (rys. 8.19b). Reakcja pozioma H_A jest równa zero, ponieważ nie ma obciążenia w kierunku osi belki.

Reakcje

$$\begin{aligned}\sum M_A = 0: \quad & -P \cdot 2L - V_C \cdot 3L = 0 \\ & V_C \cdot 3L = P \cdot 2L \quad | : 3L \\ & V_C = \frac{2}{3}P = \frac{2}{3} \cdot 2000 = 1333.3 \text{ N}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum P_{iz} = 0: \quad & -V_A + P - V_C = 0 \\ & V_A = P - V_C = P - \frac{2}{3}P = \frac{1}{3}P = 666.7 \text{ N}\end{aligned}$$

W belce występują dwa przedziały (rys. 8.19b). Wzór na moment zginający (rys. 8.19c i 8.19d) jest następujący:

$$M(x) = V_A \cdot x|_I - P(x - 2L)|_{II} = \frac{1}{3}P \cdot x|_I - P(x - 2L)|_{II}$$

Po podstawieniu $M(x)$ do równania różniczkowego osi odkształconej (8.4), otrzymuje się:

$$EI_y w''(x) = -\frac{1}{3}P \cdot x|_I + P(x - 2L)|_{II}$$

Pierwsze całkowanie

$$EI_y w'(x) = -\frac{1}{3}P \cdot \frac{1}{2}x^2|_I + P \cdot \frac{1}{2}(x - 2L)^2|_{II} + C = -\frac{1}{6}P \cdot x^2|_I + \frac{1}{2}P \cdot (x - 2L)^2|_{II} + C$$

Drugie całkowanie

$$\begin{aligned}EI_y w(x) &= -\frac{1}{6}P \cdot \frac{1}{3}x^3|_I + \frac{1}{2}P \cdot \frac{1}{3} \cdot (x - 2L)^3|_{II} + Cx + D = \\ &= -\frac{1}{18}P \cdot x^3|_I + \frac{1}{6}P \cdot (x - 2L)^3|_{II} + Cx + D\end{aligned}$$

Uwzględnienie warunków brzegowych (wyznaczenie stałych całkowania C i D)

$$w(x = 0) = 0 \rightarrow EI_y w(x = 0) = -\frac{1}{18}P \cdot 0^3|_I + C \cdot 0 + D = 0 \rightarrow D = 0$$

$$\begin{aligned}w(x = 3L) = 0 \rightarrow EI_y w(x = 3L) &= -\frac{1}{18}P \cdot (3L)^3|_I + \frac{1}{6}P \cdot (3L - 2L)^3|_{II} + C \cdot 3L = 0 \\ &= -\frac{1}{18}P \cdot 27L^3 + \frac{1}{6}P \cdot L^3 + C \cdot 3L = 0 \rightarrow -\frac{9}{6}PL^3 + \frac{1}{6}PL^3 + C \cdot 3L = 0 \\ &= -\frac{8}{6}PL^3 + C \cdot 3L = 0 \rightarrow C \cdot 3L = \frac{8}{6}PL^3 \quad | : 3L\end{aligned}$$

$$C = \frac{8}{18} PL^2 = \frac{4}{9} PL^2$$

Uwzględniając wyznaczone stałe całkowania, funkcje obrotu i ugięcia przyjmują postać:

$$w'(x) = \varphi(x) = \frac{1}{EI_y} \left[-\frac{1}{6} P \cdot x^2 \Big|_I + \frac{1}{2} P \cdot (x - 2L)^2 \Big|_{II} + \frac{4}{9} PL^2 \right]$$

$$w(x) = \frac{1}{EI_y} \left[-\frac{1}{18} P \cdot x^3 \Big|_I + \frac{1}{6} P \cdot (x - 2L)^3 \Big|_{II} + \frac{4}{9} PL^2 x \right]$$

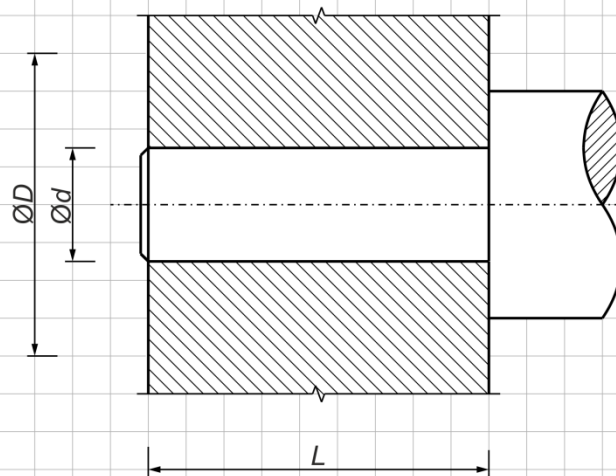
Przemieszczenie (ugięcie) w punkcie B wynosi (rys. 8.19e):

$$\begin{aligned} w_B = w(x = 2L) &= \frac{1}{EI_y} \left[-\frac{1}{18} P \cdot (2L)^3 \Big|_I + \frac{4}{9} PL^2 \cdot 2L \right] = \frac{1}{EI_y} \left[-\frac{1}{18} P \cdot 8L^3 + \frac{8}{9} PL^3 \right] = \\ &= \frac{1}{EI_y} \left[-\frac{8}{18} P \cdot 8L^3 + \frac{8}{9} PL^3 \right] = \frac{1}{EI_y} \left[-\frac{4}{9} PL^3 + \frac{8}{9} PL^3 \right] = \frac{1}{EI_y} \left[\frac{4}{9} PL^3 \right] = \\ &= \frac{4PL^3}{9EI_y} = \frac{4 \cdot 2000 \cdot 500^3}{9 \cdot 210000 \cdot 200000} = 2.65 \text{ mm} \end{aligned}$$

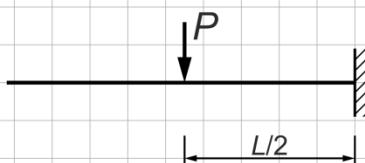
PRZYKŁAD 8.9

Na czop (rys. 8.20a) wywierany jest nacisk 55 kN. Wyznaczyć średnicę d i długość L czopa, modelując go jako wspornik. Naprężenia dopuszczalne na nacisk powierzchniowy $k_d = 5 \text{ MPa}$, a naprężenia dopuszczalne na zginanie $k_g = 80 \text{ MPa}$.

a)



b)



Rys. 8.20

ROZWIĄZANIE

Nacisk na czop równy 55 kN zastępuje się siłą skupioną P w środku długości czopa (rys. 8.20b).

Maksymalny moment zginający

$$M = P \cdot \frac{L}{2}$$

Wskaźnik przekroju przy zginaniu

$$W = \frac{\pi d^3}{32}$$

Z warunku nośności na zginanie

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{W} \leq k_g$$

$$\sigma_{\max} = \frac{P \cdot \frac{L}{2}}{\frac{\pi d^3}{32}} \leq k_g \quad | \cdot \frac{\pi d^3}{k_g}$$

$$1) \quad \frac{\pi d^3}{32} = \frac{P \cdot L}{2k_g}$$

Z warunku nośności na docisk

$$\sigma_d = \frac{P}{d \cdot L} \leq k_d$$

$$2) \quad L = \frac{P}{d \cdot k_d}$$

Po podstawieniu wzoru 2) do równania 1), otrzymuje się:

$$\frac{\pi d^3}{32} = \frac{P \cdot \frac{P}{d \cdot k_d}}{2k_g} = \frac{P^2}{2k_g} \quad | \cdot \frac{32d}{\pi}$$

$$d^4 = \frac{32P^2}{2\pi \cdot k_g \cdot k_d} \rightarrow d = \sqrt[4]{\frac{32P^2}{2\pi \cdot k_g \cdot k_d}} = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 55000^2}{2\pi \cdot 80 \cdot 5}} \approx 78.8 \text{ mm}$$

Przyjęto średnicę $d = 80 \text{ mm}$.

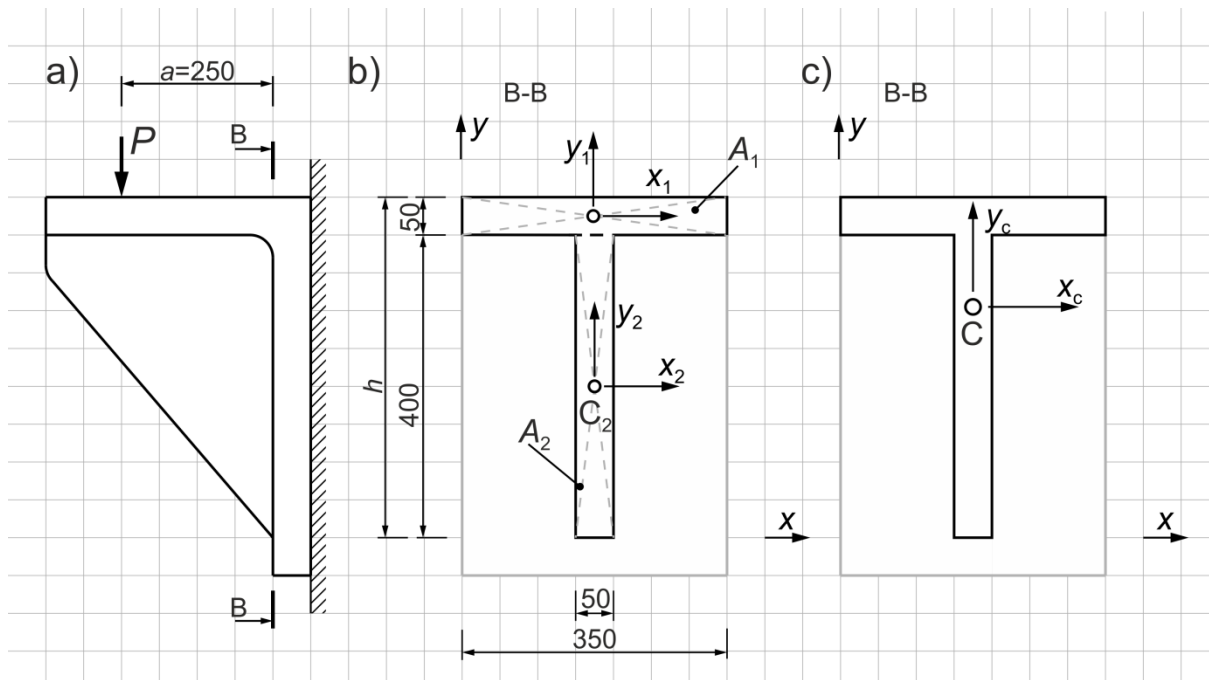
Z równania 2) otrzymuje się:

$$L = \frac{P}{d \cdot k_d} = \frac{55000}{80 \cdot 5} = 137.5 \text{ mm}$$

Przyjęto długość czopa $L = 138 \text{ mm}$.

PRZYKŁAD 8.10

Wyznaczyć dopuszczalną wartość siły P działającej na żeliwny wspornik (rys. 2.21a). Naprężenia dopuszczalne na rozciąganie $k_t = 30 \text{ MPa}$ oraz naprężenia dopuszczalne na ściskanie $k_c = 100 \text{ MPa}$.



Rys. 8.21

ROZWIĄZANIE

Maksymalny moment zginający (przekrój B-B)

$$M = P \cdot a = 250P$$

Pole powierzchni przekroju B-B (rys. 8.22b)

$$A_1 = 350 \cdot 50 = 17500 \text{ mm}^2$$

$$A_2 = 50 \cdot 400 = 20000 \text{ mm}^2$$

$$A = A_1 + A_2 = 17500 + 20000 = 37500 \text{ mm}^2$$

Moment statyczny przekroju B-B względem osi x (rys. 8.22b)

$$\begin{aligned} S_x &= A_1 \cdot y_1 + A_2 \cdot y_2 = 17500 \cdot 425 + 20000 \cdot 200 = 7437500 + 4000000 = \\ &= 11437500 \text{ mm}^3 \end{aligned}$$

Położenie środka geometrycznego przekroju B-B (rys. 8.22c)

$$x_c = 175 \text{ mm}$$

$$y_c = \frac{S_x}{A} = \frac{11437500}{37500} = 305 \text{ mm}$$

Moment bezwładności przekroju B-B względem osi x_c (rys. 8.22c)

$$I_{x_1} = \frac{350 \cdot 50^3}{12} = 3645833.3 \text{ mm}^4$$

$$I_{x_2} = \frac{50 \cdot 400^3}{12} = 266666666.7 \text{ mm}^4$$

$$\begin{aligned} I_{x_c} &= I_{x_1} + A_1 \cdot (y_1 - y_c)^2 + I_{x_2} + A_2 \cdot (y_2 - y_c)^2 = \\ &= [3645833.3 + 17500 \cdot (425 - 305)^2] + [266666666.7 + 20000 \cdot (200 - 305)^2] = \\ &= 255645833.3 + 487166666.7 = 742812599 \text{ mm}^4 \end{aligned}$$

Wskaźniki przy zginaniu dla przekroju B-B względem osi obojętnej x_c

$$W_g = \frac{I_{x_c}}{h - y_c} = \frac{742812599}{450 - 305} = 5122845.5 \text{ mm}^3$$

$$W_d = \frac{I_{x_c}}{y_c} = \frac{742812599}{305} = 2435451.1 \text{ mm}^3$$

Z warunku nośności na rozciąganie włókien górnych w przekroju B-B

$$\sigma_r = \frac{M}{W_g} \leq k_r \rightarrow \frac{250P}{W_g} \leq k_r \quad | \cdot \frac{W_g}{250}$$

$$P \leq \frac{k_r \cdot W_g}{250} = \frac{30 \cdot 5122845.5}{250} \approx 614742 \text{ N}$$

Z warunku nośności na ściskanie włókien dolnych w przekroju B-B

$$\sigma_c = \frac{M}{W_d} \leq k_c \rightarrow \frac{250P}{W_d} \leq k_c \quad | \cdot \frac{W_d}{250}$$

$$P \leq \frac{k_c \cdot W_d}{250} = \frac{100 \cdot 2435451.1}{250} \approx 974180 \text{ N}$$

Decyduje warunek nośności na rozciąganie włókien górnych przekroju B-B. Dopuszczalna wartość siły $P = 614.7 \text{ kN}$.

9.

PŁASKI STAN NAPRĘŻENIA I ODKSZTAŁCENIA

Rozpatrujemy ciało odkształcalne o ciągłym rozkładzie punktów materialnych. Stan naprężenia w dowolnym punkcie ciała odkształcalnego opisany jest przez tensor naprężenia:

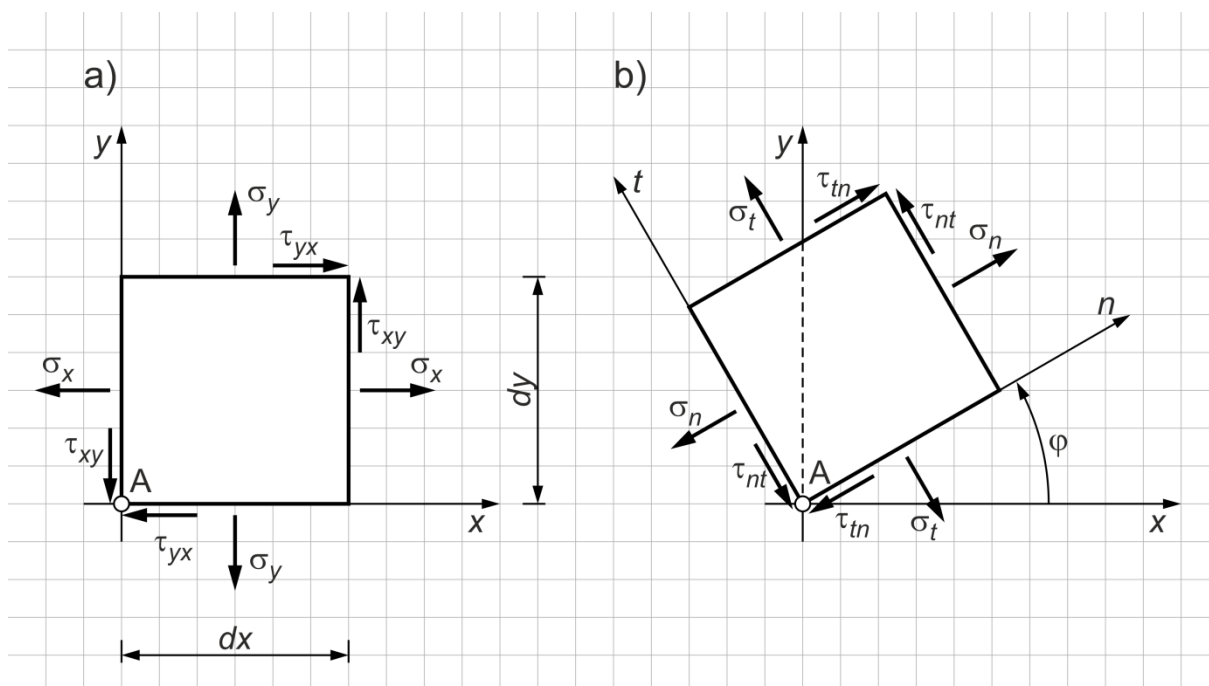
$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (9.1)$$

gdzie:

$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ – naprężenia normalne,

$\begin{cases} \tau_{xy} = \tau_{yx} \\ \tau_{xz} = \tau_{zx} \\ \tau_{yz} = \tau_{zy} \end{cases}$ – naprężenia styczne (parami równe; aksjomat Boltzmana)

Szczególnym przypadkiem stanu naprężenia jest płaski stan naprężenia (kod PSN), w którym naprężenia na wybranej parze przeciwległych płaszczyzn elementarnej objętości (element różniczkowy) są równe zero (rys. 9.1a – PSN dla płaszczyzny xy ; $\sigma_z = 0$, $\tau_{xz} = 0$, $\tau_{yz} = 0$).



Rys. 9.1

Wzory transformacyjne dla PSN mają postać (rys. 9.1b dla $\varphi > 0$):

$$\sigma_n = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\varphi + \tau_{xy} \sin 2\varphi \quad (9.2)$$

$$\sigma_t = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) - \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\varphi - \tau_{xy} \sin 2\varphi \quad (9.3)$$

$$\tau_{nt} = -\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\varphi + \tau_{xy} \cos 2\varphi \quad (9.4)$$

przy czym:

$$\sigma_n + \sigma_t = \sigma_x + \sigma_y \quad (9.5)$$

Istnieje szczególna orientacja, dla której naprężenia styczne są równe zero. W PSN występuje ona dla obrotu elementarnej objętości o kąt φ_0 :

$$\operatorname{tg} 2\varphi_0 = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \quad (9.6)$$

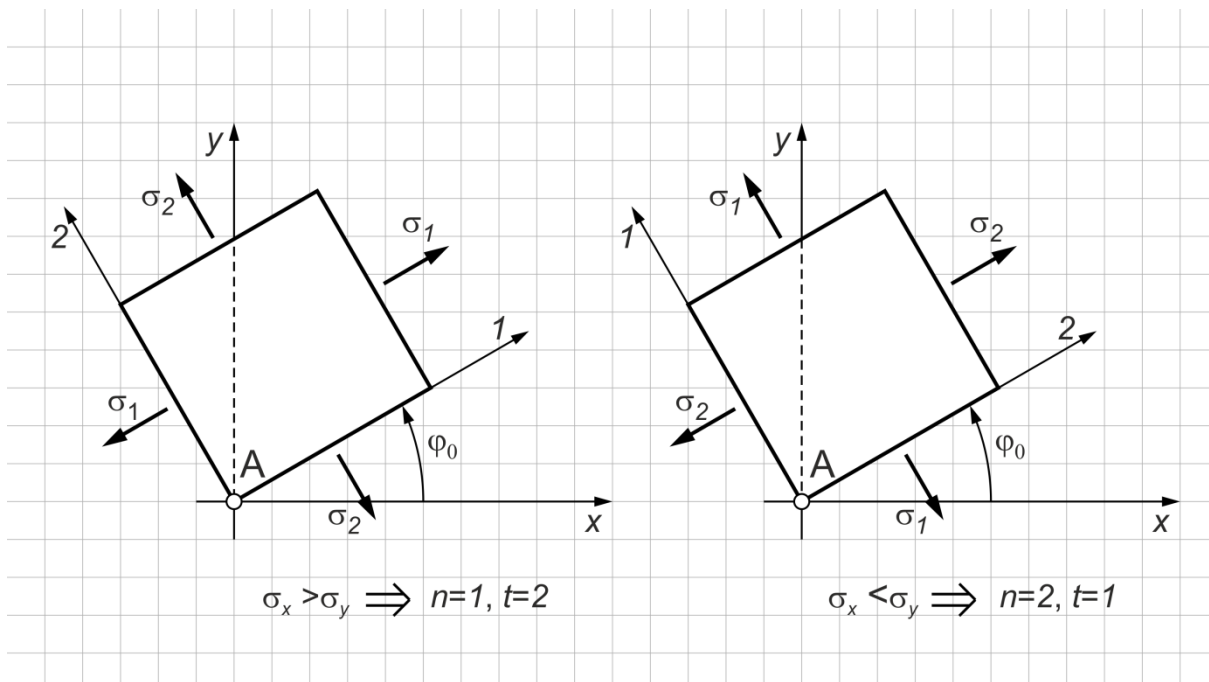
Dla takiej orientacji, naprężenia normalne są nazywane naprężeniami głównymi, a ich kierunki – kierunkami głównymi (rys. 9.2):

$$\sigma_1 = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \quad (9.7)$$

$$\sigma_2 = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) - \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \quad (9.8)$$

przy czym $\sigma_2 \leq \sigma_1$.

W przypadku, gdy $\sigma_x = \sigma_y$ przyjmuje się $\varphi_0 = 45^\circ$ dla $\tau_{xy} > 0$ oraz $\varphi_0 = -45^\circ$ dla $\tau_{xy} < 0$.



Rys. 9.2

Stan odkształcenia w dowolnym punkcie ciała odkształcalnego opisany jest przez tensor odkształcenia:

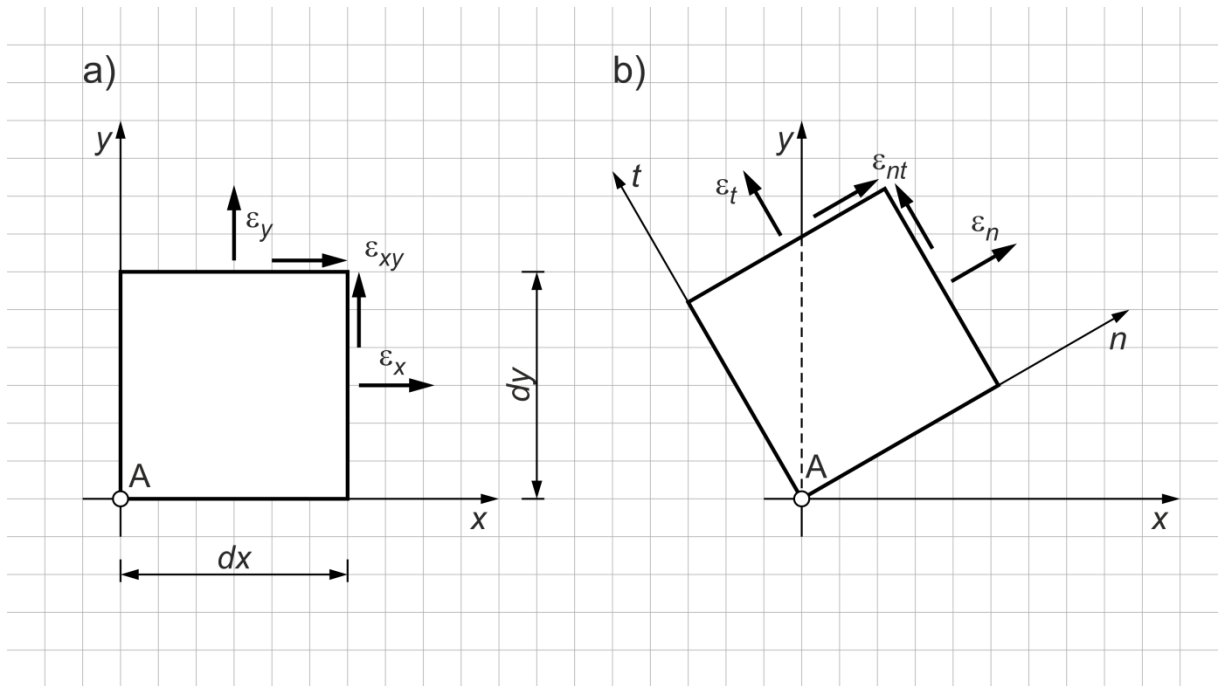
$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_y & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix} \quad (9.9)$$

gdzie:

$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ – odkształcenia kierunkowe (liniowe),

$\begin{cases} \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} \\ \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{zx} \\ \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zy} \end{cases}$ – połowy odkształceń postaciowych.

Szczególnym przypadkiem stanu odkształcenia jest płaski stan odkształcenia (kod PSO), w którym niezerowe odkształcenia występują tylko w wybranej płaszczyźnie (rys. 9.3a – PSO dla płaszczyzny xy ; $\varepsilon_z = 0, \varepsilon_{xz} = 0, \varepsilon_{yz} = 0$).



Rys. 9.3

Wzory transformacyjne dla PSO przyjmują postać (rys. 9.3b dla $\varphi > 0$):

$$\varepsilon_n = \frac{1}{2}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) + \frac{1}{2}(\varepsilon_x - \varepsilon_y) \cos 2\varphi + \varepsilon_{xy} \sin 2\varphi \quad (9.10)$$

$$\varepsilon_t = \frac{1}{2}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) - \frac{1}{2}(\varepsilon_x - \varepsilon_y) \cos 2\varphi - \varepsilon_{xy} \sin 2\varphi \quad (9.11)$$

$$\varepsilon_{nt} = -\frac{1}{2}(\varepsilon_x - \varepsilon_y) \sin 2\varphi + \varepsilon_{xy} \cos 2\varphi \quad (9.12)$$

Tak jak w przypadku stanu naprężenia, dla stanu odkształcenia istnieje szczególna orientacja, dla której odkształcenia postaciowe są równe zero. Dla PSO występuje ona dla obrotu elementarnej objętości o kąt φ_0 :

$$\operatorname{tg} 2\varphi_0 = \frac{2\varepsilon_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y} \quad (9.13)$$

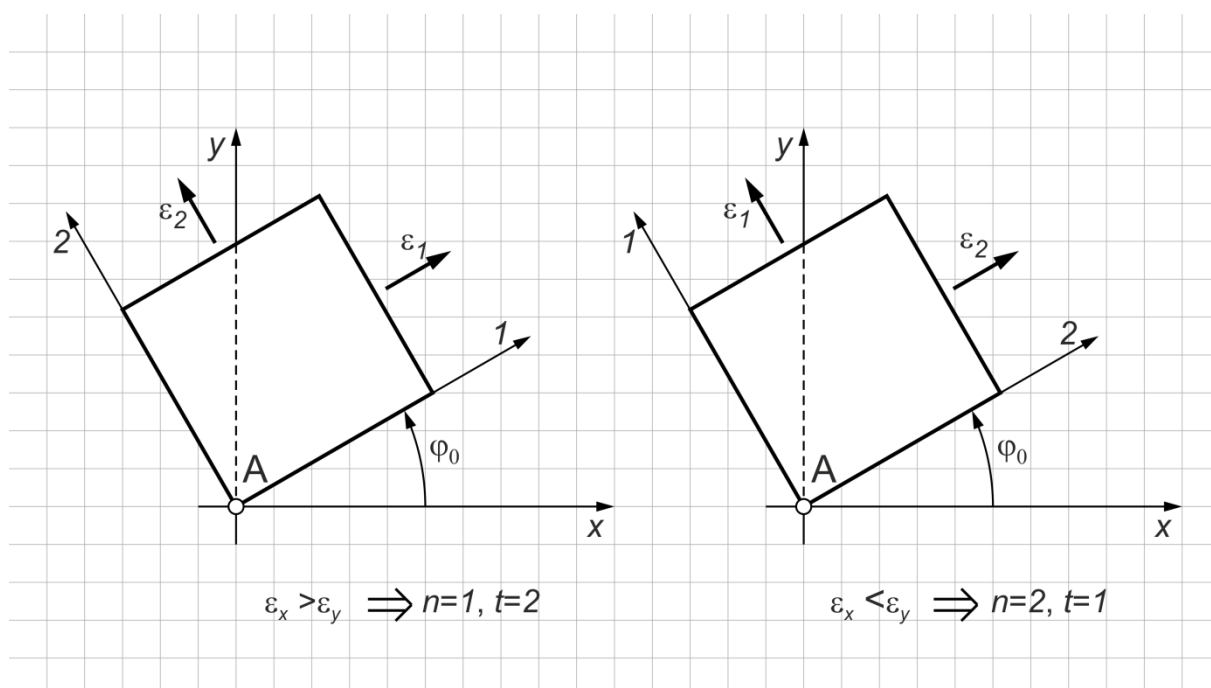
Dla takiej orientacji, odkształcenia wzdłużne są nazywane odkształceniami głównymi, a ich kierunki – kierunkami głównymi (rys. 9.4):

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{2}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) + \frac{1}{2}\sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + 4\varepsilon_{xy}^2} \quad (9.14)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{2}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) - \frac{1}{2}\sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + 4\varepsilon_{xy}^2} \quad (9.15)$$

przy czym $\varepsilon_2 \leq \varepsilon_1$.

W przypadku, gdy $\varepsilon_x = \varepsilon_y$ przyjmuje się $\varphi_0 = 45^\circ$ dla $\varepsilon_{xy} > 0$ oraz $\varphi_0 = -45^\circ$ dla $\varepsilon_{xy} < 0$.
W przypadku materiału izotropowego kierunki główne PSN i PSO pokrywają się.



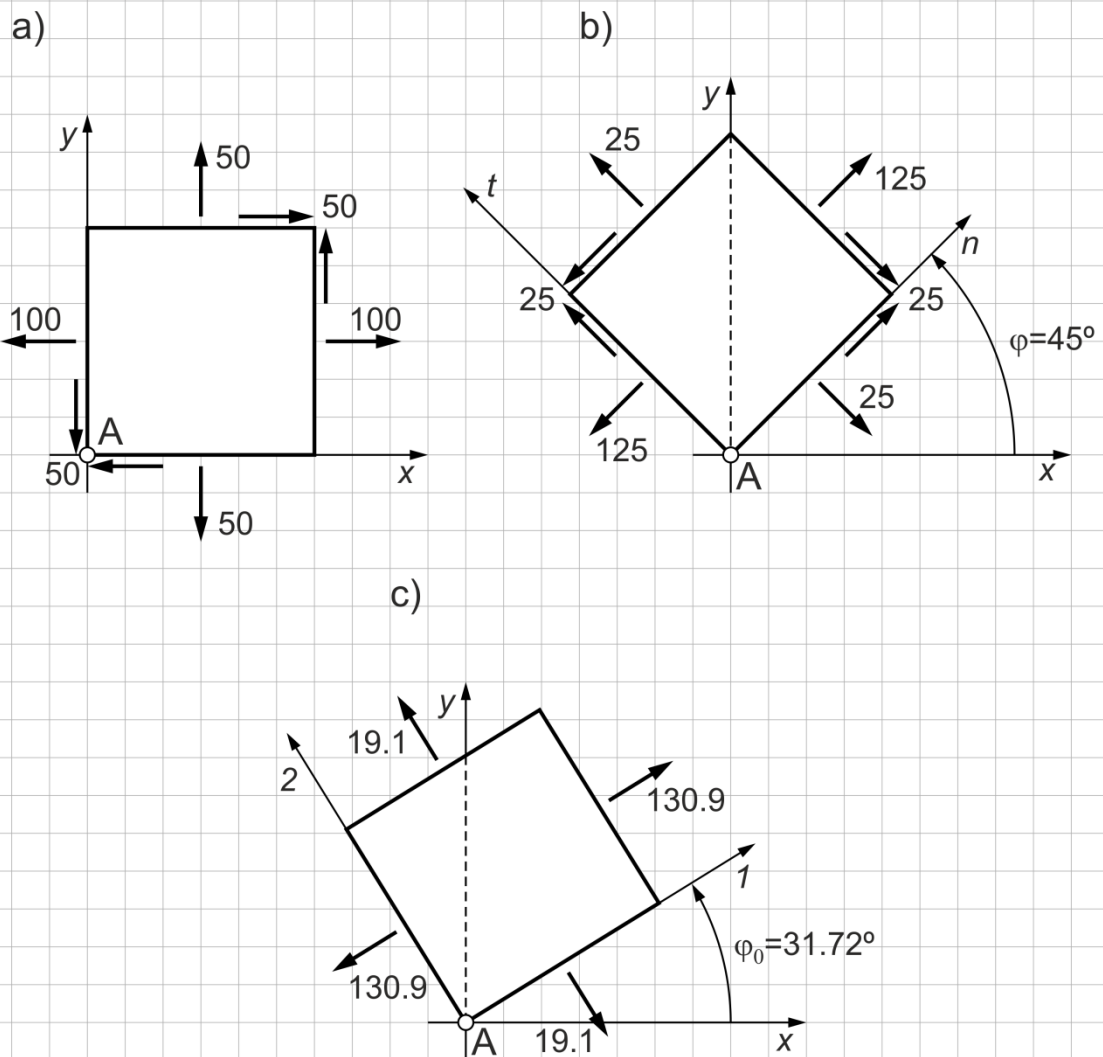
Rys. 9.4

PRZYKŁAD 9.1

Materiał w punkcie A jest w PSN:

$$\sigma_x = 100 \text{ MPa} \quad \sigma_y = 50 \text{ MPa} \quad \tau_{xy} = 50 \text{ MPa}$$

Zilustrować naprężenia na elemencie różniczkowym. Wykonać transformację obrotu o kąt $\varphi = 45^\circ$. Wyznaczyć kierunki główne i naprężenia główne.



Rys. 9.5

ROZWIĄZANIE

Ilustracja naprężeń na elemencie różniczkowym

Naprężenia zilustrowano na rys. 9.5a.

Transformacja obrotu (rys. 9.5b)

$$\varphi = 45^\circ$$

$$2\varphi = 90^\circ$$

$$\sin 2\varphi = 1$$

$$\cos 2\varphi = 0$$

$$\begin{aligned}\sigma_n &= \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\varphi + \tau_{xy} \sin 2\varphi = \\ &= \frac{1}{2}(100 + 50) + \frac{1}{2}(100 - 50) \cos 90^\circ + 50 \sin 90^\circ = \frac{1}{2} \cdot 150 + \frac{1}{2} \cdot 50 \cdot 0 + 50 \cdot 1 = \\ &= 75 + 50 = 125 \text{ MPa}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_t &= \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) - \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\varphi - \tau_{xy} \sin 2\varphi = \\ &= \frac{1}{2}(100 + 50) - \frac{1}{2}(100 - 50) \cos 90^\circ - 50 \sin 90^\circ = \frac{1}{2} \cdot 150 - \frac{1}{2} \cdot 50 \cdot 0 - 50 \cdot 1 = \\ &= 75 - 50 = 25 \text{ MPa}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau_{nt} &= -\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\varphi + \tau_{xy} \cos 2\varphi = -\frac{1}{2}(100 - 50) \sin 90^\circ + 50 \cos 90^\circ = \\ &= -\frac{1}{2} \cdot 50 \cdot 1 + 50 \cdot 0 = -25 \text{ MPa}\end{aligned}$$

Kierunki główne i naprężenia główne (rys. 9.5c)

$$\operatorname{tg} 2\varphi_0 = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{2 \cdot 50}{100 - 50} = \frac{100}{50} = 2 \rightarrow 2\varphi_0 = 63.44^\circ \rightarrow \varphi_0 = 31.72^\circ$$

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} = \frac{1}{2}(100 + 50) + \frac{1}{2}\sqrt{(100 - 50)^2 + 4 \cdot 50^2} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot 150 + \frac{1}{2}\sqrt{2500 + 10000} = 75 + 55.9 = 130.9 \text{ MPa}\end{aligned}$$

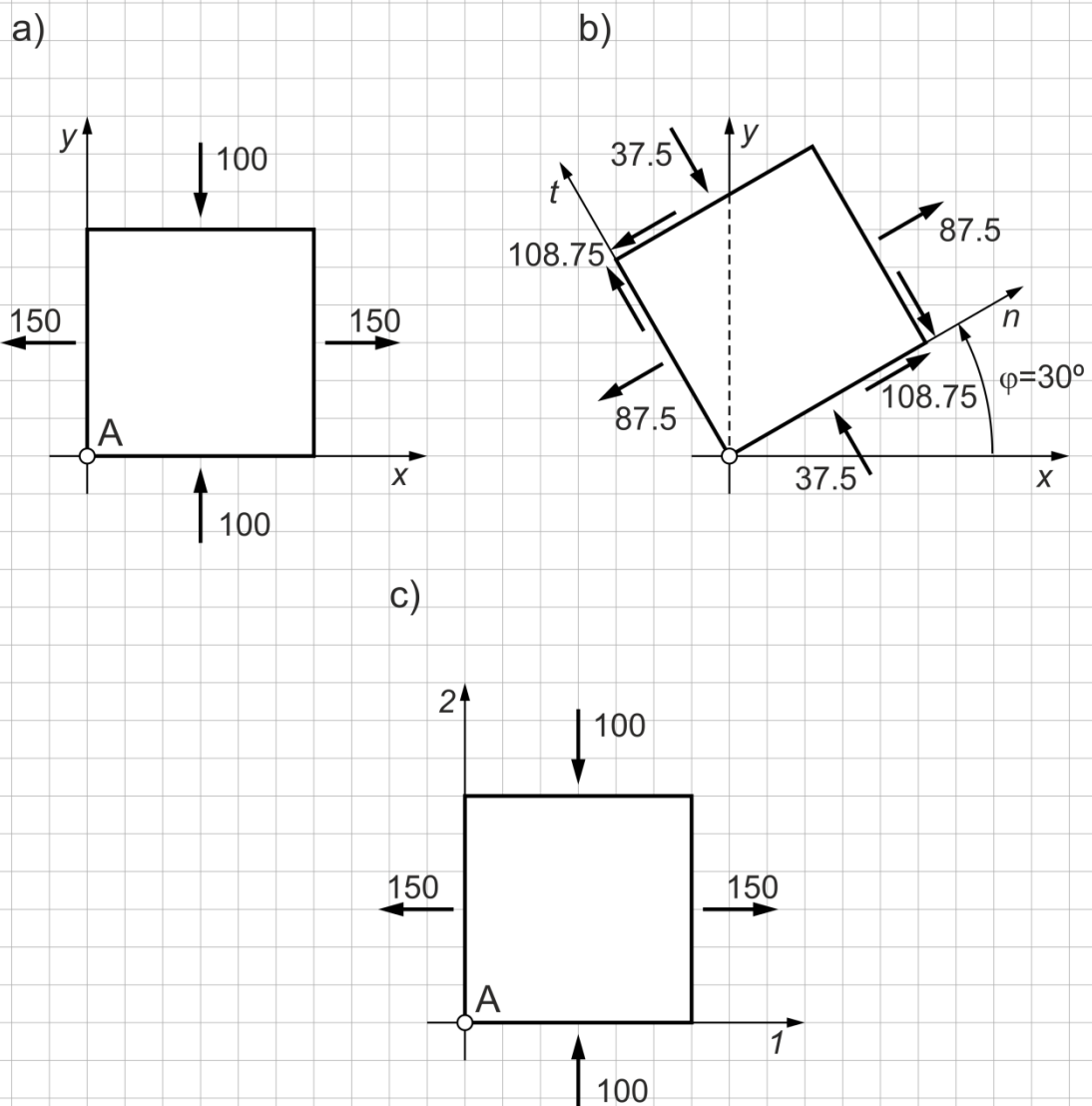
$$\begin{aligned}\sigma_2 &= \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) - \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} = \frac{1}{2}(100 + 50) - \frac{1}{2}\sqrt{(100 - 50)^2 + 4 \cdot 50^2} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot 150 - \frac{1}{2}\sqrt{2500 + 10000} = 75 - 55.9 = 19.1 \text{ MPa}\end{aligned}$$

PRZYKŁAD 9.2

Materiał w punkcie A jest w PSN:

$$\sigma_x = 150 \text{ MPa} \quad \sigma_y = -100 \text{ MPa}$$

Zilustrować naprężenia na elemencie różniczkowym. Wykonać transformację obrotu o kąt $\varphi = 30^\circ$. Wyznaczyć kierunki główne i naprężenia główne.



Rys. 9.6

ROZWIĄZANIE

Ilustracja naprężeń na elemencie różniczkowym

Naprężenia zilustrowano na rys. 9.6a.

Transformacja obrotu (rys. 9.6b)

$$\varphi = 30^\circ$$

$$2\varphi = 60^\circ$$

$$\sin 2\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.87$$

$$\cos 2\varphi = 0.5$$

$$\begin{aligned}\sigma_n &= \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\varphi + \tau_{xy} \sin 2\varphi = \\ &= \frac{1}{2}(150 + (-100)) + \frac{1}{2}(150 - (-100)) \cos 60^\circ + 0 \sin 60^\circ = \\ &= \frac{1}{2} \cdot 50 + \frac{1}{2} \cdot 250 \cdot 0.5 = 25 + 62.5 = 87.5 \text{ MPa}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_t &= \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) - \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\varphi - \tau_{xy} \sin 2\varphi = \\ &= \frac{1}{2}(150 + (-100)) - \frac{1}{2}(150 - (-100)) \cos 60^\circ - 0 \sin 60^\circ = \\ &= \frac{1}{2} \cdot 50 - \frac{1}{2} \cdot 250 \cdot 0.5 = 25 - 62.5 = -37.5 \text{ MPa}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau_{nt} &= -\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\varphi + \tau_{xy} \cos 2\varphi = -\frac{1}{2}(150 - (-100)) \sin 60^\circ + 0 \cos 60^\circ = \\ &= -\frac{1}{2} \cdot 250 \cdot 0.87 = -108.75 \text{ MPa}\end{aligned}$$

Kierunki główne i naprężenia główne (rys. 9.6c)

Kierunki główne pokrywają się z osiami x, y , ponieważ $\tau_{xy} = 0$.

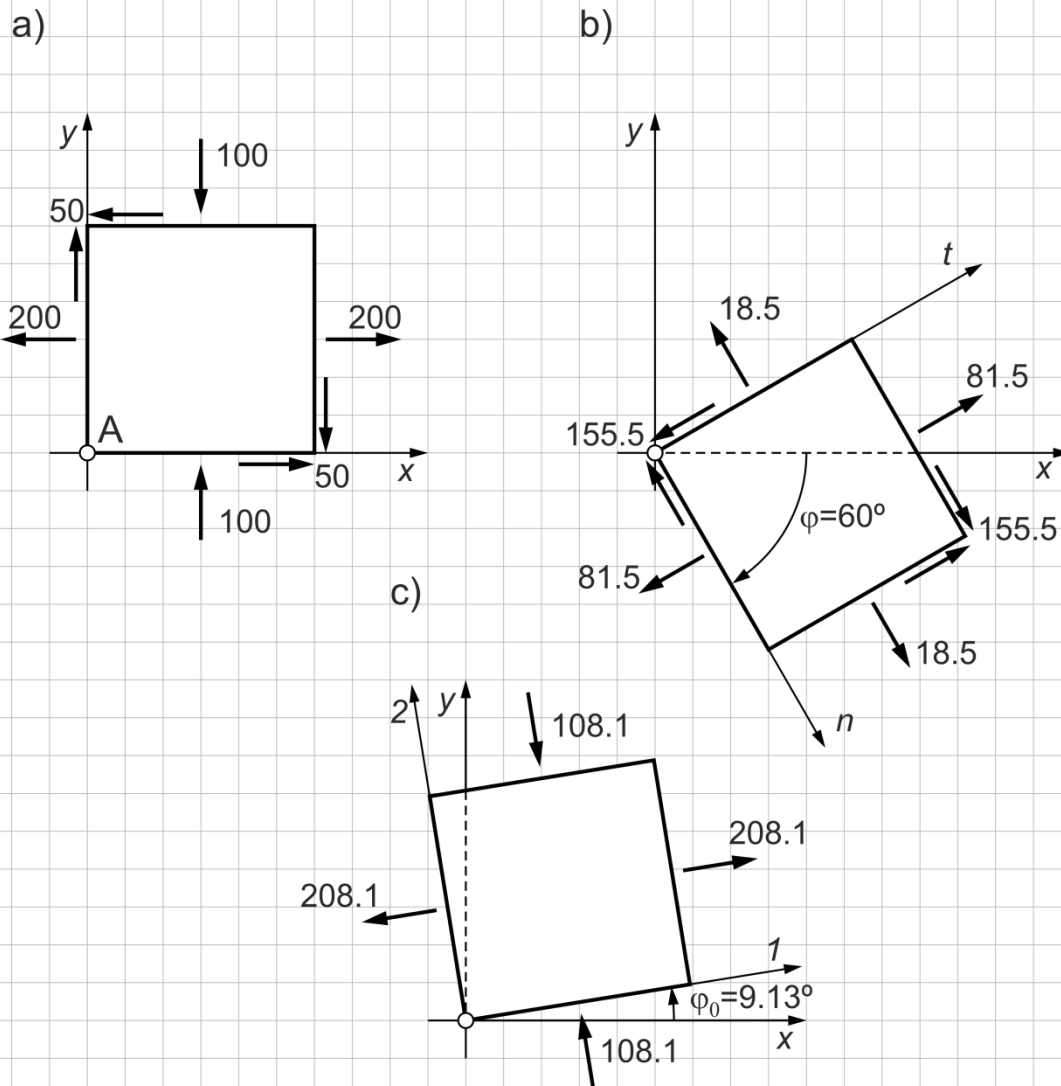
Ponieważ $\sigma_x > \sigma_y$, to $1 = x$ i $2 = y$ oraz $\sigma_1 = \sigma_x = 150 \text{ MPa}$ i $\sigma_2 = \sigma_y = -100 \text{ MPa}$.

PRZYKŁAD 9.3

Materiał w punkcie A jest w PSN:

$$\sigma_x = 200 \text{ MPa} \quad \sigma_y = -100 \text{ MPa} \quad \tau_{xy} = -50 \text{ MPa}$$

Zilustrować naprężenia na elemencie różniczkowym. Wykonać transformację obrotu o kąt $\varphi = -60^\circ$. Wyznaczyć kierunki główne i naprężenia główne.



Rys. 9.7

ROZWIĄZANIE

Ilustracja naprężeń na elemencie różniczkowym

Naprężenia zilustrowano na rys. 9.7a.

Transformacja obrotu (rys. 9.7b)

$$\varphi = -60^\circ$$

$$2\varphi = -120^\circ$$

$$\sin 2\varphi = -\frac{\sqrt{3}}{2} = -0.87$$

$$\cos 2\varphi = -0.5$$

$$\begin{aligned}\sigma_n &= \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\varphi + \tau_{xy} \sin 2\varphi = \\ &= \frac{1}{2}(200 + (-100)) + \frac{1}{2}(200 - (-100)) \cos(-120^\circ) + (-50) \sin(-120^\circ) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot 100 + \frac{1}{2} \cdot 300 \cdot (-0.5) - 50 \cdot (-0.87) = 50 - 75 + 43.5 = 18.5 \text{ MPa}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_t &= \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) - \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\varphi - \tau_{xy} \sin 2\varphi = \\ &= \frac{1}{2}(200 + (-100)) - \frac{1}{2}(200 - (-100)) \cos(-120^\circ) - (-50) \sin(-120^\circ) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot 100 - \frac{1}{2} \cdot 300 \cdot (-0.5) + 50 \cdot (-0.87) = 50 + 75 - 43.5 = 81.5 \text{ MPa}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau_{nt} &= -\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\varphi - \tau_{xy} \cos 2\varphi = \\ &= -\frac{1}{2}(200 - (-100)) \sin(-120^\circ) + (-50) \cos(-120^\circ) = \\ &= -0.5 \cdot 300 \cdot (-0.87) - 50 \cdot (-0.5) = 130.5 + 25 = 155.5 \text{ MPa}\end{aligned}$$

Kierunki główne i naprężenia główne (rys. 9.7c)

$$\operatorname{tg} 2\varphi_0 = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{2 \cdot (-50)}{200 - (-100)} = \frac{-100}{300} = -0.33 \quad \rightarrow \quad 2\varphi_0 = -18.26^\circ \quad \rightarrow \quad \varphi_0 = -9.13^\circ$$

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} = \\ &= \frac{1}{2}(200 + (-100)) + \frac{1}{2}\sqrt{(200 - (-100))^2 + 4 \cdot (-50)^2} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot 100 + \frac{1}{2}\sqrt{90000 + 10000} = 50 + 158.1 = 208.1 \text{ MPa}\end{aligned}$$

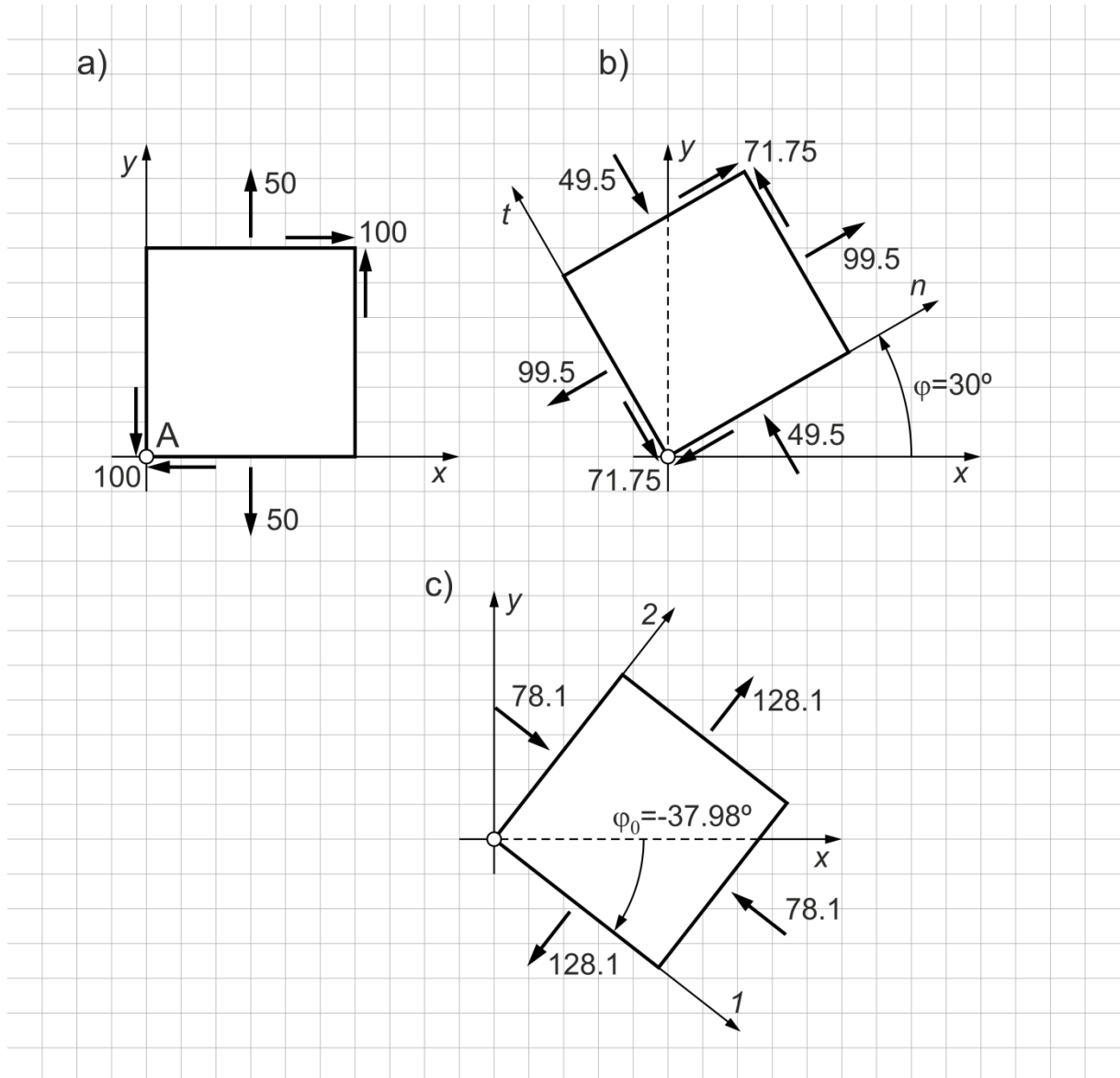
$$\begin{aligned}\sigma_2 &= \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) - \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} = \\ &= \frac{1}{2}(200 + (-100)) - \frac{1}{2}\sqrt{(200 - (-100))^2 + 4 \cdot (-50)^2} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot 100 - \frac{1}{2}\sqrt{90000 + 10000} = 50 - 158.1 = -108.1 \text{ MPa}\end{aligned}$$

PRZYKŁAD 9.4

Materiał w punkcie A jest w PSN:

$$\sigma_y = 50 \text{ MPa} \quad \tau_{xy} = 100 \text{ MPa}$$

Zilustrować naprężenia na elemencie różniczkowym. Wykonać transformację obrotu o kąt $\varphi = 30^\circ$. Wyznaczyć kierunki główne i naprężenia główne.



Rys. 9.8

ROZWIĄZANIE

Ilustracja naprężeń na elemencie różniczkowym

Naprężenia na zilustrowano na rys. 9.8a.

Transformacja obrotu (rys. 9.8b)

$$\varphi = 30^\circ$$

$$2\varphi = 60^\circ$$

$$\sin 2\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.87$$

$$\cos 2\varphi = 0.5$$

$$\begin{aligned}\sigma_n &= \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\varphi + \tau_{xy} \sin 2\varphi = \\ &= \frac{1}{2}(0 + 50) + \frac{1}{2}(0 - 50) \cos 60^\circ + 100 \sin 60^\circ = \\ &= \frac{1}{2} \cdot 50 + \frac{1}{2} \cdot (-50) \cdot 0.5 + 100 \cdot 0.87 = 25 - 12.5 + 87 = 99.5 \text{ MPa}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_t &= \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) - \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\varphi - \tau_{xy} \sin 2\varphi = \\ &= \frac{1}{2}(0 + 50) - \frac{1}{2}(0 - 50) \cos 60^\circ - 100 \sin 60^\circ = \\ &= \frac{1}{2} \cdot 50 - \frac{1}{2} \cdot (-50) \cdot 0.5 - 100 \cdot 0.87 = 25 + 12.5 - 87 = -49.5 \text{ MPa}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau_{nt} &= -\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\varphi - \tau_{xy} \cos 2\varphi = \\ &= -\frac{1}{2}(0 - 50) \sin 60^\circ + 100 \cos 60^\circ = -\frac{1}{2} \cdot (-50) \cdot 0.87 + 100 \cdot 0.5 = \\ &= 21.75 + 50 = 71.75 \text{ MPa}\end{aligned}$$

Kierunki główne i naprężenia główne (rys. 9.8c)

$$\operatorname{tg} 2\varphi_0 = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{2 \cdot 100}{0 - 50} = \frac{200}{-50} = -4 \rightarrow 2\varphi_0 = -75.96^\circ \rightarrow \varphi_0 = -37.98^\circ$$

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} = \\ &= \frac{1}{2}(0 + 50) + \frac{1}{2}\sqrt{(0 - 50)^2 + 4 \cdot 100^2} = \frac{1}{2} \cdot 50 + \frac{1}{2}\sqrt{2500 + 40000} = \\ &= 25 + 103.1 = 128.1 \text{ MPa}\end{aligned}$$

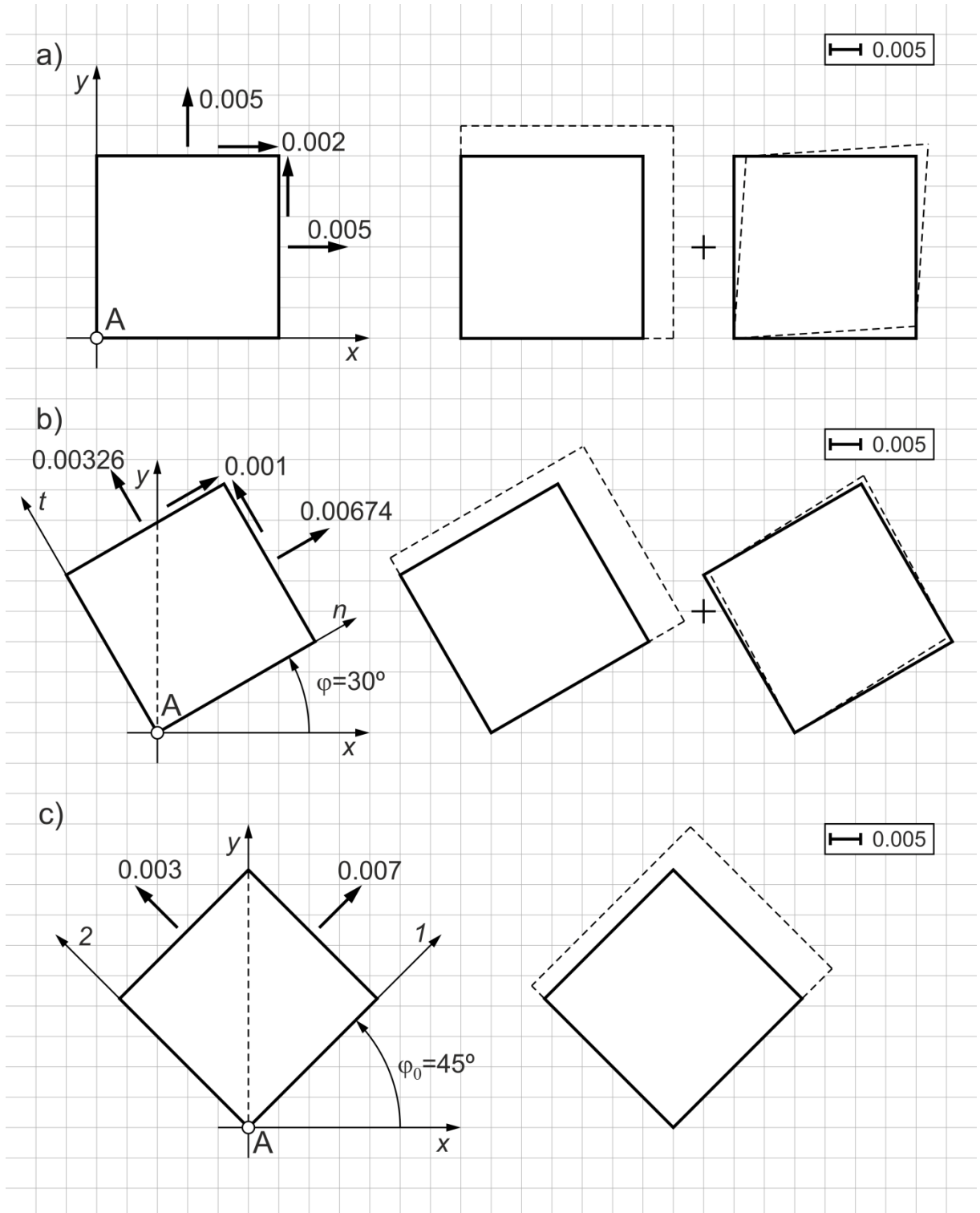
$$\begin{aligned}\sigma_2 &= \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) - \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} = \\ &= \frac{1}{2}(0 + 50) - \frac{1}{2}\sqrt{(0 - 50)^2 + 4 \cdot 100^2} = \frac{1}{2} \cdot 50 - \frac{1}{2}\sqrt{2500 + 40000} = \\ &= 25 - 103.1 = -78.1 \text{ MPa}\end{aligned}$$

PRZYKŁAD 9.5

Materiał w punkcie A jest w PSO:

$$\varepsilon_x = 0.005 \qquad \varepsilon_y = 0.005 \qquad \varepsilon_{xy} = 0.002$$

Zilustrować odkształcenia na elemencie różniczkowym. Wykonać transformację obrotu o kąt $\varphi = 30^\circ$. Wyznaczyć kierunki główne i odkształcenia główne.



Rys. 9.9

ROZWIĄZANIE

Ilustracja odkształceń na elemencie różniczkowym

Odkształcenia zilustrowano na rys. 9.9a.

Transformacja obrotu (rys. 9.9b)

$$\varphi = 30^\circ$$

$$2\varphi = 60^\circ$$

$$\sin 2\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.87$$

$$\cos 2\varphi = 0.5$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_n &= \frac{1}{2}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) + \frac{1}{2}(\varepsilon_x - \varepsilon_y) \cos 2\varphi + \varepsilon_{xy} \sin 2\varphi = \\ &= \frac{1}{2}(0.005 + 0.005) + \frac{1}{2}(0.005 - 0.005) \cos 60^\circ + 0.002 \sin 60^\circ = \\ &= \frac{1}{2} \cdot 0.01 + \frac{1}{2} \cdot 0 \cdot 0.5 + 0.002 \cdot 0.87 = 0.005 + 0 + 0.00174 = 0.00674\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_t &= \frac{1}{2}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) - \frac{1}{2}(\varepsilon_x - \varepsilon_y) \cos 2\varphi - \varepsilon_{xy} \sin 2\varphi = \\ &= \frac{1}{2}(0.005 + 0.005) - \frac{1}{2}(0.005 - 0.005) \cos 60^\circ - 0.002 \sin 60^\circ = \\ &= \frac{1}{2} \cdot 0.01 - \frac{1}{2} \cdot 0 \cdot 0.5 - 0.002 \cdot 0.87 = 0.005 - 0 - 0.00174 = 0.00326\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_{nt} &= -\frac{1}{2}(\varepsilon_x - \varepsilon_y) \sin 2\varphi + \varepsilon_{xy} \cos 2\varphi = \\ &= -\frac{1}{2}(0.005 - 0.005) \sin 60^\circ + 0.002 \cos 60^\circ = -\frac{1}{2} \cdot 0 \cdot 0.87 + 0.002 \cdot 0.5 = 0.001\end{aligned}$$

Kierunki główne i odkształcenia główne (rys. 9.9c)

Ponieważ $\varepsilon_x = \varepsilon_y$ oraz $\varepsilon_{xy} > 0$, przyjęto $\varphi_0 = 45^\circ$.

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{1}{2}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) + \frac{1}{2}\sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + 4\varepsilon_{xy}^2} = \\ &= \frac{1}{2}(0.005 + 0.005) + \frac{1}{2}\sqrt{(0.005 - 0.005)^2 + 4 \cdot 0.002^2} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot 0.01 + \frac{1}{2}\sqrt{0 + 0.000016} = 0.005 + 0.002 = 0.007\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_2 &= \frac{1}{2}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) - \frac{1}{2}\sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + 4\varepsilon_{xy}^2} = \\ &= \frac{1}{2}(0.005 + 0.005) - \frac{1}{2}\sqrt{(0.005 - 0.005)^2 + 4 \cdot 0.002^2} =\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 0.01 - \frac{1}{2} \sqrt{0 + 0.000016} = 0.005 - 0.002 = 0.003$$

PRZYKŁAD 9.6

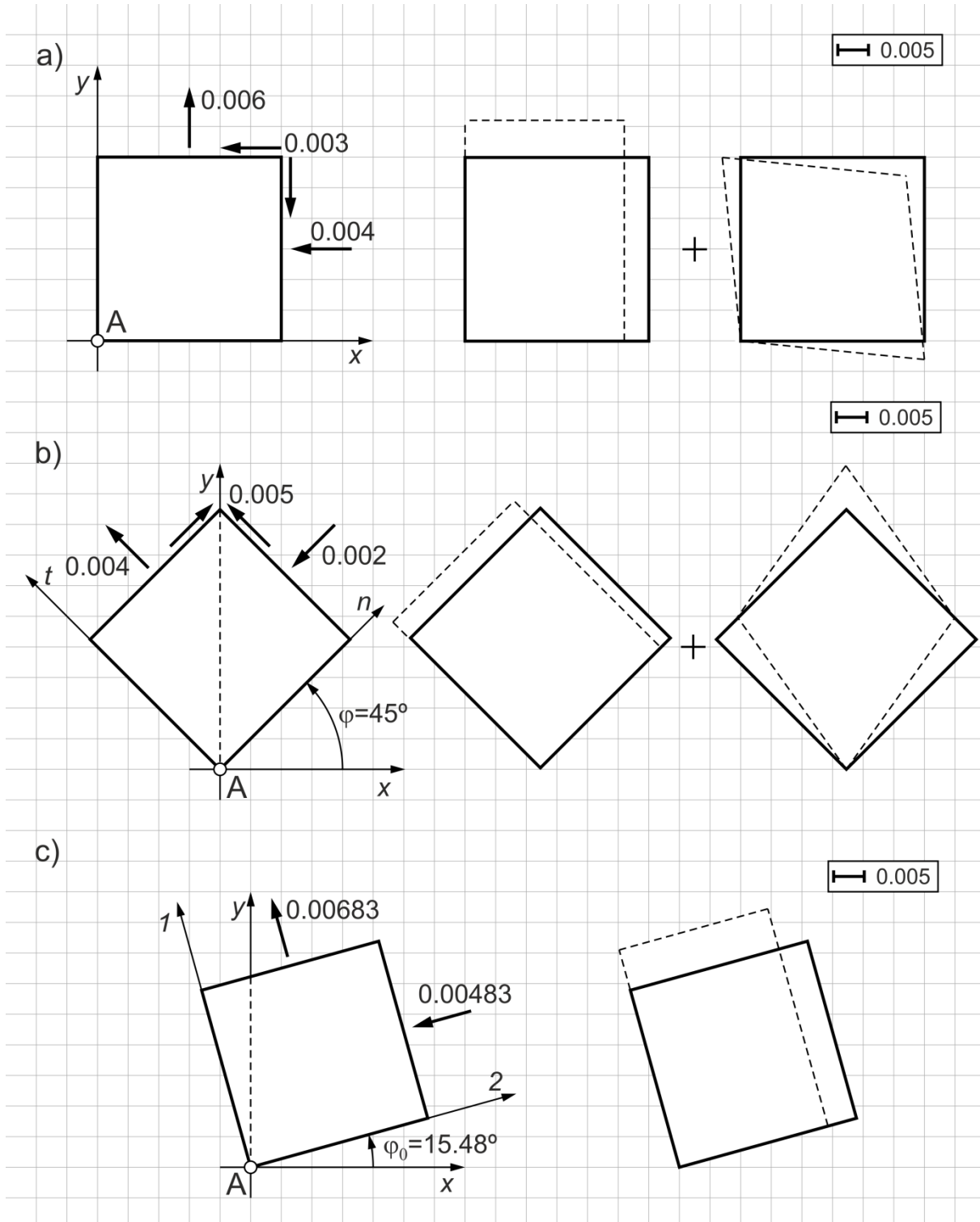
Materiał w punkcie A jest w PSO:

$$\varepsilon_x = -0.004$$

$$\varepsilon_y = 0.006$$

$$\varepsilon_{xy} = -0.003$$

Zilustrować odkształcenia na elemencie różniczkowym. Wykonać transformację obrotu o kąt $\varphi = 45^\circ$. Wyznaczyć kierunki główne i odkształcenia główne.



Rys. 9.10

ROZWIĄZANIE

Ilustracja odkształceń na elemencie różniczkowym

Odkształcenia zilustrowano na rys. 9.10a.

Transformacja obrotu (rys. 9.10b)

$$\varphi = 45^\circ$$

$$2\varphi = 90^\circ$$

$$\sin 2\varphi = 1$$

$$\cos 2\varphi = 0$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_n &= \frac{1}{2}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) + \frac{1}{2}(\varepsilon_x - \varepsilon_y) \cos 2\varphi + \varepsilon_{xy} \sin 2\varphi = \\ &= \frac{1}{2}(-0.004 + 0.006) + \frac{1}{2}(-0.004 - 0.006) \cos 90^\circ + (-0.003) \sin 90^\circ = \\ &= \frac{1}{2} \cdot 0.002 + \frac{1}{2} \cdot (-0.01) \cdot 0 - 0.003 \cdot 1 = 0.001 + 0 - 0.003 = -0.002\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_t &= \frac{1}{2}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) - \frac{1}{2}(\varepsilon_x - \varepsilon_y) \cos 2\varphi - \varepsilon_{xy} \sin 2\varphi = \\ &= \frac{1}{2}(-0.004 + 0.006) - \frac{1}{2}(-0.004 - 0.006) \cos 90^\circ - (-0.003) \sin 90^\circ = \\ &= \frac{1}{2} \cdot 0.002 - \frac{1}{2} \cdot (-0.01) \cdot 0 + 0.003 \cdot 1 = 0.001 - 0 + 0.003 = 0.004\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_{nt} &= -\frac{1}{2}(\varepsilon_x - \varepsilon_y) \sin 2\varphi + \varepsilon_{xy} \cos 2\varphi = \\ &= -\frac{1}{2}(-0.004 - 0.006) \sin 90^\circ + (-0.003) \cos 90^\circ = \\ &= -\frac{1}{2} \cdot (-0.01) \cdot 1 - 0.003 \cdot 0 = 0.005\end{aligned}$$

Kierunki główne i odkształcenia główne (rys. 9.10c)

$$tg 2\varphi_0 = \frac{2\varepsilon_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y} = \frac{2 \cdot (-0.003)}{-0.004 - 0.006} = \frac{-0.006}{-0.01} = 0.6 \rightarrow 2\varphi_0 = 30.96^\circ \rightarrow \varphi_0 = 15.48^\circ$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{1}{2}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) + \frac{1}{2}\sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + 4\varepsilon_{xy}^2} = \\ &= \frac{1}{2}(-0.004 + 0.006) + \frac{1}{2}\sqrt{(-0.004 - 0.006)^2 + 4 \cdot (-0.003)^2} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot 0.002 + \frac{1}{2}\sqrt{0.0001 + 0.000036} = 0.001 + 0.00583 = 0.00683\end{aligned}$$

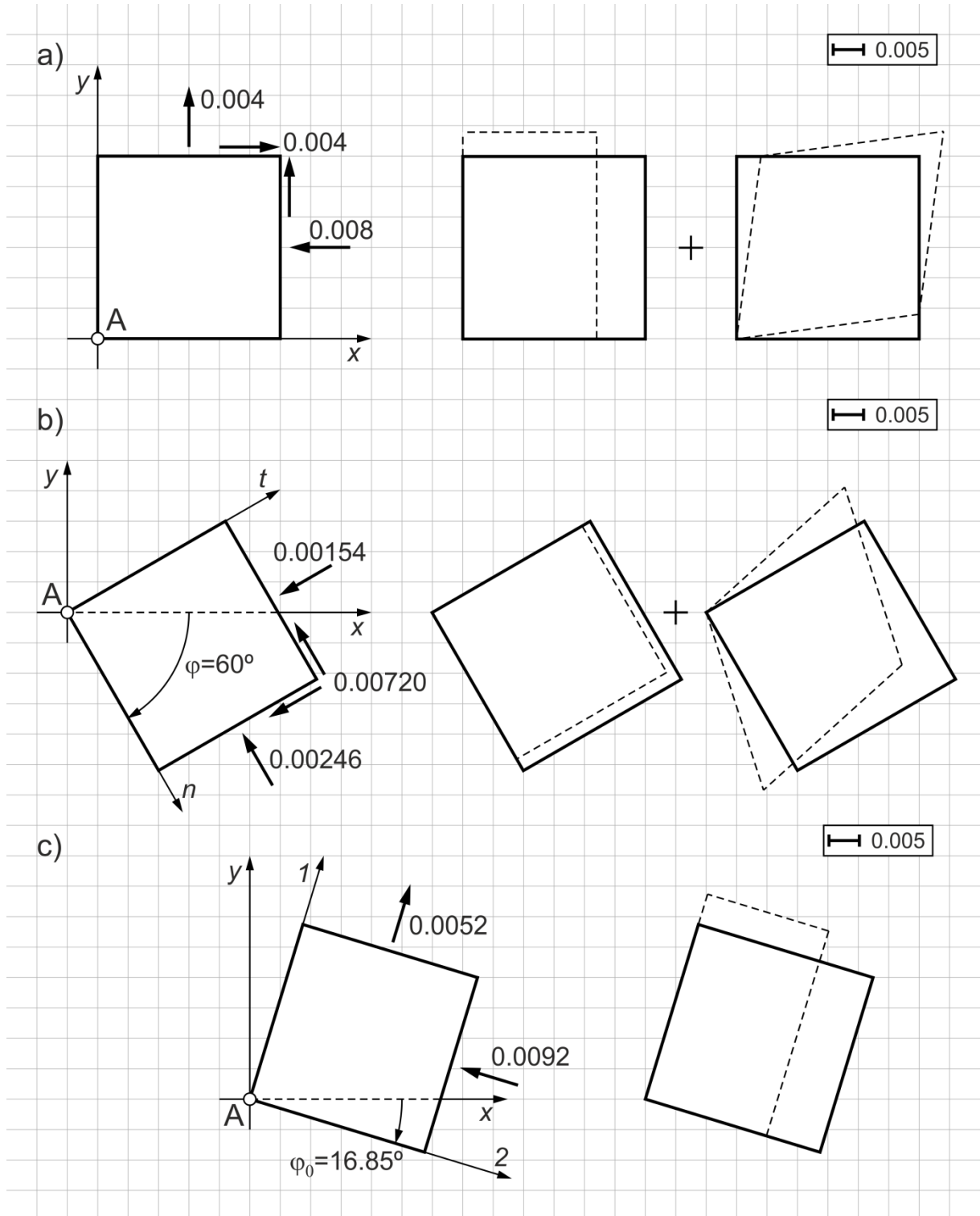
$$\begin{aligned}\varepsilon_2 &= \frac{1}{2}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) - \frac{1}{2}\sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + 4\varepsilon_{xy}^2} = \\ &= \frac{1}{2}(-0.004 + 0.006) - \frac{1}{2}\sqrt{(-0.004 - 0.006)^2 + 4 \cdot (-0.003)^2} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot 0.002 - \frac{1}{2}\sqrt{0.0001 + 0.000036} = 0.001 - 0.00583 = -0.00483\end{aligned}$$

PRZYKŁAD 9.7

Materiał w punkcie A jest w PSO:

$$\varepsilon_x = -0.008 \qquad \varepsilon_y = 0.004 \qquad \varepsilon_{xy} = 0.004$$

Zilustrować odkształcenia na elemencie różniczkowym. Wykonać transformację obrotu o kąt $\varphi = -60^\circ$. Wyznaczyć kierunki główne i odkształcenia główne.



Rys. 9.11

ROZWIĄZANIE

Ilustracja odkształceń na elemencie różniczkowym

Odkształcenia zilustrowano na rys. 9.11a.

Transformacja obrotu (rys. 9.11b)

$$\varphi = -60^\circ$$

$$2\varphi = -120^\circ$$

$$\sin 2\varphi = -\frac{\sqrt{3}}{2} = -0.866$$

$$\cos 2\varphi = -0.5$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_n &= \frac{1}{2}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) + \frac{1}{2}(\varepsilon_x - \varepsilon_y) \cos 2\varphi + \varepsilon_{xy} \sin 2\varphi = \\ &= \frac{1}{2}(-0.008 + 0.004) + \frac{1}{2}(-0.008 - 0.004) \cos(-120^\circ) + 0.004 \sin(-120^\circ) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot (-0.004) + \frac{1}{2} \cdot (-0.012) \cdot (-0.5) + 0.004 \cdot (-0.866) = \\ &= -0.002 + 0.003 - 0.003464 = -0.00246\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_t &= \frac{1}{2}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) - \frac{1}{2}(\varepsilon_x - \varepsilon_y) \cos 2\varphi - \varepsilon_{xy} \sin 2\varphi = \\ &= \frac{1}{2}(-0.008 + 0.004) - \frac{1}{2}(-0.008 - 0.004) \cos(-120^\circ) - 0.004 \sin(-120^\circ) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot (-0.004) - \frac{1}{2} \cdot (-0.012) \cdot (-0.5) - 0.004 \cdot (-0.866) = \\ &= -0.002 - 0.003 + 0.003464 = -0.00154\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_{nt} &= -\frac{1}{2}(\varepsilon_x - \varepsilon_y) \sin 2\varphi + \varepsilon_{xy} \cos 2\varphi = \\ &= -\frac{1}{2}(-0.008 - 0.004) \sin(-120^\circ) + 0.004 \cos(-120^\circ) = \\ &= -\frac{1}{2} \cdot (-0.012) \cdot (-0.866) + 0.004 \cdot (-0.5) = -0.00522 - 0.002 = -0.00720\end{aligned}$$

Kierunki główne i odkształcenia główne (rys. 9.11c)

$$\operatorname{tg} 2\varphi_0 = \frac{2\varepsilon_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y} = \frac{2 \cdot 0.004}{-0.008 - 0.004} = \frac{0.008}{-0.012} = -0.667 \quad \rightarrow \quad 2\varphi_0 = -33.7^\circ \quad \rightarrow \quad \varphi_0 = -16.85^\circ$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{1}{2}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) + \frac{1}{2}\sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + 4\varepsilon_{xy}^2} = \\ &= \frac{1}{2}(-0.008 + 0.004) + \frac{1}{2}\sqrt{(-0.008 - 0.004)^2 + 4 \cdot 0.004^2} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot (-0.004) + \frac{1}{2}\sqrt{0.000144 + 0.000064} = -0.002 + 0.0072 = 0.0052\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_2 &= \frac{1}{2}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) - \frac{1}{2}\sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + 4\varepsilon_{xy}^2} = \\ &= \frac{1}{2}(-0.008 + 0.004) - \frac{1}{2}\sqrt{(-0.008 - 0.004)^2 + 4 \cdot 0.004^2} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot (-0.004) - \frac{1}{2}\sqrt{0.000144 + 0.000064} = -0.002 - 0.0072 = -0.0092\end{aligned}$$

10.

ZWIĄZKI FIZYCZNE DLA MATERIAŁU IZOTROPOWEGO

Związki fizyczne (równania konstytutywne) opisują zależności pomiędzy składowymi tensora odkształcenia (9.9) oraz składowymi tensora naprężenia (9.1). Materiał izotropowy (w którym właściwości fizyczne są niezależne od kierunku) liniowo sprężysty, opisany jest związkami fizycznymi nazywanymi prawem Hooke'a. W związkach tych występują dwie niezależne stałe materiałowe, moduł Younga E i współczynnik (stała) Poissona ν . Dodatkowo wprowadza się trzecią stałą materiałową zależną od modułu Younga i współczynnika Poissona, zwaną modułem Kirchhoffa G (moduł sprężystości postaciowej):

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (10.1)$$

Standardowe prawo Hooke'a ma postać:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \quad (10.2)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] \quad (10.3)$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] \quad (10.4)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy} \quad (10.5)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{1}{G} \tau_{xz} \quad (10.6)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{1}{G} \tau_{yz} \quad (10.7)$$

gdzie $\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$ są pełnymi kątami odkształceń postaciowych elementu różniczkowego.

Odwrotne prawo Hooke'a ma postać:

$$\sigma_x = \frac{E}{1+\nu} \left[\varepsilon_x + \frac{\nu}{1-2\nu} e \right] \quad (10.8)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1+\nu} \left[\varepsilon_y + \frac{\nu}{1-2\nu} e \right] \quad (10.9)$$

$$\sigma_z = \frac{E}{1+\nu} \left[\varepsilon_z + \frac{\nu}{1-2\nu} e \right] \quad (10.10)$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} \quad (10.11)$$

$$\tau_{xz} = G\gamma_{xz} \quad (10.12)$$

$$\tau_{yz} = G\gamma_{yz} \quad (10.13)$$

We wzorach (10.8÷10.10) wprowadzono dylatację e :

$$e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \quad (10.14)$$

PRZYKŁAD 10.1

Stan odkształcenia w punkcie A opisuje tensor odkształcenia:

$$\begin{bmatrix} 0.00035 & -0.00012 & 0.00024 \\ -0.00012 & -0.00042 & 0 \\ 0.00024 & 0 & 0.00051 \end{bmatrix}$$

Materiał wykonany jest z aluminium o stałych $E = 69 \text{ GPa}$, $\nu = 0.33$.

Wyznaczyć stan naprężenia w punkcie A.

ROZWIĄZANIE

Składowe tensora odkształcenia

$$\varepsilon_x = 0.00035$$

$$\varepsilon_y = -0.00042$$

$$\varepsilon_z = 0.00051$$

$$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} = -0.00012$$

$$\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{zx} = 0.00024$$

$$\varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zy} = 0$$

Moduł Kirchhoffa

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{69000}{2(1+0.33)} = 25940 \text{ MPa}$$

Dylatacja

$$e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = 0.00035 - 0.00042 + 0.00051 = 0.00044$$

Odwrotne prawo Hooke'a

$$\sigma_x = \frac{E}{1+\nu} \left[\varepsilon_x + \frac{\nu}{1-2\nu} e \right] = \frac{69000}{1+0.33} \left[0.00035 + \frac{0.33}{1-2 \cdot 0.33} \cdot 0.00044 \right] = 40.31 \text{ MPa}$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1+\nu} \left[\varepsilon_y + \frac{\nu}{1-2\nu} e \right] = \frac{69000}{1+0.33} \left[-0.00042 + \frac{0.33}{1-2 \cdot 0.33} \cdot 0.00044 \right] = 0.37 \text{ MPa}$$

$$\sigma_z = \frac{E}{1+\nu} \left[\varepsilon_z + \frac{\nu}{1-2\nu} e \right] = \frac{69000}{1+0.33} \left[0.00051 + \frac{0.33}{1-2 \cdot 0.33} \cdot 0.00044 \right] = 48.61 \text{ MPa}$$

$$\gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy}$$

$$\gamma_{xz} = 2\varepsilon_{xz}$$

$$\gamma_{yz} = 2\varepsilon_{yz}$$

$$\tau_{xy} = 2G\varepsilon_{xy} = 2 \cdot 25940 \cdot (-0.00012) = -6.23 \text{ MPa}$$

$$\tau_{xz} = 2G\varepsilon_{xz} = 2 \cdot 25940 \cdot 0.00024 = 12.45 \text{ MPa}$$

$$\tau_{yz} = 2G\varepsilon_{yz} = 2 \cdot 25940 \cdot 0 = 0$$

Stan naprężenia w punkcie A opisuje tensor naprężenia:

$$\begin{bmatrix} 40.31 & -6.23 & 12.45 \\ -6.23 & 0.37 & 0 \\ 12.45 & 0 & 48.61 \end{bmatrix}$$

PRZYKŁAD 10.2

Stan naprężenia w punkcie A opisuje tensor naprężenia:

$$\begin{bmatrix} -25 & 15 & 74 \\ 15 & 30 & -18 \\ 74 & -18 & 50 \end{bmatrix}$$

Materiał wykonany jest ze stali o stałych $E = 210 \text{ GPa}$, $\nu = 0.30$.

Wyznaczyć stan odkształcenia w punkcie A.

ROZWIĄZANIE

Składowe tensora naprężenia

$$\sigma_x = -25 \text{ MPa}$$

$$\sigma_y = 30 \text{ MPa}$$

$$\sigma_z = 50 \text{ MPa}$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = 15 \text{ MPa}$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = 74 \text{ MPa}$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = -18 \text{ MPa}$$

Moduł Kirchhoffa

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{210000}{2(1+0.3)} = 80770 \text{ MPa}$$

Standardowe prawo Hooke'a

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] = \frac{1}{210000} [-25 - 0.3 \cdot (30 + 50)] = -0.00023$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] = \frac{1}{210000} [30 - 0.3 \cdot (-25 + 50)] = 0.00011$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] = \frac{1}{210000} [50 - 0.3 \cdot (-25 + 30)] = 0.00023$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{\gamma_{xy}}{2}$$

$$\varepsilon_{xz} = \frac{\gamma_{xz}}{2}$$

$$\varepsilon_{yz} = \frac{\gamma_{yz}}{2}$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2G} \tau_{xy} = \frac{1}{2 \cdot 80770} \cdot 15 = 0.00009$$

$$\varepsilon_{xz} = \frac{1}{2G} \tau_{xz} = \frac{1}{2 \cdot 80770} \cdot 74 = 0.00046$$

$$\varepsilon_{yz} = \frac{1}{2G} \tau_{yz} = \frac{1}{2 \cdot 80770} \cdot (-18) = -0.00011$$

Stan odkształcenia w punkcie A opisuje tensor odkształcenia:

$$\begin{bmatrix} -0.00023 & 0.00009 & 0.00046 \\ 0.00009 & 0.00011 & -0.00011 \\ 0.00046 & -0.00011 & 0.00023 \end{bmatrix}$$

PRZYKŁAD 10.3

Materiał wykonany z aluminium ($E = 69$ GPa, $\nu = 0.33$) znajduje się w PSN opisanym przez tensor naprężenia:

$$\begin{bmatrix} -100 & 20 & 0 \\ 20 & 75 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Wyznaczyć składowe stanu odkształcenia.

ROZWIĄZANIE

Składowe tensora naprężenia

$$\sigma_x = -100 \text{ MPa}$$

$$\sigma_y = 75 \text{ MPa}$$

$$\sigma_z = 0$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = 20 \text{ MPa}$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = 0$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = 0$$

Moduł Kirchhoffa

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{69000}{2(1+0.33)} = 25940 \text{ MPa}$$

Standardowe prawo Hooke'a

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] = \frac{1}{69000} [-100 - 0.33 \cdot (75 + 0)] = -0.00181$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] = \frac{1}{69000} [75 - 0.33 \cdot (-100 + 0)] = 0.00157$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] = \frac{1}{69000} [0 - 0.33 \cdot (-100 + 75)] = 0.00012$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{\gamma_{xy}}{2}$$

$$\varepsilon_{xz} = \frac{\gamma_{xz}}{2}$$

$$\varepsilon_{yz} = \frac{\gamma_{yz}}{2}$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2G} \tau_{xy} = \frac{1}{2 \cdot 25940} \cdot 20 = 0.00039$$

$$\varepsilon_{xz} = \frac{1}{2G} \tau_{xz} = \frac{1}{2 \cdot 25940} \cdot 0 = 0$$

$$\varepsilon_{yz} = \frac{1}{2G} \tau_{yz} = \frac{1}{2 \cdot 25940} \cdot 0 = 0$$

Stan odkształcenia materiału w danym punkcie opisuje tensor odkształcenia:

$$\begin{bmatrix} -0.00181 & 0.00039 & 0 \\ 0.00039 & 0.00157 & 0 \\ 0 & 0 & 0.00012 \end{bmatrix}$$

Płaski stan naprężenia implikuje pół-przestrzenny stan odkształcenia (kod PPSO).

PRZYKŁAD 10.4

Materiał wykonany ze stali ($E = 210 \text{ GPa}$, $\nu = 0.3$) znajduje się w PSO opisanym przez tensor odkształcenia:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.00025 & -0.00010 \\ 0 & -0.00010 & 0.00018 \end{bmatrix}$$

Wyznaczyć składowe stanu naprężenia.

ROZWIĄZANIE

Składowe tensora odkształcenia

$$\varepsilon_x = 0$$

$$\varepsilon_y = 0.00025$$

$$\varepsilon_z = 0.00018$$

$$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} = 0$$

$$\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{zx} = 0$$

$$\varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zy} = -0.00010$$

Moduł Kirchhoffa

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{210000}{2(1+0.3)} = 80770 \text{ MPa}$$

Dylatacja

$$e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = 0 + 0.00025 + 0.00018 = 0.00043$$

Odwrotne prawo Hooke'a

$$\sigma_x = \frac{E}{1+\nu} \left[\varepsilon_x + \frac{\nu}{1-2\nu} e \right] = \frac{210000}{1+0.3} \left[0 + \frac{0.3}{1-2 \cdot 0.3} \cdot 0.00043 \right] = 52.10 \text{ MPa}$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1+\nu} \left[\varepsilon_y + \frac{\nu}{1-2\nu} e \right] = \frac{210000}{1+0.3} \left[0.00025 + \frac{0.3}{1-2 \cdot 0.3} \cdot 0.00043 \right] = 92.48 \text{ MPa}$$

$$\sigma_z = \frac{E}{1+\nu} \left[\varepsilon_z + \frac{\nu}{1-2\nu} e \right] = \frac{210000}{1+0.3} \left[0.00018 + \frac{0.3}{1-2 \cdot 0.3} \cdot 0.00043 \right] = 81.17 \text{ MPa}$$

$$\gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy}$$

$$\gamma_{xz} = 2\varepsilon_{xz}$$

$$\gamma_{yz} = 2\varepsilon_{yz}$$

$$\tau_{xy} = 2G\varepsilon_{xy} = 2 \cdot 80770 \cdot 0 = 0$$

$$\tau_{xz} = 2G\varepsilon_{xz} = 2 \cdot 80770 \cdot 0 = 0$$

$$\tau_{yz} = 2G\varepsilon_{yz} = 2 \cdot 80770 \cdot (-0.00010) = -16.15 \text{ MPa}$$

Stan naprężenia materiału w danym punkcie opisuje tensor naprężenia:

$$\begin{bmatrix} 52.10 & 0 & 0 \\ 0 & 92.48 & -16.15 \\ 0 & -16.15 & 81.17 \end{bmatrix}$$

Płaski stan odkształcenia implikuje pół-przestrzenny stan naprężenia (kod PPSN).

11.

HIPOTEZY WYTĘŻENIA, ZŁOŻONE PRZYPADKI WYTRZYMAŁOŚCIOWE

Wytężeniem określanym jest ogół zmian w stanie fizycznym materiału, prowadzący do powstania trwałych odkształceń lub/i utraty spójności materiału po przekroczeniu wytrzymałości materiału.

Do głównych hipotez wytężenia zalicza się hipotezy Coulomba – Guesta – Tresca (kod CGT) i Hubera – Misesa – Hencky’ego (kod HMH).

W hipotezie CGT, zwanej również hipotezą największego naprężenia stycznego, materiał nie ulega zniszczeniu, jeżeli największe naprężenia styczne w złożonym stanie naprężenia jest mniejsze od naprężenia stycznego niszczącego w jednoosiowym rozciąganiu/ściskaniu.

Naprężenia zredukowane (zastępcze) w hipotezie CGT określone są zależnością:

$$\sigma_{zred} = \max(|\sigma_2 - \sigma_3|, |\sigma_1 - \sigma_3|, |\sigma_1 - \sigma_2|) \quad (11.1)$$

gdzie:

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ – naprężenia główne.

W przypadku płaskiego stanu naprężenia:

$$\sigma_{zred} = \begin{cases} |\sigma_1 - \sigma_2| & \text{dla } \sigma_1 \cdot \sigma_2 < 0 \\ \max(|\sigma_1|, |\sigma_2|) & \text{dla } \sigma_1 \cdot \sigma_2 > 0 \end{cases} \quad (11.2)$$

$$|\sigma_1 - \sigma_2| = \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \quad (11.3)$$

W hipotezie HMH, zwanej również hipotezą największej energii odkształcenia postaciowego, materiał nie ulega zniszczeniu, jeżeli energia odkształcenia postaciowego w złożonym stanie naprężenia jest mniejsza od energii odkształcenia postaciowego odpowiadającej zniszczeniu w jednoosiowym rozciąganiu/ściskaniu.

Naprężenia zredukowane (zastępcze) w hipotezie HMH określone są zależnością:

$$\sigma_{zred} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_x - \sigma_z)^2 + (\sigma_x - \sigma_y)^2 + 6(\tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{xy}^2)} \quad (11.4)$$

lub

$$\sigma_{zred} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_2)^2} \quad (11.5)$$

W przypadku płaskiego stanu naprężenia:

$$\sigma_{zred} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\tau_{xy}^2} \quad (11.6)$$

lub

$$\sigma_{zred} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2} \quad (11.7)$$

W złożonych przypadkach wytrzymałościowych warunków nośności (WN) przybiera postać:

$$\sigma_{zred} \leq k \quad (11.8)$$

gdzie:

k – naprężenie dopuszczalne na rozciąganie (materiał sprężysto-plastyczny).

Ważnym zagadnieniem jest płaski stan naprężenia z jednym naprężeniem normalnym σ i jednym stycznym τ . W tym przypadku, naprężenia zredukowane w przypadku hipotezy CGT wynoszą:

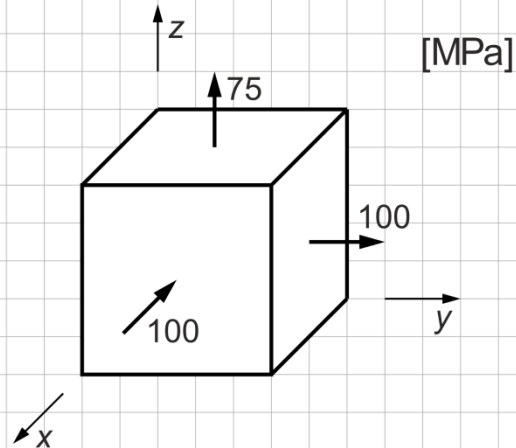
$$\sigma_{zred} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \quad (11.9)$$

a w przypadku hipotezy HMM:

$$\sigma_{zred} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \quad (11.10)$$

PRZYKŁAD 11.1

Dane są napężenia działające na element różniczkowy w punkcie A (rys. 11.1). Wyznaczyć napężenia zredukowane według hipotezy CGT i HMM.



Rys. 11.1

ROZWIĄZANIE

Stan napężenia (rys. 11.1) interpretuje się jako napężenia główne:

$$\sigma_1 = \sigma_y = 100 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = \sigma_z = 75 \text{ MPa}$$

$$\sigma_3 = \sigma_x = -100 \text{ MPa}$$

Hipoteza CGT

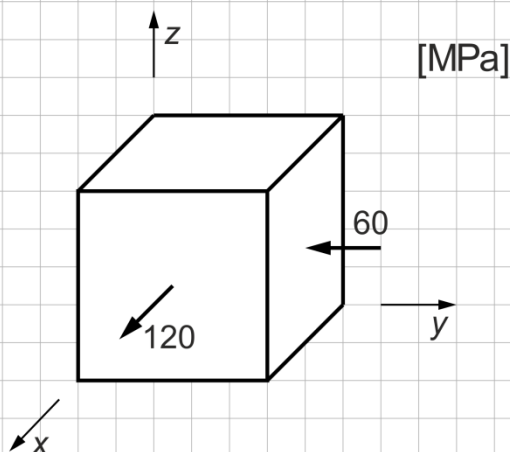
$$\begin{aligned} \sigma_{zred} &= \max\{|\sigma_2 - \sigma_3|, |\sigma_1 - \sigma_3|, |\sigma_1 - \sigma_2|\} = \\ &= \max\{|75 - (-100)|, |100 - (-100)|, |100 - 75|\} = \\ &= \max\{175, 200, 25\} = 200 \text{ MPa} \end{aligned}$$

Hipoteza HMM

$$\begin{aligned} \sigma_{zred} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_2)^2} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(75 - (-100))^2 + (100 - (-100))^2 + (100 - 75)^2} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{175^2 + 200^2 + 25^2} = 188.75 \text{ MPa} \end{aligned}$$

PRZYKŁAD 11.2

Dane są naprężenia działające na element różniczkowy w punkcie A (rys. 11.2). Wyznaczyć naprężenie zredukowane według hipotezy CGT i HMM.



Rys. 11.2

ROZWIĄZANIE

Stan naprężenia (rys. 11.2) interpretuje się jako naprężenia główne w PSN:

$$\sigma_1 = \sigma_x = 120 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = \sigma_y = -60 \text{ MPa}$$

$$\sigma_3 = 0$$

Hipoteza CGT

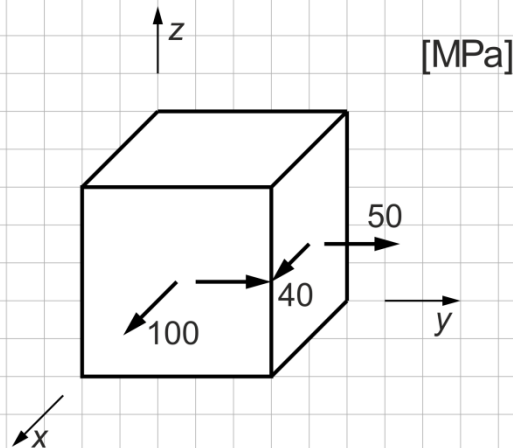
$$\begin{aligned} \sigma_{zred} &= \max\{|\sigma_2 - \sigma_3|, |\sigma_1 - \sigma_3|, |\sigma_1 - \sigma_2|\} = \\ &= \max\{|-60 - 0|, |120 - 0|, |120 - (-60)|\} = \\ &= \max\{60, 120, 180\} = 180 \text{ MPa} \end{aligned}$$

Hipoteza HMM

$$\begin{aligned} \sigma_{zred} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_2)^2} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(-60 - 0)^2 + (120 - 0)^2 + (120 - (-60))^2} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(-60)^2 + 120^2 + 180^2} = 158.75 \text{ MPa} \end{aligned}$$

PRZYKŁAD 11.3

Dane są naprężenia działające na element różniczkowy w punkcie A (rys. 11.3). Wyznaczyć naprężenia zredukowane według hipotezy CGT i HMM.



Rys. 11.3

ROZWIĄZANIE

Stan naprężenia (rys. 11.3) interpretujemy jako PSN:

$$\sigma_x = 100 \text{ MPa}$$

$$\sigma_y = 50 \text{ MPa}$$

$$\tau_{xy} = 40 \text{ MPa}$$

Naprężenia główne

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} = \frac{1}{2}(100 + 50) + \frac{1}{2}\sqrt{(100 - 50)^2 + 4 \cdot 40^2} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot 150 + \frac{1}{2}\sqrt{50^2 + 4 \cdot 40^2} = 122.17 \text{ MPa} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_2 &= \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) - \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} = \frac{1}{2}(100 + 50) - \frac{1}{2}\sqrt{(100 - 50)^2 + 4 \cdot 40^2} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot 150 - \frac{1}{2}\sqrt{50^2 + 4 \cdot 40^2} = 27.83 \text{ MPa} \end{aligned}$$

$$\sigma_3 = 0$$

Hipoteza CGT

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{zred}} &= \max\{|\sigma_2 - \sigma_3|, |\sigma_1 - \sigma_3|, |\sigma_1 - \sigma_2|\} = \\ &= \max\{|27.83 - 0|, |122.17 - 0|, |122.17 - 27.83|\} = \\ &= \max\{27.83, 122.17, 94.34\} = 122.17 \text{ MPa} \end{aligned}$$

Hipoteza HMH

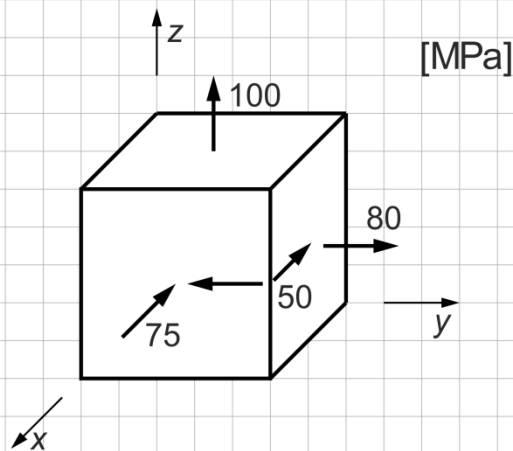
$$\begin{aligned}\sigma_{zred} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_2)^2} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(27.83 - 0)^2 + (122.17 - 0)^2 + (122.17 - 27.83)^2} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{27.23^2 + 122.17^2 + 94.34^2} = 110.83 \text{ MPa}\end{aligned}$$

lub

$$\begin{aligned}\sigma_{zred} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_x - \sigma_z)^2 + (\sigma_x - \sigma_y)^2 + 6(\tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{xy}^2)} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(50 - 0)^2 + (100 - 0)^2 + (100 - 50)^2 + 6 \cdot (0^2 + 0^2 + 40^2)} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{50^2 + 100^2 + 50^2 + 6 \cdot 40^2} = 110.91 \text{ MPa}\end{aligned}$$

PRZYKŁAD 11.4

Dane są naprężenia działające na element różniczkowy w punkcie A (rys. 11.4). Wyznaczyć naprężenia zredukowane według hipotezy CGT i HMH.



Rys. 11.4

ROZWIĄZANIE

Stan naprężenia (rys. 11.4) interpretujemy jako PPSN:

$$\sigma_x = -75 \text{ MPa}$$

$$\sigma_y = 80 \text{ MPa}$$

$$\sigma_z = 100 \text{ MPa}$$

$$\tau_{xy} = -50 \text{ MPa}$$

Naprężenia główne

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} = \\ &= \frac{1}{2}(-75 + 80) + \frac{1}{2}\sqrt{(-75 - 80)^2 + 4 \cdot (-50)^2} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot 5 + \frac{1}{2}\sqrt{(-155)^2 + 4 \cdot (-50)^2} = 94.73 \text{ MPa}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_2 &= \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) - \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} = \\ &= \frac{1}{2}(-75 + 80) - \frac{1}{2}\sqrt{(-75 - 80)^2 + 4 \cdot (-50)^2} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot 5 - \frac{1}{2}\sqrt{(-155)^2 + 4 \cdot (-50)^2} = -89.73 \text{ MPa}\end{aligned}$$

$$\sigma_3 = \sigma_z = 100 \text{ MPa}$$

Hipoteza CGT

$$\begin{aligned}\sigma_{zred} &= \max\{|\sigma_2 - \sigma_3|, |\sigma_1 - \sigma_3|, |\sigma_1 - \sigma_2|\} = \\ &= \max\{|-89.73 - 100|, |94.73 - 100|, |94.73 - (-89.73)|\} = \\ &= \max\{|-189.73|, |-5.23|, |184.46|\} = \\ &= \max\{189.73, 5.23, 184.46\} = 189.73 \text{ MPa}\end{aligned}$$

Hipoteza HMM

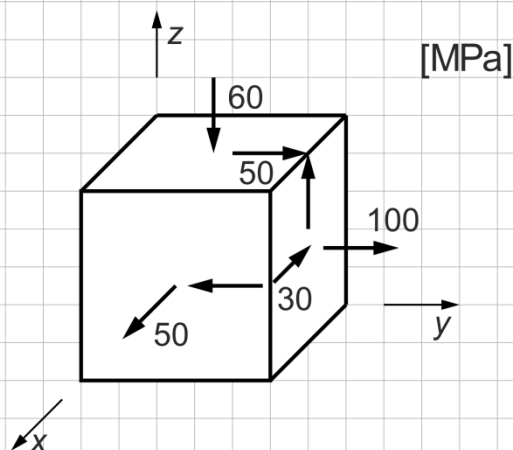
$$\begin{aligned}\sigma_{zred} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_2)^2} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(-89.73 - 100)^2 + (94.73 - 100)^2 + (94.73 - (-89.73))^2} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(-189.73)^2 + (-5.23)^2 + 184.46^2} = 187.15 \text{ MPa}\end{aligned}$$

lub

$$\begin{aligned}\sigma_{zred} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_x - \sigma_z)^2 + (\sigma_x - \sigma_y)^2 + 6(\tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{xy}^2)} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(80 - 100)^2 + (-75 - 100)^2 + (-75 - 80)^2 + 6 \cdot (0^2 + 0^2 + (-50)^2)} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(-20)^2 + (-175)^2 + (-155)^2 + 6 \cdot (-50)^2} = 187.15 \text{ MPa}\end{aligned}$$

PRZYKŁAD 11.5

Dane są naprężenia działające na element różniczkowy w punkcie A (rys. 11.5). Wyznaczyć naprężenie zredukowane według hipotezy HMM.



Rys. 11.5

ROZWIĄZANIE

Składowe stanu naprężenia

$$\sigma_x = 50 \text{ MPa}$$

$$\sigma_y = 100 \text{ MPa}$$

$$\sigma_z = -60 \text{ MPa}$$

$$\tau_{xy} = -30 \text{ MPa}$$

$$\tau_{xz} = 0$$

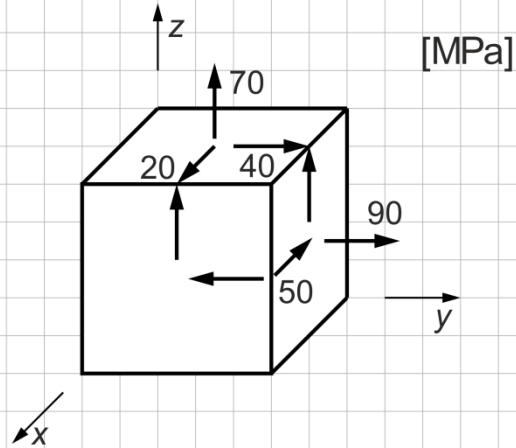
$$\tau_{yz} = 50 \text{ MPa}$$

Naprężenie zredukowane według hipotezy HMM

$$\begin{aligned} \sigma_{zred} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_x - \sigma_z)^2 + (\sigma_x - \sigma_y)^2 + 6(\tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{xy}^2)} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(100 - (-60))^2 + (50 - (-60))^2 + (50 - 100)^2 + 6 \cdot (50^2 + 0^2 + (-30)^2)} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{160^2 + 110^2 + (-50)^2 + 6 \cdot (50^2 + (-30)^2)} = 174.07 \text{ MPa} \end{aligned}$$

PRZYKŁAD 11.6

Dane są naprężenia działające na element różniczkowy w punkcie A (rys. 11.6). Wyznaczyć naprężenie zredukowane według hipotezy HMM.



Rys. 11.6

ROZWIĄZANIE

Składowe stanu naprężenia

$$\sigma_x = 0$$

$$\sigma_y = 90 \text{ MPa}$$

$$\sigma_z = 70 \text{ MPa}$$

$$\tau_{xy} = -50 \text{ MPa}$$

$$\tau_{xz} = 20 \text{ MPa}$$

$$\tau_{yz} = 40 \text{ MPa}$$

Naprężenie zredukowane według hipotezy HMM

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{zred}} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_x - \sigma_z)^2 + (\sigma_x - \sigma_y)^2 + 6(\tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{xy}^2)} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(90 - 70)^2 + (0 - 70)^2 + (0 - 90)^2 + 6 \cdot (40^2 + 20^2 + (-50)^2)} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{20^2 + (-70)^2 + (-90)^2 + 6 \cdot (40^2 + 20^2 + (-50)^2)} = 142.13 \text{ MPa} \end{aligned}$$

PRZYKŁAD 11.7

Wspornik o przekroju kołowym obciążony jest siłą podłużną i siłą poprzeczną na swobodnym końcu (rys. 11.7). Sprawdzić, czy spełniony jest warunek nośności WN.

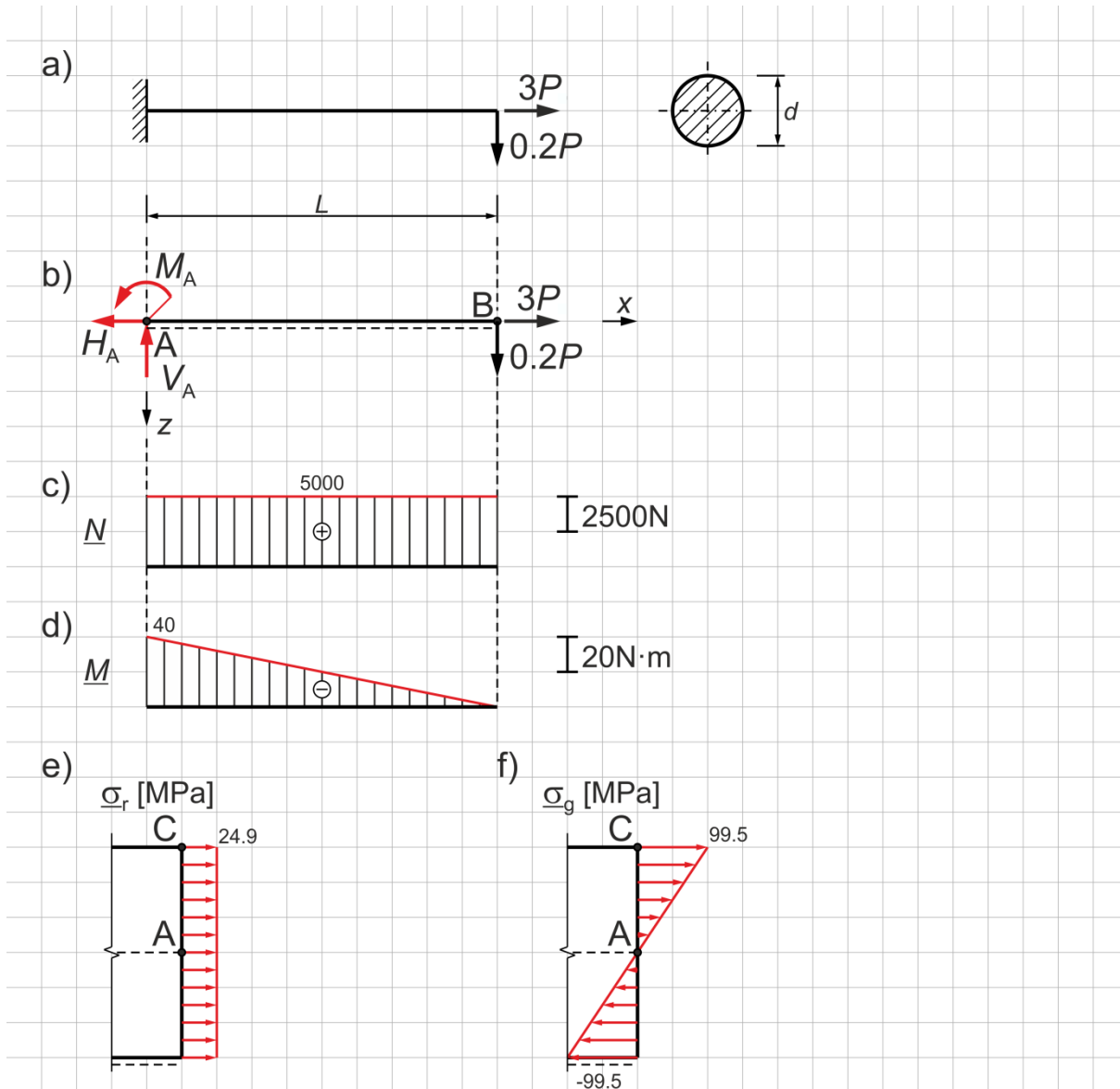
Dane:

$$P = 1000 \text{ N}$$

$$L = 0.2 \text{ m}$$

$$d = 16 \text{ mm}$$

$$k = 130 \text{ MPa}$$



Rys. 11.7

ROZWIĄZANIE

Reakcje (rys. 11.7b)

$$\sum P_{ix} = 0: \quad -H_A + 3P = 0$$

$$H_A = 3P = 3 \cdot 1000 = 3000 \text{ N}$$

$$\begin{aligned}\Sigma M_A = 0: \quad M_A - 0.2P \cdot L &= 0 \\ M_A &= 0.2P \cdot L = 0.2 \cdot 1000 \cdot 0.2 = 40 \text{ N}\cdot\text{m}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Sigma P_{iz} = 0: \quad -V_A + 0.2P &= 0 \\ V_A &= 0.2P = 0.2 \cdot 1000 = 200 \text{ N}\end{aligned}$$

Wartości sił osiowych (rys. 11.7c)

$$N_{AB} = 5P = 5 \cdot 1000 = 5000 \text{ N}$$

Wartości momentów zginających (rys. 11.7d)

$$\begin{aligned}M_A^l &= 0 \\ M_A^p &= -0.2 \cdot P \cdot L = -0.2 \cdot 1000 \cdot 0.2 = 40 \text{ N}\cdot\text{m} \\ M_B &= 0\end{aligned}$$

Pole powierzchni przekroju poprzecznego pręta

$$A = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi \cdot 16^2}{4} = 201.1 \text{ mm}^2$$

Wskaźnik przy zginaniu dla przekroju poprzecznego pręta

$$W = \frac{\pi d^3}{32} = \frac{\pi \cdot 16^3}{32} = 402.1 \text{ mm}^3$$

Na całej długości belki występuje stała wartość siły osiowej. Największa wartość momentu zginającego występuje w przekroju A. Jest to przekrój najbardziej wyężony. W wyniku zginania, górne włókna wspornika w przekroju A są rozciągane, a dolne ściskane. Ekstremalne naprężenia normalne σ występują we włóknach górnych (punkt C; rys. 11.7e i f).

Maksymalne naprężenia normalne

$$\begin{aligned}\sigma &= \frac{N}{A} - \frac{M}{W} = \frac{5P}{A} - \frac{(-0.2PL)}{W} = \frac{5000}{201.1} + \frac{40000}{402.1} = 24.9 + 99.5 = 124.4 \text{ MPa} \\ \sigma &= 124.4 \text{ MPa} \leq k = 130 \text{ MPa}\end{aligned}$$

Warunek nośności jest spełniony.

PRZYKŁAD 11.8

Beka swobodnie podparta o przekroju kołowym obciążona jest siłą podłużną i siłą poprzeczną w środku rozpiętości (rys. 11.8). Wyznaczyć rozkłady naprężeń normalnych we włóknach dolnych i górnych belki. Sprawdzić, czy spełniony jest warunek nośności.

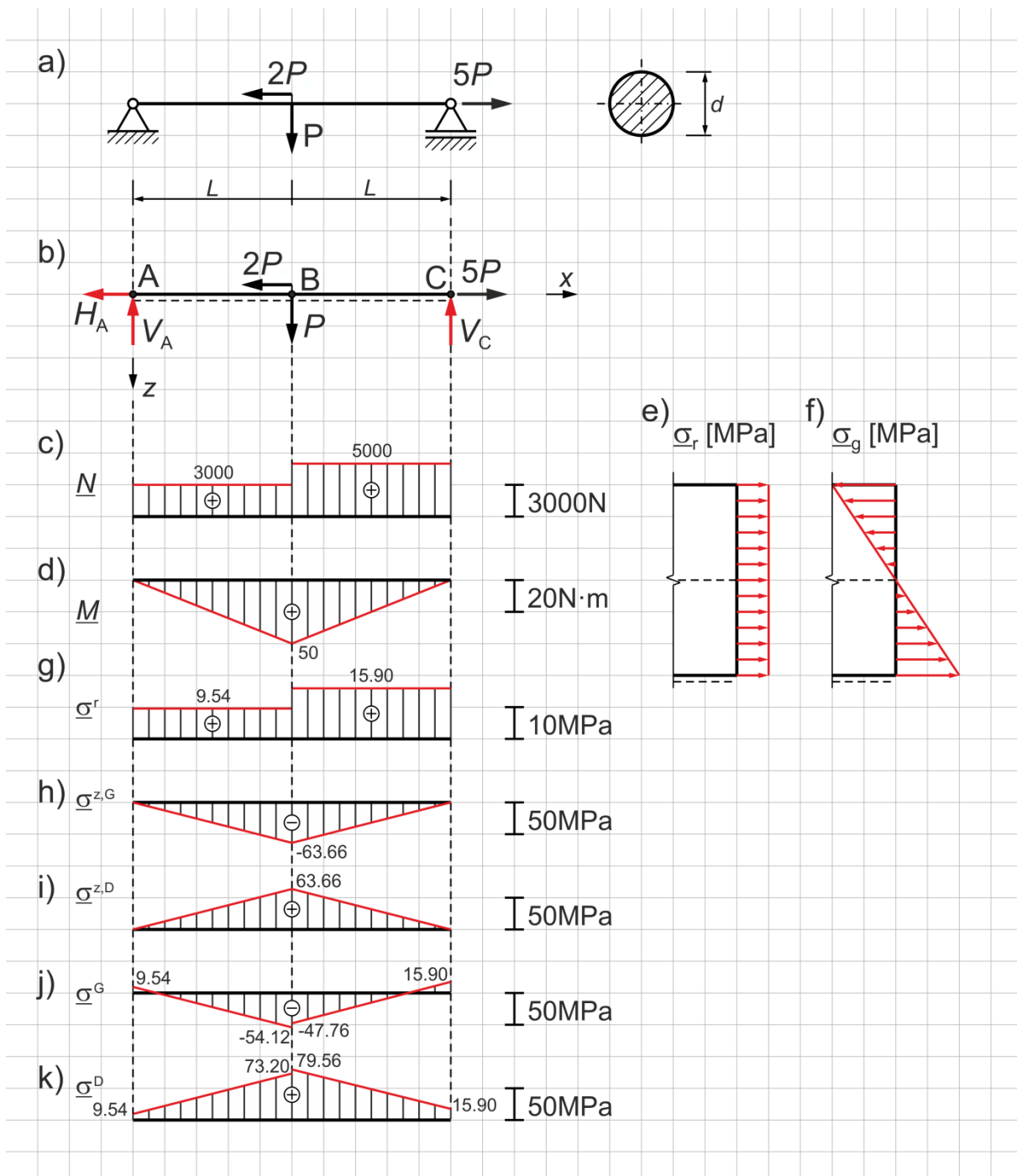
Dane:

$P = 1000 \text{ N}$

$L = 0.1 \text{ m}$

$d = 20 \text{ mm}$

$k = 80 \text{ MPa}$



Rys. 11.8

ROZWIĄZANIE

Reakcje (rys. 11.8b)

$$\sum P_{ix} = 0: \quad -H_A - 2P + 5P = 0$$

$$H_A = 3P = 3 \cdot 1000 = 3000 \text{ N}$$

$$\sum M_A = 0: \quad -P \cdot L + V_C \cdot 2L = 0$$

$$V_C \cdot 2L = P \cdot L \quad | : 2L$$

$$V_C = 0.5P = 0.5 \cdot 1000 = 500 \text{ N}$$

$$\sum P_{iz} = 0: \quad -V_A + P - V_C = 0$$

$$V_A = P - 0.5P = 0.5P = 0.5 \cdot 1000 = 500 \text{ N}$$

Wartości sił osiowych (rys. 11.8c)

$$N_{AB} = -2P + 5P = 3P = 3 \cdot 1000 = 3000 \text{ N}$$

$$N_{BC} = 5P = 5 \cdot 1000 = 5000 \text{ N}$$

Wartości momentów zginających (rys. 11.8d)

$$M_A = 0$$

$$M_B = V_C \cdot L = 0.5P \cdot L = 0.5 \cdot 1000 \cdot 0.1 = 50 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$M_C = 0$$

Pole powierzchni przekroju poprzecznego pręta

$$A = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi \cdot 20^2}{4} = 314.2 \text{ mm}^2$$

Wskaźnik przy zginaniu dla przekroju poprzecznego pręta

$$W = \frac{\pi d^3}{32} = \frac{\pi \cdot 20^3}{32} = 785.4 \text{ mm}^3$$

Rozkłady naprężeń normalnych σ od sił osiowych są stałe w poszczególnych odcinkach belki (rys. 11.8e).

Rozkład naprężeń normalnych σ od zginania belki jest liniowo zmienny w poszczególnych odcinkach belki. Włókna górne belki są ściskane, a dolne – rozciągane (rys. 11.8f).

Wartości naprężeń normalnych od sił osiowych (rys. 11.8g)

$$\sigma_{AB}^r = \frac{N_{AB}}{A} = \frac{3P}{A} = \frac{3 \cdot 1000}{314.5} = 9.54 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{BC}^r = \frac{N_{BC}}{A} = \frac{5P}{A} = \frac{5 \cdot 1000}{314.5} = 15.90 \text{ MPa}$$

Wartości naprężeń normalnych od zginania we włóknach górnych (rys. 11.8h)

$$\sigma_A^{z,G} = \frac{-M_A}{W} = 0$$

$$\sigma_B^{z,G} = \frac{-M_B}{W} = -\frac{0.5PL}{W} = -\frac{0.5 \cdot 1000 \cdot 100}{785.4} = -63.66 \text{ MPa}$$

$$\sigma_C^{z,G} = \frac{-M_C}{W} = 0$$

Wartości naprężeń normalnych od zginania we włóknach dolnych (rys. 11.8i)

$$\sigma_A^{z,D} = \frac{M_A}{W} = 0$$

$$\sigma_B^{z,D} = \frac{M_B}{W} = \frac{0.5PL}{W} = \frac{0.5 \cdot 1000 \cdot 100}{785.4} = 63.66 \text{ MPa}$$

$$\sigma_C^{z,D} = \frac{M_C}{W} = 0$$

Wartości naprężeń normalnych we włóknach górnych (rys. 11.8j)

$$\sigma_A^G = \sigma_{AB}^r + \sigma_A^{z,g} = 9.54 + 0 = 9.54 \text{ MPa}$$

$$\sigma_B^{G,l} = \sigma_{AB}^r + \sigma_B^{z,g} = 9.54 + (-63.66) = -54.12 \text{ MPa}$$

$$\sigma_B^{G,p} = \sigma_{BC}^r + \sigma_B^{z,g} = 15.90 + (-63.66) = -47.76 \text{ MPa}$$

$$\sigma_A^D = \sigma_{BC}^r + \sigma_C^{z,g} = 15.90 + 0 = 15.90 \text{ MPa}$$

Wartości naprężeń normalnych we włóknach dolnych (rys. 11.8k)

$$\sigma_A^D = \sigma_{AB}^r + \sigma_A^{z,d} = 9.54 + 0 = 9.54 \text{ MPa}$$

$$\sigma_B^{D,l} = \sigma_{AB}^r + \sigma_B^{z,d} = 9.54 + 63.66 = 73.20 \text{ MPa}$$

$$\sigma_B^{D,p} = \sigma_{BC}^r + \sigma_B^{z,d} = 15.90 + 63.66 = 79.56 \text{ MPa}$$

$$\sigma_A^D = \sigma_{BC}^r + \sigma_C^{z,d} = 15.90 + 0 = 15.90 \text{ MPa}$$

Maksymalne naprężenia normalne

$$\sigma = |\sigma|_{\max} = 79.56 \text{ MPa} \leq k = 80 \text{ MPa}$$

Warunek nośności jest spełniony.

PRZYKŁAD 11.9

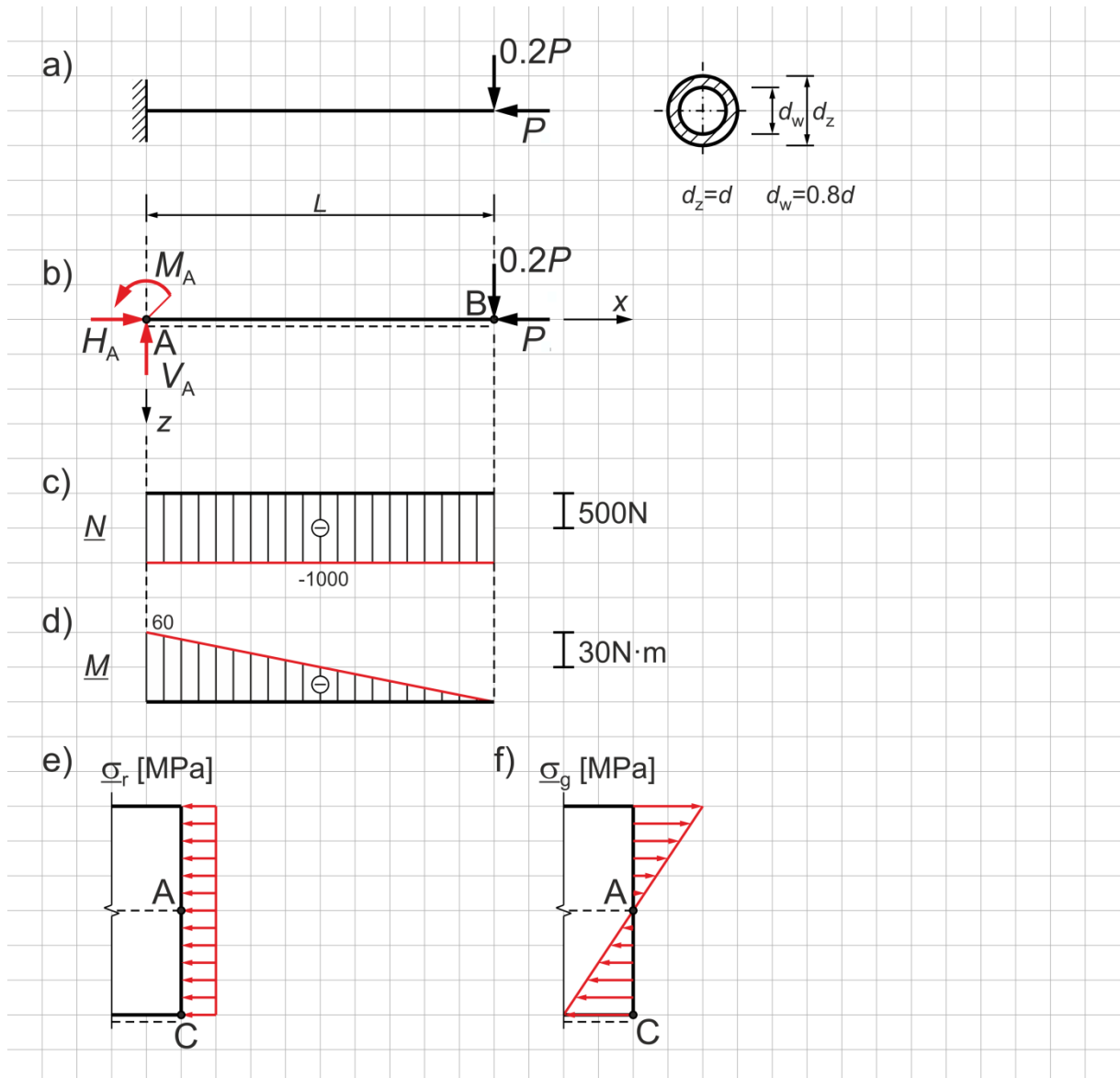
Wspornik o przekroju pierścieniowym obciążony jest siłą podłużną i siłą poprzeczną na swobodnym końcu (rys. 11.9). Wyznaczyć wymiary przekroju poprzecznego z warunku nośności.

Dane:

$$P = 1000 \text{ N}$$

$$L = 0.3 \text{ m}$$

$$k = 120 \text{ MPa}$$



Rys. 11.9

ROZWIĄZANIE

Reakcje (rys. 11.9b)

$$\sum P_{ix} = 0: \quad H_A - P = 0$$

$$H_A = P = 1000 \text{ N}$$

$$\sum P_{iz} = 0: \quad -V_A + 0.2P = 0$$

$$V_A = 0.2P = 0.2 \cdot 1000 = 200 \text{ N}$$

$$\sum M_A = 0: \quad M_A - 0.2P \cdot L = 0$$

$$M_A = 0.2P \cdot L = 0.2 \cdot 1000 \cdot 0.3 = 60 \text{ N}\cdot\text{m}$$

Wartości sił osiowych (rys. 11.9c)

$$N_{AB} = -P = -1000 \text{ N}$$

Wartości momentów zginających (rys. 11.9d)

$$M_A^l = 0$$

$$M_A^p = -0.2 \cdot P \cdot L = -0.2 \cdot 1000 \cdot 0.3 = 60 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$M_B = 0$$

Pole powierzchni przekroju poprzecznego pręta

$$A = \frac{\pi}{4}(d_z^2 - d_w^2) = \frac{\pi}{4}[d^2 - (0.8d)^2] = \frac{\pi}{4}[d^2 - 0.64d^2] = \frac{0.36d^2\pi}{4} = 0.2827d^2$$

Wskaźnik przy zginaniu dla przekroju poprzecznego pręta

$$W = \frac{\pi}{32d_z}(d_z^4 - d_w^4) = \frac{\pi}{32d}[d^4 - (0.8d)^4] = \frac{\pi}{32d}[d^4 - 0.64d^4] = \frac{0.36d^4\pi}{32d} = 0.0353d^3$$

Na całej długości belki występuje stała wartość sił osiowych. Największa wartość momentów zginających występuje w przekroju A. Jest to przekrój najbardziej wyężony. W wyniku zginania, górne włókna wspornika w przekroju A są rozciągane, a dolne – ściskane. Ekstremalne naprężenia normalne σ występują we włóknach dolnych (punkt C; rys. 11.9e i f).

Ekstremalne naprężenia normalne

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M}{W} = \frac{-P}{A} + \frac{(-0.2PL)}{W} = -\frac{P}{0.2827d^2} - \frac{0.2PL}{0.0353d^3}$$

Warunek nośności

$$|\sigma| \leq k \quad \rightarrow \quad \left| -\frac{P}{0.2827d^2} - \frac{0.2PL}{0.0353d^3} \right| \leq k$$

Metoda prób i błędów

$$d = 30 \text{ mm}$$

$$\frac{P}{0.2827d^2} + \frac{0.2PL}{0.0353d^3} = \frac{1000}{0.2827 \cdot 30^2} + \frac{0.2 \cdot 1000 \cdot 300}{0.0353 \cdot 30^3} = \frac{1000}{254.43} + \frac{60000}{953.1} = 66.9 \text{ MPa} < k = 120 \text{ MPa}$$

$$d = 20 \text{ mm}$$

$$\frac{P}{0.2827d^2} + \frac{0.2PL}{0.0353d^3} = \frac{1000}{0.2827 \cdot 20^2} + \frac{0.2 \cdot 1000 \cdot 300}{0.0353 \cdot 20^3} = \frac{1000}{113.08} + \frac{60000}{282.4} = 221.3 \text{ MPa} > k = 120 \text{ MPa}$$

$$d = 25 \text{ mm}$$

$$\frac{P}{0.2827d^2} + \frac{0.2PL}{0.0353d^3} = \frac{1000}{0.2827 \cdot 25^2} + \frac{0.2 \cdot 1000 \cdot 300}{0.0353 \cdot 25^3} = \frac{1000}{176.69} + \frac{60000}{551.56} = 114.4 \text{ MPa} < k = 120 \text{ MPa}$$

$$d = 24 \text{ mm}$$

$$\frac{P}{0.2827d^2} + \frac{0.2PL}{0.0353d^3} = \frac{1000}{0.2827 \cdot 24^2} + \frac{0.2 \cdot 1000 \cdot 300}{0.0353 \cdot 24^3} = \frac{1000}{162.84} + \frac{60000}{487.99} = 129.1 \text{ MPa} > k = 120 \text{ MPa}$$

Przyjęto średnicę zewnętrzną $d_z = 25 \text{ mm}$ i średnicę wewnętrzną $d_w = 20 \text{ mm}$.

PRZYKŁAD 11.10

Wspornik o przekroju kołowym obciążony jest siłą podłużną i momentem skręcającym na swobodnym końcu (rys. 11.10). Sprawdzić, czy spełniony jest warunek nośności, przy zastosowaniu hipotezy CGT i HMM.

Dane:

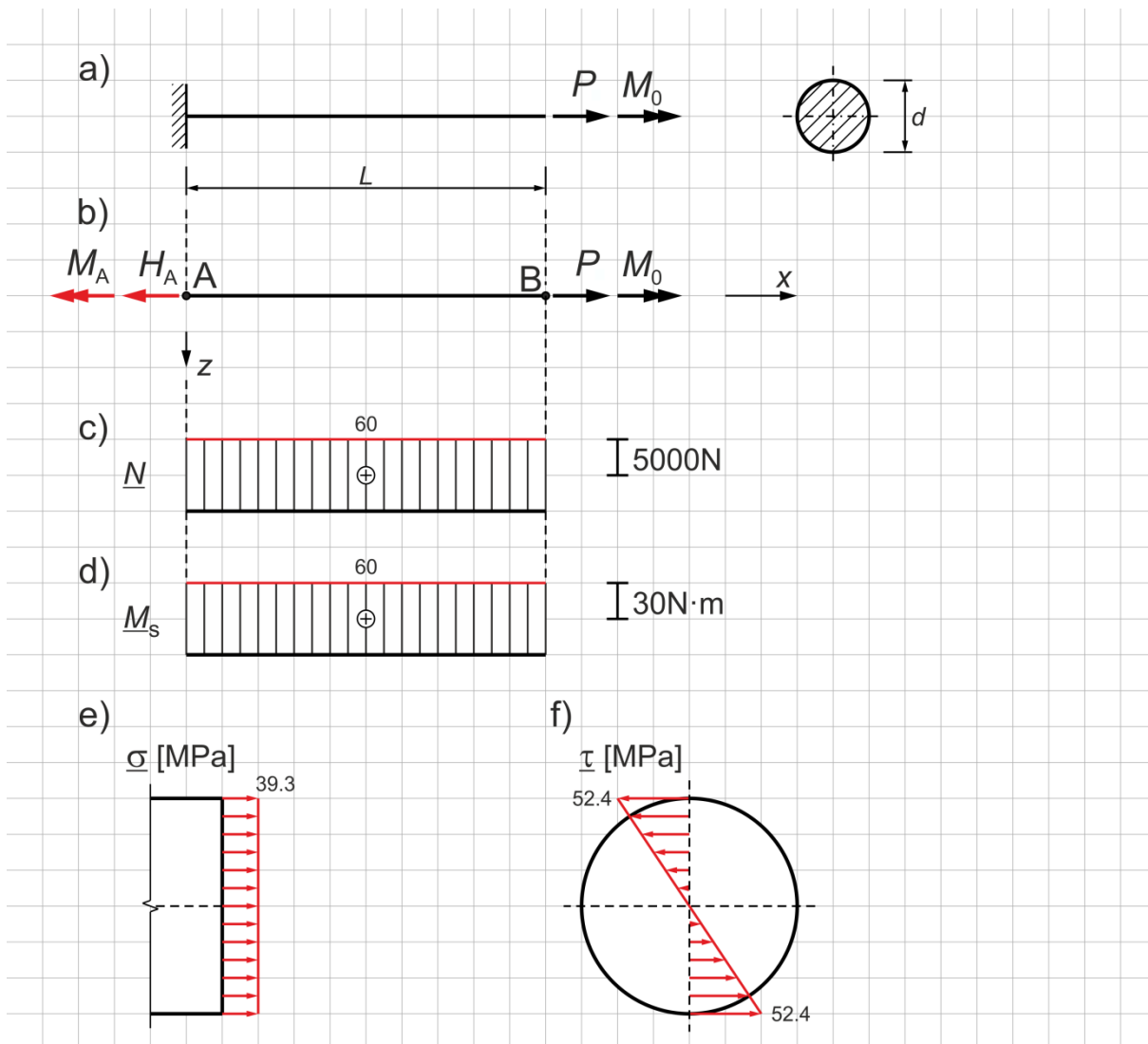
$$P = 10000 \text{ N}$$

$$M_0 = 60 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$L = 0.5 \text{ m}$$

$$d = 18 \text{ mm}$$

$$k = 120 \text{ MPa}$$



Rys. 11.10

ROZWIĄZANIE

Reakcje (rys. 11.10b)

$$\sum P_{ix} = 0: \quad -H_A + P = 0$$

$$H_A = P = 10000 \text{ N}$$

$$\begin{aligned}\Sigma M_x = 0: \quad & -M_A + M_0 = 0 \\ & M_A = M_0 = 60 \text{ N}\cdot\text{m}\end{aligned}$$

Wartość siły osiowej (rys. 11.10c)

$$N_{AB} = P = 10000 \text{ N}$$

Wartość momentu skręcającego (rys. 11.10d)

$$M_{s,AB} = M_0 = 60 \text{ N}\cdot\text{m}$$

Pole powierzchni przekroju poprzecznego pręta

$$A = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi \cdot 18^2}{4} = 254.5 \text{ mm}^2$$

Wskaźnik przy skręcaniu dla przekroju poprzecznego pręta

$$W_s = \frac{\pi d^3}{16} = \frac{\pi \cdot 18^3}{16} = 1145.1 \text{ mm}^3$$

Na całej długości pręta występuje stała wartość siły osiowej i momentu skręcającego. Największe naprężenia zredukowane występują na powierzchni zewnętrznej pręta.

Naprężenia normalne σ od siły osiowej

$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{P}{A} = \frac{10000}{254.5} = 39.3 \text{ MPa}$$

Naprężenia styczne τ od momentu skręcającego

$$\tau = \frac{M_s}{W_s} = \frac{M_0}{W_s} = \frac{60000}{1145.1} = 52.4 \text{ MPa}$$

Naprężenia zredukowane według hipotezy CGT

$$\sigma_{zred} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sqrt{39.3^2 + 4 \cdot 52.4^2} = 111.9 \text{ MPa} \leq k = 120 \text{ MPa}$$

Naprężenia zredukowane według hipotezy HMM

$$\sigma_{zred} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = \sqrt{39.3^2 + 3 \cdot 52.4^2} = 98.9 \text{ MPa} \leq k = 120 \text{ MPa}$$

Warunek nośności jest spełniony dla hipotezy CGT i HMM.

PRZYKŁAD 11.11

Belka wspornikowa jest obciążona jak na rys. 11.11. Wyznaczyć rozkłady naprężeń normalnych i stycznych. Sprawdzić, czy spełniony jest warunek nośności, przy zastosowaniu hipotezy CGT i HMH.

Dane:

$$P = 5000 \text{ N}$$

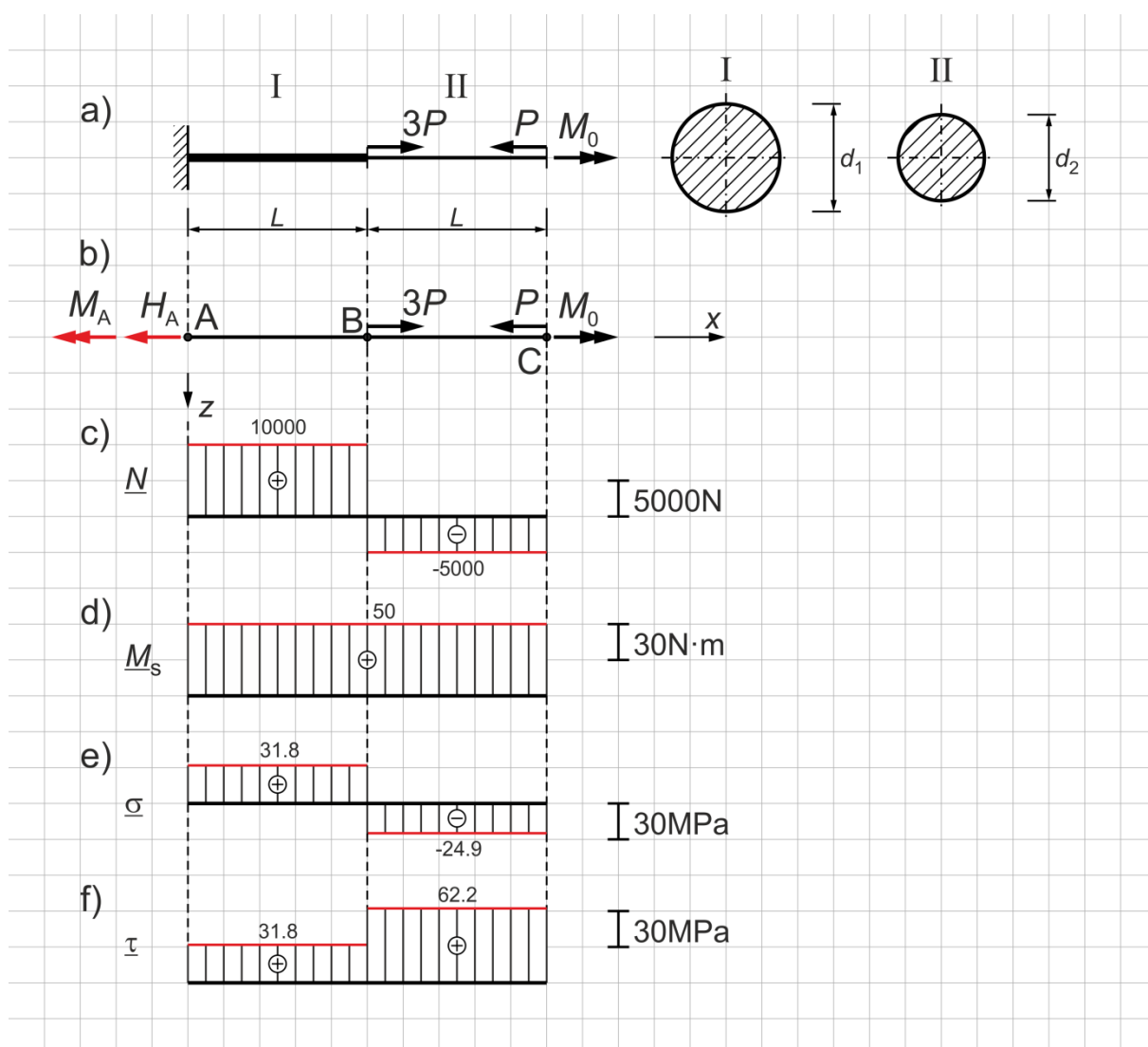
$$M_0 = 50 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$L = 0.3 \text{ m}$$

$$d_1 = 20 \text{ mm}$$

$$d_2 = 16 \text{ mm}$$

$$k = 130 \text{ MPa}$$



Rys. 11.11

ROZWIĄZANIE

Reakcje (rys. 11.11b)

$$\sum P_{ix} = 0: \quad -H_A + 3P - P = 0$$

$$H_A = 3P - P = 2P = 2 \cdot 5000 = 10000 \text{ N}$$

$$\sum M_x = 0: \quad -M_A + M_0 = 0$$

$$M_A = M_0 = 50 \text{ N}\cdot\text{m}$$

Wartości siły osiowej (rys. 11.11c)

$$N_{AB} = 3P - P = 2P = 2 \cdot 5000 = 10000 \text{ N}$$

$$N_{BC} = -P = -5000 \text{ N}$$

Wartość momentu skręcającego (rys. 11.11d)

$$M_{s,AC} = M_0 = 50 \text{ N}\cdot\text{m}$$

Pola powierzchni przekrojów poprzecznych prętów

$$A_I = \frac{\pi d_1^2}{4} = \frac{\pi \cdot 20^2}{4} = 314.2 \text{ mm}^2$$

$$A_{II} = \frac{\pi d_2^2}{4} = \frac{\pi \cdot 16^2}{4} = 201.1 \text{ mm}^2$$

Wskaźniki przy skręcaniu dla przekrojów poprzecznych prętów

$$W_{sI} = \frac{\pi d_1^3}{16} = \frac{\pi \cdot 20^3}{16} = 1570.8 \text{ mm}^3$$

$$W_{sII} = \frac{\pi d_2^3}{16} = \frac{\pi \cdot 16^3}{16} = 804.3 \text{ mm}^3$$

Naprężenia normalne σ od sił osiowych (rys. 11.11e)

$$\sigma_{AB} = \frac{N_{AB}}{A_I} = \frac{2P}{A_I} = \frac{10000}{314.2} = 31.8 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{BC} = \frac{N_{BC}}{A_{II}} = \frac{-P}{A_{II}} = -\frac{5000}{201.1} = -24.9 \text{ MPa}$$

Naprężenia styczne τ od momentu skręcającego (rys. 11.11f)

$$\tau_{AB} = \frac{M_s}{W_{sI}} = \frac{M_0}{W_{sI}} = \frac{50000}{1570.8} = 31.8 \text{ MPa}$$

$$\tau_{BC} = \frac{M_s}{W_{sII}} = \frac{M_0}{W_{sII}} = \frac{50000}{804.3} = 62.2 \text{ MPa}$$

Naprężenia zredukowane według hipotezy CGT

$$\sigma_{zred,AB} = \sqrt{\sigma_{AB}^2 + 4\tau_{AB}^2} = \sqrt{31.8^2 + 4 \cdot 31.8^2} = 71.1 \text{ MPa} \leq k = 130 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{zred,BC} = \sqrt{\sigma_{BC}^2 + 4\tau_{BC}^2} = \sqrt{(-24.9)^2 + 4 \cdot 62.2^2} = 126.9 \text{ MPa} \leq k = 130 \text{ MPa}$$

Naprężenia zredukowane według hipotezy HMH

$$\sigma_{zred,AB} = \sqrt{\sigma_{AB}^2 + 3\tau_{AB}^2} = \sqrt{31.8^2 + 3 \cdot 31.8^2} = 63.6 \text{ MPa} \leq k = 130 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{zred,BC} = \sqrt{\sigma_{BC}^2 + 3\tau_{BC}^2} = \sqrt{(-24.9)^2 + 3 \cdot 62.2^2} = 110.6 \text{ MPa} \leq k = 130 \text{ MPa}$$

Warunek nośności jest spełniony dla hipotezy CGT i HMH.

PRZYKŁAD 11.12

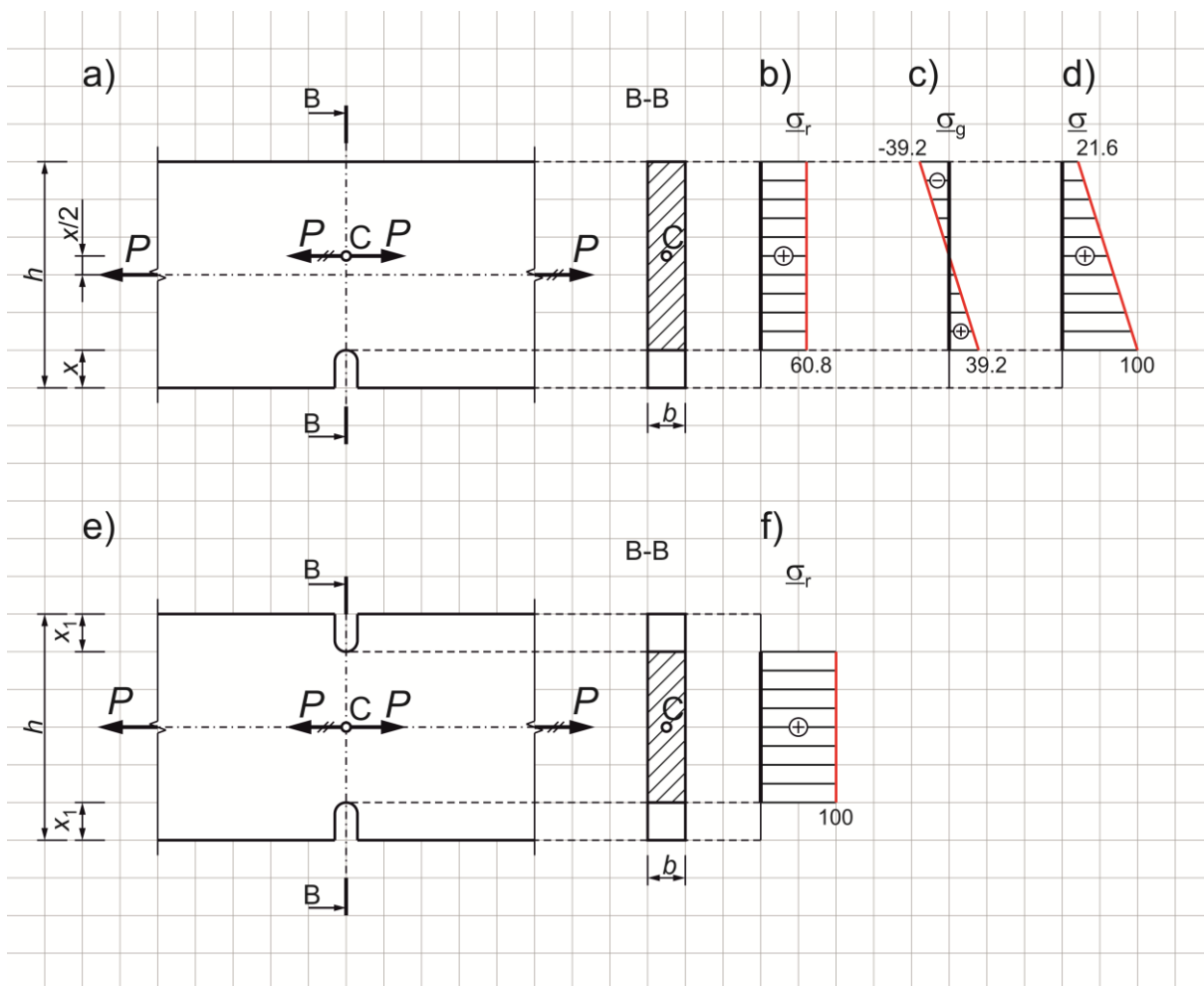
Wyznaczyć dopuszczalną głębokość karbu w stalowym płaskowniku obciążonym siłą $P = 50 \text{ kN}$.
Naprężenia dopuszczalne $k = 100 \text{ MPa}$.

Ile wyniesie dopuszczalna głębokość karbu wykonanego symetrycznie z dwóch stron płaskownika?

Dane:

$$h = 100 \text{ mm}$$

$$b = 10 \text{ mm}$$



Rys. 11.12

ROZWIĄZANIE

W strefie karbu, zakładamy w uproszczeniu przypadek wytrzymałościowy mimośrodowego rozciągania. Redukcja siły rozciągającej P do środka geometrycznego C przekroju B-B daje w wyniku się siłę rozciągającą P oraz moment zginający M (rys. 11.12a).

Moment zginający

$$M = P \cdot \frac{x}{2}$$

Pole powierzchni przekroju B-B

$$A = b \cdot (h - x) = 10 \cdot (100 - x)$$

Wskaźnik przy zginaniu przekroju B-B

$$W = \frac{b \cdot (h-x)^2}{6} = \frac{10 \cdot (100-x)^2}{6}$$

Naprężenia normalne od rozciągania w przekroju B-B

$$\sigma_r = \frac{P}{A} = \frac{P}{10 \cdot (100-x)}$$

Ekstremalne naprężenia normalne od zginania w przekroju B-B

$$\sigma_g = \frac{M}{W} = \frac{P \cdot \frac{x}{2}}{\frac{10 \cdot (100-x)^2}{6}} = \frac{3Px}{10 \cdot (100-x)^2}$$

Maksymalne naprężenie normalne w przekroju B-B

$$\sigma = \sigma_r + \sigma_g = \frac{P}{10 \cdot (100-x)} + \frac{3Px}{10 \cdot (100-x)^2}$$

Warunek nośności

$$\sigma \leq k \rightarrow \sigma = \frac{P}{10 \cdot (100-x)} + \frac{3Px}{10 \cdot (100-x)^2} \leq k$$

$$\frac{P}{10 \cdot (100-x)} + \frac{3Px}{10 \cdot (100-x)^2} = k \rightarrow \frac{50000}{10 \cdot (100-x)} + \frac{3 \cdot 50000 \cdot x}{10 \cdot (100-x)^2} = 100$$

$$\frac{5000}{(100-x)} + \frac{15000 \cdot x}{(100-x)^2} = 100 \quad | : 100 \rightarrow \frac{50}{(100-x)} + \frac{150 \cdot x}{(100-x)^2} = 1$$

$$\frac{50 \cdot (100-x)}{(100-x)^2} + \frac{150 \cdot x}{(100-x)^2} = 1 \rightarrow \frac{50 \cdot (100-x) + 150x}{(100-x)^2} = 1$$

$$5000 - 50x + 150x = (100 - x)^2 = 10000 - 200x + x^2$$

$$5000 + 100x = 10000 - 200x + x^2 \rightarrow x^2 - 300x + 5000 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-300)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5000 = 90000 - 20000 = 70000$$

$$\sqrt{\Delta} = 264.6$$

$$x_a = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{300 + 264.6}{2} = 282.3 \text{ mm}$$

$$x_b = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{300 - 264.6}{2} = 17.7 \text{ mm}$$

Wartości naprężeń normalnych od rozciągania w przekroju B-B (rys. 11.12b)

$$\sigma_r = \frac{P}{A} = \frac{P}{10 \cdot (100 - x)} = \frac{50000}{10 \cdot (100 - 17.7)} = 60.8 \text{ MPa}$$

Wartości naprężeń normalnych od zginania w przekroju B-B (rys. 11.12c)

$$\sigma_{g,D} = -\frac{3Px}{10 \cdot (100 - x)^2} = -\frac{3 \cdot 50000 \cdot 17.7}{10 \cdot (100 - 17.7)^2} = -39.2 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{g,E} = \frac{3Px}{10 \cdot (100 - x)^2} = \frac{3 \cdot 50000 \cdot 17.7}{10 \cdot (100 - 17.7)^2} = 39.2 \text{ MPa}$$

Wartości ekstremalne naprężeń normalnych w przekroju B-B (rys. 11.12d)

$$\sigma_D = \sigma_{\min} = \sigma_r - \sigma_{g,D} = 60.8 - 39.2 = 21.6 \text{ MPa}$$

$$\sigma_E = \sigma_{\max} = \sigma_r + \sigma_{g,D} = 60.8 + 39.2 = 100 \text{ MPa}$$

W przypadku karbu wykonanego symetrycznie z dwóch stron płaskownika (rys. 11.12e), przekrój B-B jest tylko rozciągany.

Warunek nośności

$$\sigma_r \leq k \rightarrow \sigma_r = \frac{P}{b \cdot (h - 2x_1)} \leq k$$

$$\frac{P}{b \cdot (h - 2x_1)} = k \rightarrow \frac{50000}{10 \cdot (100 - 2x_1)} = 100 \rightarrow \frac{50}{(100 - 2x_1)} = 1$$

$$50 = 100 - 2x_1 \rightarrow 2x_1 = 50 \rightarrow x_1 = 25 \text{ mm}$$

Wartości naprężeń normalnych od rozciągania w przekroju B-B (rys. 11.12f)

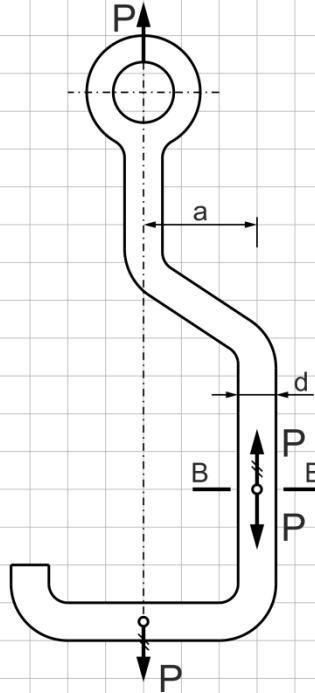
$$\sigma_r = \frac{P}{A} = \frac{P}{10 \cdot (100 - 2x_1)} = \frac{50000}{10 \cdot (100 - 2 \cdot 25)} = 100 \text{ MPa}$$

PRZYKŁAD 11.13

Wyznaczyć średnicę d stalowego pręta haka o udźwigu $P = 3000$ N. Naprężenia dopuszczalne $k = 120$ MPa.

Dane:

$$a = 60 \text{ mm}$$



Rys. 11.13

ROZWIĄZANIE

Zadanie rozwiązano w przybliżeniu, traktując układ jako zbiór prętów rozciąganych lub/i zginanych.

Przekrój B-B haka jest rozciągany siłą P oraz zginany momentem M :

$$M = P \cdot a = 3000 \cdot 60 = 180000 \text{ N}\cdot\text{m}$$

Warunek nośności na zginanie

$$\sigma_g \leq k \rightarrow \sigma_g = \frac{M}{W} \leq k$$

$$\frac{M}{\frac{\pi d^3}{32}} \leq k \rightarrow \frac{32M}{\pi d^3} \leq k \quad | \cdot \frac{d^3}{k}$$

$$k \geq \sqrt[3]{\frac{32M}{\pi k}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 180000}{\pi \cdot 120}} = 24.8 \text{ mm}$$

Ze względu na naprężenia rozciągające należy zwiększyć wyznaczoną średnicę. Przyjęto $d = 26$ mm.

Sprawdzenie warunku nośności

$$\sigma_{\max} \leq k \rightarrow \sigma_{\max} = \sigma_r + \sigma_g \leq k$$

$$\frac{P}{A} + \frac{M}{W} = \frac{P}{\frac{\pi d^2}{4}} + \frac{M}{\frac{\pi d^3}{32}} \leq k \rightarrow \frac{4P}{\pi d^2} + \frac{32M}{\pi d^3} \leq k$$

$$\frac{4 \cdot 3000}{\pi \cdot 26^2} + \frac{32 \cdot 180000}{\pi \cdot 26^3} = 5.7 + 104.3 = 110 \text{ MPa} \leq k = 120 \text{ MPa}$$

Gdyby sumaryczne naprężenia przekroczyły wartość naprężeń dopuszczalnych, należy zwiększyć średnicę d i powtórnie sprawdzić warunek nośności.

12.

WYBOCZENIE PRĘTÓW SMUKŁYCH

Wyboczeniem pręta prostego smukłego, ściskanego siłą podłużną, nazywa się jego ugięcie w kierunku prostopadłym do osi pręta bez obciążenia poprzecznego. Siłę podłużną, przy której występuje wyboczenie nazywa się siłą krytyczną P_{kr} .

Smukłość pręta prostego w płaszczyźnie wyboczenia określona jest wzorem:

$$\lambda = L_w \sqrt{\frac{A}{I}} \quad (12.1)$$

gdzie:

L_w – długość wyboczeniowa pręta (rys. 12.1),

A – pole powierzchni przekroju poprzecznego pręta,

I – moment bezwładności przekroju poprzecznego pręta względem osi głównej centralnej prostopadłej do płaszczyzny wyboczenia.

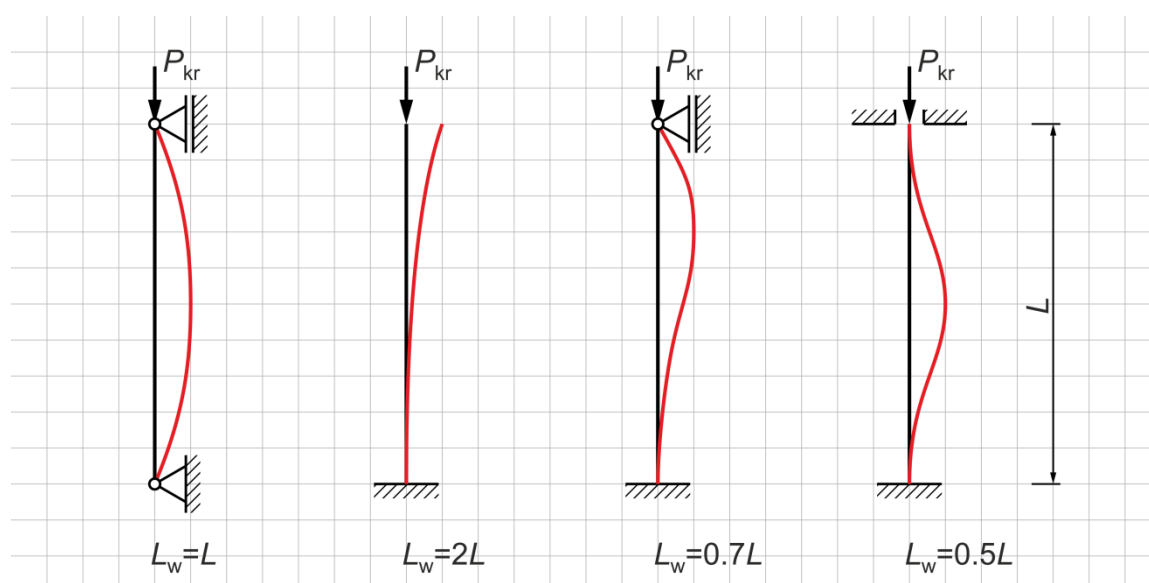
Smukłość graniczna pręta wynosi:

$$\lambda_{gr} = \pi \sqrt{\frac{E}{R_H}} \quad (12.2)$$

gdzie:

E – moduł Younga,

R_H – granica proporcjonalności (granica Hooke'a).



Rys. 12.1

Gdy smukłość pręta jest większa od lub równa smukłości granicznej ($\lambda \geq \lambda_{gr}$), to następuje wyboczenie sprężyste (rys. 12.2). W przeciwnym przypadku ($\lambda < \lambda_{gr}$) wyboczenie jest niesprężyste (rys. 12.2).

Naprężenia normalne powstałe w pręcie podczas wyboczenia (dla obciążenia siłą krytyczną P_{kr}) nazywa się naprężeniami krytycznymi σ_{kr} . Dla wyboczenia sprężystego wyznacza się je ze wzoru (hiperbola Eulera, rys. 12.2):

$$\sigma_{kr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \quad (12.3)$$

dla wyboczenia niesprężystego (prosta Tetmajera, rys. 12.2):

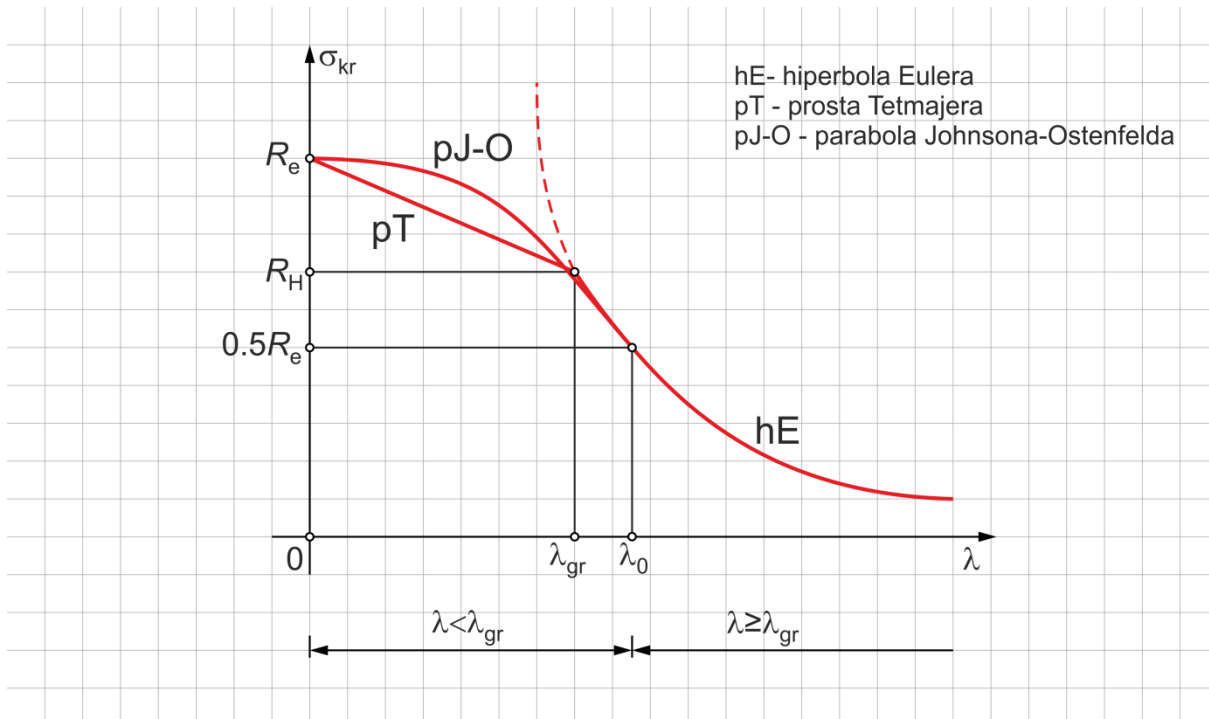
$$\sigma_{kr} = R_e \left[1 - \left(1 - \frac{R_H}{R_e} \right) \frac{\lambda}{\lambda_{gr}} \right] \quad (12.4)$$

lub (parabola Johnsona – Ostenfelda, rys. 12.2):

$$\sigma_{kr} = R_e \left[1 - 0.5 \left(\frac{\lambda}{\lambda_0} \right)^2 \right] \quad (12.5)$$

gdzie:

$$\lambda_0 = \pi \sqrt{\frac{E}{0.5 R_e}} \quad (12.6)$$



Rys. 12.2

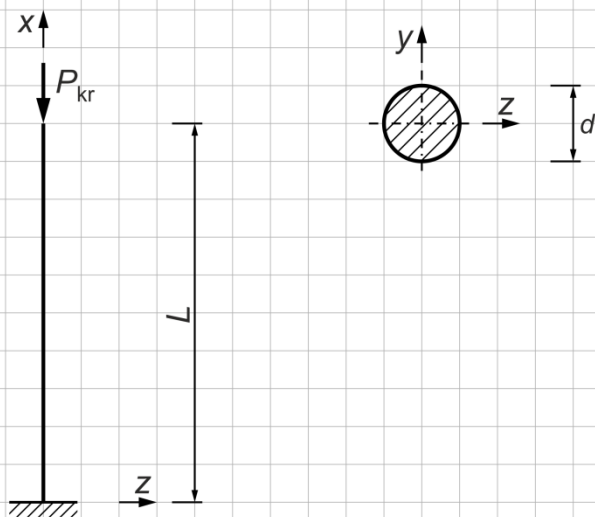
PRZYKŁAD 12.1

Wyznaczyć siłę krytyczną dla pręta wspornikowego o długości $L = 1000$ mm i kołowym przekroju poprzecznym $d = 30$ mm (rys. 12.3). Pręt wykonany jest ze stali, dla której:

$$R_e = 235 \text{ MPa}$$

$$R_H = 200 \text{ MPa}$$

$$E = 210 \text{ GPa}$$



Rys. 12.3

ROZWIĄZANIE

Pole przekroju poprzecznego pręta

$$A = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi \cdot 30^2}{4} = 706.9 \text{ mm}^2$$

Moment bezwładności przekroju poprzecznego pręta

$$I = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi \cdot 30^4}{64} = 39760.8 \text{ mm}^4$$

Smukłość pręta

$$L_w = 2L = 2 \cdot 1000 = 2000 \text{ mm}$$

$$\lambda = L_w \sqrt{\frac{A}{I}} = 2000 \sqrt{\frac{706.9}{39760.8}} = 266.7$$

Smukłość graniczna

$$\lambda_{gr} = \pi \sqrt{\frac{E}{R_H}} = \pi \sqrt{\frac{210000}{200}} = 101.8$$

Pręt wyboczy się sprężystie, ponieważ $\lambda \geq \lambda_{gr}$.

Wartość siły krytycznej

$$\sigma_{kr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} = \frac{\pi^2 \cdot 210000}{266.7^2} = 29.1 \text{ MPa}$$

$$P_{kr} = \sigma_{kr} \cdot A = 29.1 \cdot 706.9 = 20570.8 \text{ N}$$

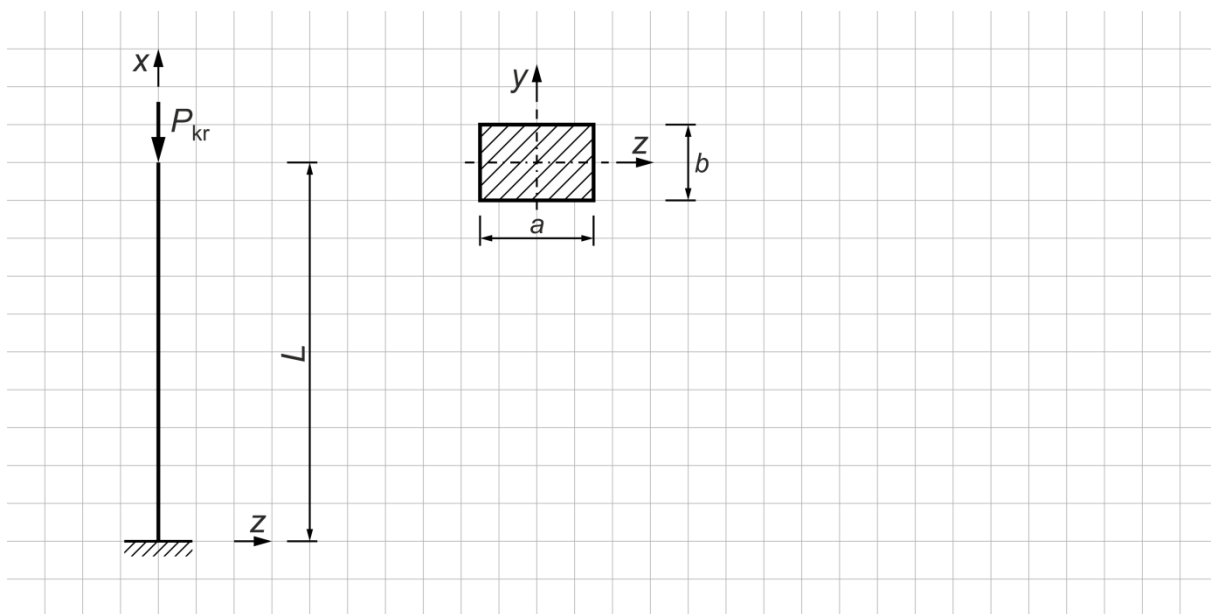
PRZYKŁAD 12.2

Wyznaczyć siłę krytyczną dla pręta wspornikowego o długości $L = 500 \text{ mm}$ i prostokątnym przekroju poprzecznym $a \times b = 50 \times 40 \text{ mm}$ (rys. 12.4). Pręt wykonany jest ze stali, dla której:

$$R_e = 235 \text{ MPa}$$

$$R_H = 200 \text{ MPa}$$

$$E = 210 \text{ GPa}$$



Rys. 12.4

ROZWIĄZANIE

Pole przekroju poprzecznego pręta

$$A = a \cdot b = 50 \cdot 40 = 2000 \text{ mm}^2$$

Momenty bezwładności przekroju poprzecznego pręta

$$I_y = \frac{b \cdot a^3}{12} = \frac{40 \cdot 50^3}{12} = 416666.7 \text{ mm}^4$$

$$I_z = \frac{a \cdot b^3}{12} = \frac{50 \cdot 40^3}{12} = 266666.7 \text{ mm}^4$$

Wyboczenie wystąpi w płaszczyźnie xy , ponieważ $I_z < I_y$.

Smukłość pręta

$$L_w = 2L = 2 \cdot 500 = 1000 \text{ mm}$$

$$\lambda = L_w \sqrt{\frac{A}{I}} = 1000 \sqrt{\frac{2000}{266666.7}} = 86.6$$

Smukłość graniczna

$$\lambda_{gr} = \pi \sqrt{\frac{E}{R_H}} = \pi \sqrt{\frac{210000}{200}} = 101.8$$

Pręt wyboczy się niesprężysto, ponieważ $\lambda < \lambda_{gr}$.

Wartość siły krytycznej według prostej Tetmajera

$$\sigma_{kr} = R_e \left[1 - \left(1 - \frac{R_H}{R_e} \right) \frac{\lambda}{\lambda_{gr}} \right] = 235 \cdot \left[1 - \left(1 - \frac{200}{235} \right) \frac{86.6}{101.8} \right] = 205.2 \text{ MPa}$$

$$P_{kr} = \sigma_{kr} \cdot A = 205.2 \cdot 2000 = 410400 \text{ N}$$

Wartość siły krytycznej według paraboli Johnsona-Ostfelda

$$\lambda_o = \pi \sqrt{\frac{E}{0.5R_e}} = \pi \sqrt{\frac{210000}{0.5 \cdot 235}} = 132.8$$

$$\sigma_{kr} = R_e \left[1 - 0.5 \left(\frac{\lambda}{\lambda_o} \right)^2 \right] = 235 \cdot \left[1 - 0.5 \left(\frac{86.6}{132.8} \right)^2 \right] = 185.0 \text{ MPa}$$

$$P_{kr} = \sigma_{kr} \cdot A = 185.0 \cdot 2000 = 370000 \text{ N}$$

PRZYKŁAD 12.3

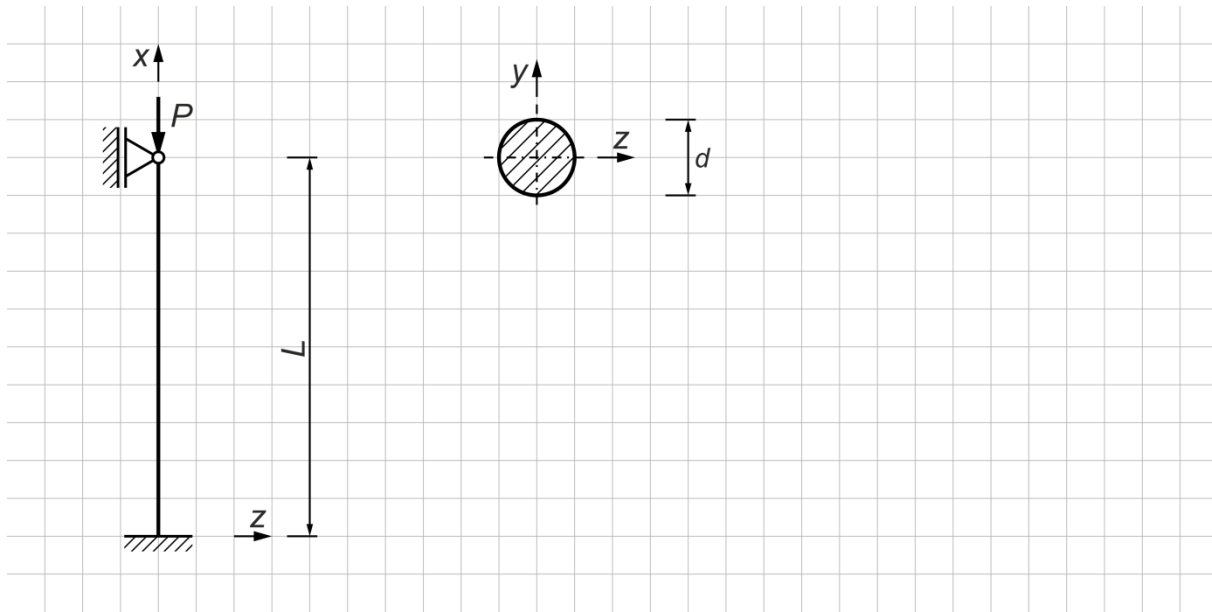
Obliczyć średnicę pręta (rys. 12.5), przy której wyboczenie jest jeszcze sprężyste.

Dane:

$$L = 1500 \text{ mm}$$

$$R_H = 100 \text{ MPa}$$

$$E = 69 \text{ GPa}$$



Rys. 12.5

ROZWIĄZANIE

Pole przekroju poprzecznego pręta

$$A = \frac{\pi d^2}{4}$$

Moment bezwładności przekroju poprzecznego pręta

$$I = \frac{\pi d^4}{64}$$

Smukłość pręta

$$L_w = 0.7L = 0.7 \cdot 1500 = 1050 \text{ mm}$$

$$\lambda = L_w \sqrt{\frac{A}{I}} = L_w \sqrt{\frac{\pi d^2}{4} \cdot \frac{64}{\pi d^4}} = L_w \sqrt{\frac{16}{d^2}} = L_w \cdot \frac{4}{d} = 1050 \cdot \frac{4}{d} = \frac{4200}{d}$$

Smukłość graniczna

$$\lambda_{gr} = \pi \sqrt{\frac{E}{R_H}} = \pi \sqrt{\frac{69000}{100}} = 82.5$$

Pręt wyboczy się sprężysto, gdy $\lambda = \lambda_{gr}$.

$$\lambda = \lambda_{gr} \rightarrow \frac{4200}{d} = \lambda_{gr} \quad | \cdot \frac{d}{\lambda_{gr}}$$

$$\frac{4200}{\lambda_{gr}} = d \rightarrow d = \frac{4200}{82.5} = 50.9 \text{ mm}$$

Wyboczenie sprężyste nastąpi dla $d \leq d_{gr} = 50.9 \text{ mm}$.

PRZYKŁAD 12.4

Obliczyć dopuszczalną siłę dla pręta swobodnie podpartego (rys. 12.6) o kwadratowym przekroju poprzecznym $a \times a = 30 \times 30 \text{ mm}$.

Dane:

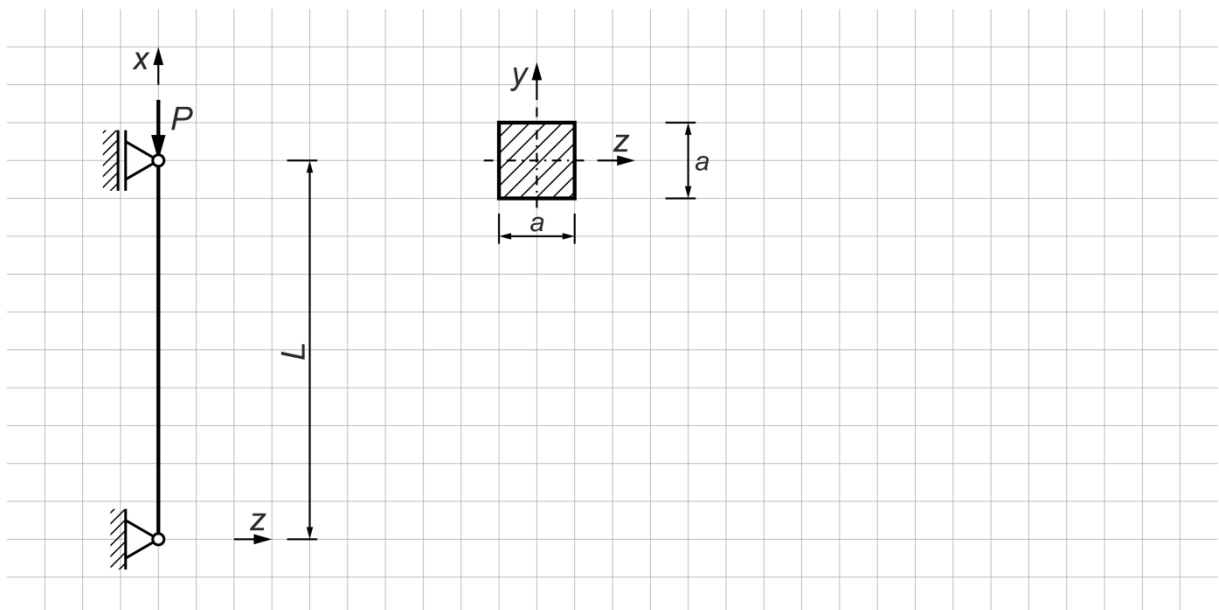
$$L = 600 \text{ mm}$$

$$R_e = 355 \text{ MPa}$$

$$R_H = 320 \text{ MPa}$$

$$E = 210 \text{ GPa}$$

$$n = 3$$



Rys. 12.6

ROZWIĄZANIE

Pole przekroju poprzecznego pręta

$$A = a^2 = 30^2 = 900 \text{ mm}^2$$

Moment bezwładności przekroju poprzecznego pręta

$$I = \frac{a^4}{12} = \frac{30^4}{12} = 67500 \text{ mm}^4$$

Smukłość pręta

$$L_w = L = 600 \text{ mm}$$

$$\lambda = L_w \sqrt{\frac{A}{I}} = 600 \sqrt{\frac{900}{67500}} = 69.3$$

Smukłość graniczna

$$\lambda_{gr} = \pi \sqrt{\frac{E}{R_H}} = \pi \sqrt{\frac{210000}{320}} = 80.5$$

Pręt wyboczy się niesprężysto, ponieważ $\lambda < \lambda_{gr}$.

Wartość siły krytycznej i dopuszczalnej na podstawie prostej Tetmajera

$$\sigma_{kr} = R_e \left[1 - \left(1 - \frac{R_H}{R_e} \right) \frac{\lambda}{\lambda_{gr}} \right] = 355 \cdot \left[1 - \left(1 - \frac{320}{355} \right) \frac{69.3}{80.5} \right] = 324.9 \text{ MPa}$$

$$P_{kr} = \sigma_{kr} \cdot A = 324.9 \cdot 900 = 292410 \text{ N}$$

$$P_{dop} = \frac{P_{kr}}{n} = \frac{292410}{3} = 97470 \text{ N}$$

Wartość siły krytycznej i dopuszczalnej na podstawie paraboli Johnsona-Ostenfelda

$$\lambda_o = \pi \sqrt{\frac{E}{0.5R_e}} = \pi \sqrt{\frac{210000}{0.5 \cdot 355}} = 108.1$$

$$\sigma_{kr} = R_e \left[1 - 0.5 \left(\frac{\lambda}{\lambda_o} \right)^2 \right] = 355 \cdot \left[1 - 0.5 \left(\frac{69.3}{108.1} \right)^2 \right] = 282.1 \text{ MPa}$$

$$P_{kr} = \sigma_{kr} \cdot A = 282.1 \cdot 900 = 253890 \text{ N}$$

$$P_{dop} = \frac{P_{kr}}{n} = \frac{253890}{3} = 84630 \text{ N}$$

Na podstawie paraboli Johnsona-Ostenfelda uzyskano mniejszą wartość siły dopuszczalnej.

PRZYKŁAD 12.5

Obliczyć średnicę pręta (rys. 12.7) na podstawie hiperboli Eulera lub prostej Tetmajera.

Dane:

$$P = 50 \text{ kN}$$

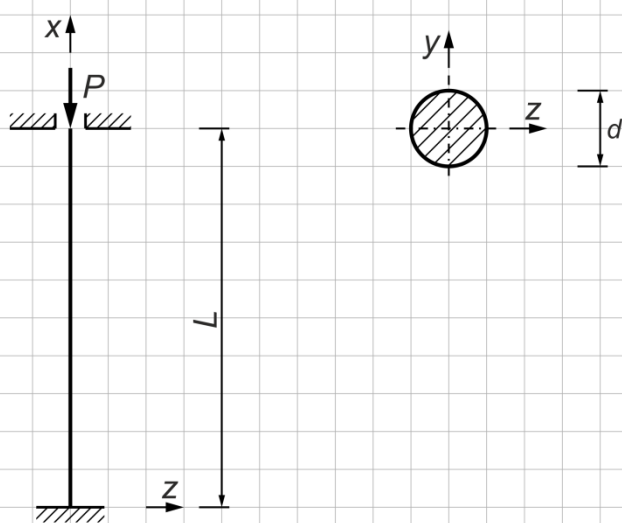
$$L = 2200 \text{ mm}$$

$$R_e = 235 \text{ MPa}$$

$$R_H = 200 \text{ MPa}$$

$$E = 210 \text{ GPa}$$

$$n = 5$$



Rys. 12.7

ROZWIĄZANIE

Pierwsze przybliżenie (hiperbola Eulera)

$$P_{kr} = n \cdot P$$

$$L_w = 0.5L = 0.5 \cdot 2200 = 1100 \text{ mm}$$

$$P_{kr} = \frac{\pi^2 EI}{L_w^2}$$

$$n \cdot P = \frac{\pi^2 EI}{L_w^2} = \frac{\pi^2 EI}{(0.5L)^2} = \frac{\pi^2 EI}{0.25L^2} \quad | \cdot \frac{0.25L^2}{\pi^2 E}$$

$$I = \frac{0.25L^2 \cdot n \cdot P}{\pi^2 E} = \frac{0.25 \cdot 2200^2 \cdot 5 \cdot 50000}{\pi^2 \cdot 210000} = 145950.8 \text{ mm}^4$$

$$I = \frac{\pi d^4}{64} \quad | \cdot \frac{64}{\pi} \rightarrow d^4 = \frac{64I}{\pi}$$

$$d = \sqrt[4]{\frac{64I}{\pi}} = \sqrt[4]{\frac{64 \cdot 145950.8}{\pi}} = 41.5 \text{ mm}$$

Pole przekroju poprzecznego pręta

$$A = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi \cdot 41.5^2}{4} = 1352.7 \text{ mm}^2$$

Smukłość pręta

$$\lambda = L_w \sqrt{\frac{A}{I}} = 1100 \sqrt{\frac{1352.7}{145950.8}} = 105.9$$

Smukłość graniczna

$$\lambda_{\text{gr}} = \pi \sqrt{\frac{E}{R_H}} = \pi \sqrt{\frac{210000}{200}} = 101.8$$

Pręt wyboczy się sprężysto, ponieważ $\lambda \geq \lambda_{\text{gr}}$. Obliczenia na podstawie hiperboli Eulera są poprawne. Przyjęto $d = 42 \text{ mm}$.

PRZYKŁAD 12.6

Obliczyć średnicę pręta (rys. 12.8) na podstawie hiperboli Eulera lub prostej Tetmajera.

Dane:

$$P = 50 \text{ kN}$$

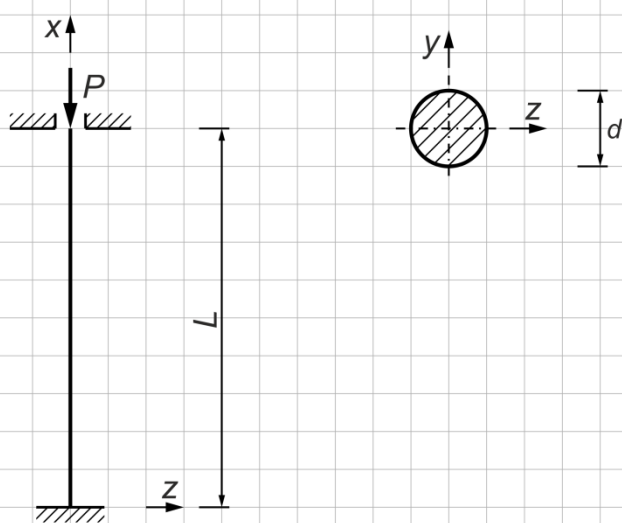
$$L = 1600 \text{ mm}$$

$$R_e = 235 \text{ MPa}$$

$$R_H = 200 \text{ MPa}$$

$$E = 210 \text{ GPa}$$

$$n = 5$$



Rys. 12.8

ROZWIĄZANIE

Pierwsze przybliżenie (hiperbola Eulera)

$$P_{kr} = n \cdot P$$

$$L_w = 0.5L = 0.5 \cdot 1600 = 800 \text{ mm}$$

$$P_{kr} = \frac{\pi^2 EI}{L_w^2}$$

$$n \cdot P = \frac{\pi^2 EI}{L_w^2} = \frac{\pi^2 EI}{(0.5L)^2} = \frac{\pi^2 EI}{0.25L^2} \quad | \cdot \frac{0.25L^2}{\pi^2 E}$$

$$I = \frac{0.25L^2 \cdot n \cdot P}{\pi^2 E} = \frac{0.25 \cdot 1600^2 \cdot 5 \cdot 50000}{\pi^2 \cdot 210000} = 77197.1 \text{ mm}^4$$

$$I = \frac{\pi d^4}{64} \quad | \cdot \frac{64}{\pi} \rightarrow d^4 = \frac{64I}{\pi}$$

$$d = \sqrt[4]{\frac{64I}{\pi}} = \sqrt[4]{\frac{64 \cdot 77197.1}{\pi}} = 35.4 \text{ mm}$$

Pole przekroju poprzecznego pręta

$$A = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi \cdot 35.4^2}{4} = 984.2 \text{ mm}^2$$

Smukłość pręta

$$\lambda = L_w \sqrt{\frac{A}{I}} = 800 \sqrt{\frac{984.2}{77197.1}} = 90.3$$

Smukłość graniczna

$$\lambda_{gr} = \pi \sqrt{\frac{E}{R_H}} = \pi \sqrt{\frac{210000}{200}} = 101.8$$

Pręt wyboczy się niesprężysto, ponieważ $\lambda < \lambda_{gr}$. Obliczenia na podstawie hiperboli Eulera są nietrafne.

Drugie przybliżenie (prosta Tetmajera)

$$\lambda = L_w \sqrt{\frac{A}{I}} = 0.5L \sqrt{\frac{\pi d^2}{4} \cdot \frac{64}{\pi d^4}} = 0.5L \sqrt{\frac{16}{d^2}} = 0.5L \cdot \frac{4}{d} = \frac{2L}{d} = \frac{2 \cdot 1600}{d} = \frac{3200}{d}$$

$$\sigma_{kr} = R_e \left[1 - \left(1 - \frac{R_H}{R_e} \right) \frac{\lambda}{\lambda_{gr}} \right] = 235 \cdot \left[1 - \left(1 - \frac{200}{235} \right) \frac{3200}{d \cdot 101.8} \right] = 235 \cdot \left[1 - \frac{4.68}{d} \right] = 235 - \frac{1099.8}{d}$$

$$P_{kr} = \sigma_{kr} \cdot A$$

$$P_{kr} = n \cdot P$$

$$\sigma_{kr} \cdot A = n \cdot P \rightarrow \left(235 - \frac{1099.8}{d} \right) \cdot \frac{\pi d^2}{4} = n \cdot P \rightarrow 184.6d^2 - 863.8d = 250000$$

$$184.6d^2 - 863.8d - 250000 = 0 \quad |:184.6 \rightarrow d^2 - 4.68d - 1354.28 = 0$$

$$\Delta = (-4.68)^2 - 4 \cdot (-1354.28) = 5439$$

$$\sqrt{\Delta} = 73.75$$

$$d = \frac{-(-4.68) - 73.75}{2 \cdot 1} = -34.5 \quad \text{lub} \quad d = \frac{-(-4.68) + 73.75}{2 \cdot 1} = 39.2$$

Należy przyjąć wartość dodatnią.

Sprawdzenie

$$\lambda = \frac{3200}{d} = \frac{3200}{39.2} = 81.6$$

Pręt wyboczy się niesprężysto, ponieważ $\lambda < \lambda_{gr}$.

LITERATURA

1. Klasztorny M.: *Wytrzymałość materiałów dla mechaników*. DWE, Wrocław 2013.
2. Niezgodziński M.E., Niezgodziński T.: *Zadania z wytrzymałości materiałów*, WNT, Warszawa 2000.
3. Lisowski A., Siemieniec A.: *Wytrzymałość materiałów. Przykłady obliczeń – zadania*. PWN, Warszawa-Kraków 1973.
4. Dyląg Z., Jakubowicz A., Orłoś Z.: *Wytrzymałość materiałów t. I i II*. WNT, Warszawa 2003.
5. Brzoska Z.: *Wytrzymałość materiałów*. PWN, Warszawa 1972.
6. Kurowski R., Niezgodziński M.E.: *Wytrzymałość materiałów*. PWN, Warszawa 1970.
7. Konarzewski Z.: *Mechanika i wytrzymałość materiałów*. WNT, Warszawa 1974.
8. Korewa W.: *Zbiór zadań z części maszyn*. PWN, Łódź-Warszawa-Kraków 1972.
9. Szurgott P.: *Wytrzymałość materiałów*.
http://www.piotr.szurgott.com/3caps/strength_of_materials.html, pobrano 15.10.2019.

Zbiór zadań dla studentów na kierunku Mechanika i Budowa Maszyn w Instytucie Technicznym Uczelni Państwowej im. Jana Grodka w Sanoku. Skrypt obejmuje zagadnienia podstawowe z wytrzymałości elementów konstrukcji, w formie podsumowania podstaw teoretycznych oraz zbioru zadań z rozwiązaniami.



ISBN 978-83-61802-43-3