

WYTRZYMAŁOŚĆ MATERIAŁÓW W ZADANIACH



JAN ZWOLAK

**WYTRZYMAŁOŚĆ MATERIAŁÓW
W ZADANIACH**

Recenzenci podręcznika:

prof. zw. dr hab. inż. Stanisław Wolny,
Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie

dr hab. inż. prof. PK Andrzej Sobczyk,
Politechnika Krakowska

Wydawca:

Uczelnia Państwowa im. Jana Grodka w Sanoku

ISBN 978-83-61802-45-7

Projekt okładki:

Łukasz Lubecki

Skład i łamanie:

Joanna Podgórska

Skład, druk i oprawa:

EXDRUK Spółka Cywilna
Wojciech Żuchowski, Adam Filipiak
ul. Rysia 6, 87-800 Włocławek
tel. 501-335-617, 507-832-458

SPIS TREŚCI

Przedmowa	7
Wykaz ważniejszych oznaczeń i symboli	9
1. Zagadnienia podstawowe przedmiotu	11
1.1. Przedmiot wytrzymałości materiałów. Uproszczony model ciała	11
1.2. Mechaniczne oddziaływanie ciał względem siebie	12
1.3. Wykres rozciągania	13
2. Momenty geometryczne figur płaskich	16
2.1. Moment statyczny i środek ciężkości	16
2.2. Moment bezwładności	18
2.3. Moment dewiacji lub moment odśrodkowy	19
2.4. Momenty bezwładności i moment dewiacji względem osi równoległych do osi centralnych	20
2.5. Moment bezwładności i moment dewiacji względem osi obróconych ...	21
2.6. Przykłady zadań z rozwiązaniami	23
3. Rozciąganie lub ściskanie prętów prostych	34
3.1. Założenia. Podstawowe zależności	34
3.2. Układy prętowe statycznie wyznaczalne i niewyznaczalne	35
3.3. Energia odkształcenia przy rozciąganiu	41
3.4. Stan napięcia i odkształcenia przy rozciąganiu	45
3.5. Przykłady zadań z rozwiązaniami	49
4. Ścinanie.....	63
4.1. Stan czystego ścinania i ścinania technicznego	63
4.2. Przykłady zadań z rozwiązaniami	70
5. Skręcanie prętów	80
5.1. Skręcanie prętów o przekroju kołowym	80
5.2. Skręcanie prętów o przekroju niekołowym	85
5.3. Skręcanie rur cienkościennych o dowolnym obrysie	89
5.4. Przykłady zadań z rozwiązaniami	90
6. Zginanie prętów prostych	105
6.1. Podział zagadnień przy zginaniu	105
6.2. Naprężenia normalne przy zginaniu prostym	106
6.3. Naprężenia przy zginaniu ukośnym	108
6.4. Linia ugięcia belki	109

6.5. Określanie znaków momentów zginających, sił poprzecznych i podłużnych	110
6.6. Siły zewnętrzne w prętach układów płaskich	111
6.7. Przykłady zadań z rozwiązaniami	114
7. Zagadnienia wybrane – metody energetyczne	131
7.1. Układy statycznie wyznaczalne, twierdzenie Castigliana	131
7.2. Układy statycznie niewyznaczalne, twierdzenie Menabre’a	133
7.3. Przykłady zadań z rozwiązaniami	133
8. Tablice	154
Literatura	179

PRZEDMOWA

Niniejszy podręcznik dostosowany jest do programu przedmiotu, wytrzymałość materiałów, realizowanego w Instytucie Technicznym Uczelni Państwowej im. Jana Grodka w Sanoku. Tematyka omówionych zagadnień teoretycznych, jak i rozwiązywanych zadań związana jest głównie z budową i eksploatacją maszyn oraz konstrukcji inżynierskich.

Każdy rozdział zawiera omówienie teoretyczne rozpatrywanych zagadnień, podstawowe wzory, metody postępowania oraz przykładowe zadania w całości rozwiązane i szczegółowo objaśnione.

Stopień trudności zadań dostosowany jest do wymagań obowiązujących na egzaminach z przedmiotu wytrzymałość materiałów na II roku studiów. W rozwiązywaniu zadań stosowane są klasyczne metody wykorzystywane w wytrzymałości materiałów.

Zawarte wątki teoretyczne, jak również przykładowe zadania w tym podręczniku, opierają się na literaturze przedmiotu zamieszczonej na ostatniej stronie opracowania.

Autor zdaje sobie sprawę z niedoskonałości podręcznika, jak i z jego niekompletności. Stąd też z wielką życzliwością przyjmie wszelkie uwagi krytyczne, jakie powstaną u czytelników. Nadesłane uwagi zostaną uwzględnione w następnym poprawionym i uzupełnionym wydaniu, co zapewne wpłynie na jego przydatność praktyczną podczas studiowania przedmiotu.

Autor

WYKAZ WAŻNIEJSZYCH OZNACZEŃ I SYMBOLI

A	– pole powierzchni
E	– moduł sprężystości podłużnej lub moduł Younga
$E \cdot A$	– sztywność pręta na rozciąganie lub ściskanie
F	– siła zewnętrzna
G	– moduł sprężystości poprzecznej lub moduł Kirchoffa
I_o	– biegunowy moment bezwładności
i_o	– biegunowy promień bezwładności
I_x, I_y	– osiowy moment bezwładności, odpowiednio względem osi x i y
i_x, i_y	– promień bezwładności, odpowiednio względem osi x i y
k_r	– dopuszczalne naprężenia na rozciąganie
k_t	– dopuszczalne naprężenia na ścinanie
M_g	– moment zginający
M_s	– moment skręcający
MPa	– megapaskal, jednostka naprężenia i ciśnienia
N	– niuton, jednostka siły
Nm	– niutonometr, jednostka momentu siły
Re	– granica plastyczności
R_m	– doraźna wytrzymałość materiału
S_x, S_y	– moment statyczny, odpowiednio względem osi x i y
x_c, y_c	– współrzędne środka ciężkości figury płaskiej
W_o	– wskaźnik wytrzymałości na skręcanie pręta o przekroju kołowym
W_x	– wskaźnik przekroju na zginanie pręta o przekroju kołowym
U	– energia potencjalna
ε	– odkształcenie
σ	– naprężenie normalne
ν	– liczba Poissona
τ	– naprężenie styczne
$q(x)$	– obciążenie ciągłe na długości x

1. ZAGADNIENIA PODSTAWOWE PRZEDMIOTU

1.1. PRZEDMIOT WYTRZYMAŁOŚCI MATERIAŁÓW. UPROSZCZONY MODEL CIAŁA

Wytrzymałość materiałów jest nauką stosowaną, opierającą się na prawach mechaniki ogólnej. Zajmuje się badaniem zjawisk zachodzących w ciałach rzeczywistych, odkształcalnych pod wpływem obciążeń zewnętrznych. Podstawą, na której opiera się wytrzymałość materiałów są z jednej strony badania doświadczalne, a z drugiej metody nauk pokrewnych. Do nauk tych należy teoria sprężystości, teoria plastyczności oraz reologia.

Zadaniem wytrzymałości materiałów jest podanie konstruktorowi podstawowych wiadomości, w których będzie zawarta odpowiedź na pytanie, czy projektowany obiekt techniczny lub element maszyny, spełnia wymagania wytrzymałościowe, a także uwzględnia przy tym aspekt ekonomiczny.

Wytrzymałość materiałów korzysta w dużym stopniu z wyników badań doświadczalnych, w których określone są właściwości mechaniczne materiałów i elementów konstrukcyjnych. Korzystając z metod mechaniki ogólnej, a przede wszystkim ze statyki, określa się obciążenie rozważanego obiektu, jak też jego elementów oraz formułuje się warunki równowagi. Rozpatrywane zagadnienia w wytrzymałości materiałów, warunki równowagi formułowane są przy założeniu, że analizowany obiekt jest ciałem sztywnym, nieodkształcalnym. Jest to pewne uproszczenie, dopuszczalne w przypadku małych odkształceń rozpatrywanego obiektu, które mieści się w tak zwanej zasadzie zeszywnienia. Według tej zasady przyjmuje się, że linie działania sił przyłożonych do ciała nieodkształconego nie zmieniają położenia w ciele odkształconym.

Cechy przedmiotu wytrzymałości materiałów, którymi są założenia i uproszczenia dotyczące opisu materiałów, jak i kształtu rozważanych obiektów czy elementów prowadzą do pojęcia modelu. Model w swojej istocie posiada pewne cechy wyidealizowane. Przyjmuje się więc, że materiał rozpatrywanego elementu w całej swojej objętości ma jednakowe właściwości fizyczne, czyli jest materiałem jednorodnym. Z przyjęcia takiego założenia wynika możliwość stosowania do opisu materiału pojęć z analizy matematycznej.

Materiały stosowane w technice mogą charakteryzować się różnymi właściwościami fizycznymi w zależności od kierunku, w którym właściwości te są określane. Materiały takie nazywane są anizotropowymi. Jeżeli natomiast właściwości materiału są jednakowe we wszystkich kierunkach, to materiał taki nazywany jest izotropowym.

Odształcenia materiałów mogą przyjmować charakter sprężysty, czyli odwracalny, bądź też plastyczny nieodwracalny. Charakter sprężysty odkształceń ma miejsce

wówczas, gdy następuje ich zanikanie po usunięciu przyczyny wywołującej to odkształcenie. Za odkształcenia o charakterze plastycznym uznawane są te, które pozostają w materiale pomimo usunięcia przyczyny powodującej ich powstanie. Typowym przykładem odkształcenia sprężystego mogą być sprężyny zaworów silników spalinowych lub hydraulicznych zaworów bezpieczeństwa. Na właściwości fizyczne materiału w dużym stopniu wpływa temperatura. Materiał sprężysty w temperaturze otoczenia staje się plastyczny pod wpływem ogrzania. Z kolei materiały oziębione tracą właściwości plastyczne i stają się kruche. W wytrzymałości materiałów istnieje wiele zagadnień, w których koniecznie należy uwzględnić wpływ czasu na odkształcenia. Zdecydowana większość materiałów wykazuje przyrost odkształcenia podczas działania stałego obciążenia.

Ze względu na kształt, w wytrzymałości materiałów wyróżnia się takie elementy, jak: pręty, powłoki i konstrukcje masywne. Do prętów zaliczane są elementy, których materia jest rozłożona wzdłuż pewnej linii, czyli jeden wymiar tych elementów jest znacznie większy od pozostałych. Wyróżnia się pręty proste i zakrzywione. W zależności od obciążenia mogą być rozciągane, zginane, skręcane. Powłoki to takie elementy, których materia jest rozłożona na pewnej powierzchni, charakteryzującej się tym, że dwa wymiary tych elementów są większe od trzeciego. Jeżeli ta powierzchnia jest płaszczyzną, to rozpatrywane elementy mogą być płytami lub tarczami, zależnie od obciążenia. Konstrukcją masywną nazywane są elementy, których wszystkie wymiary są tego samego rzędu. Jako przykłady można podać: kule, stożki, walce oraz inne nieforemne elementy o złożonych kształtach.

Podział elementów konstrukcyjnych na trzy grupy, umożliwia prowadzenie analizy wytrzymałościowej rzeczywistych obiektów przy ograniczonej liczbie schematów, niezależnie od przeznaczenia danego elementu. Na przykład, takim samym schematem można objąć wały maszyn przenoszące ruch obrotowy z silnika elektrycznego na zespół walcarek hutniczych, czy też wały w mobilnych maszynach roboczych.

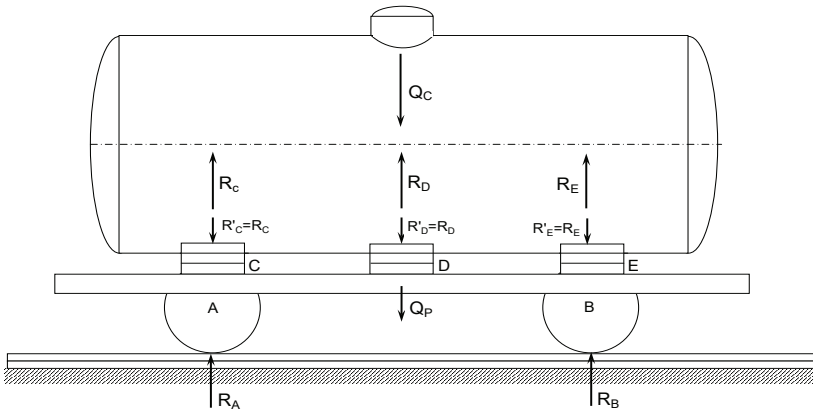
1.2. MECHANICZNE ODDZIAŁYWANIE CIAŁ WZGLĘDEM SIEBIE

Mechaniczne oddziaływanie ciał względem siebie charakteryzuje się tym, że ciała te są ze sobą w kontakcie. Kontakt ten może być skoncentrowany, co ma miejsce na przykład we współpracy koło jezdne – szyna, lub kontakt rozłożony w przypadku czopa wału w łożysku ślizgowym. Jak w jednym, tak i w drugim przypadku miarą mechanicznego oddziaływania ciał względem siebie są siły.

1.2.1. SIŁY ZEWNĘTRZNE

Rozpatrywanie dowolnego ciała odizolowanego od innych, wcześniej z nim połączonych, wymaga zastąpienia ich działania siłami na to ciało, które nazywane są siłami zewnętrznymi. Siły zewnętrzne dzieli się na objętościowe i powierzchniowe. Siły objętościowe działają na każdą cząstkę ciała, a siły powierzchniowe przyłożone są tylko na jego powierzchni. Jako przykład sił objętościowych można podać siły własnego ciężaru ciała. Przykładem sił powierzchniowych może być ciśnienie w obszarach styku ciała badanego z innymi ciałami. Do sił zewnętrznych działających na dane ciało zalicza się siły o znanej wartości, czyli siły czynne, a także reakcje więzów, będące siłami biernymi.

Niech będzie rozważony zbiornik wypełniony cieczą, ustawiony na platformie wagonowej, która stoi na torach kolejowych, jak to przedstawiono na rysunku 1.1.



Rys. 1.1. Przykład działania sił zewnętrznych obciążających konstrukcję cysterny

Do sił czynnych działających w konstrukcji cysterny należą: ciężar zbiornika z cieczą Q_C oraz ciężar podwozia Q_P . Siłami biernymi są reakcje R_A i R_B , które występują na powierzchniach styku kół A i B z szyną. Obciążeniem w tym przypadku cysterny, są siły czynne Q i Q_P , oraz siły bierne R_A i R_B .

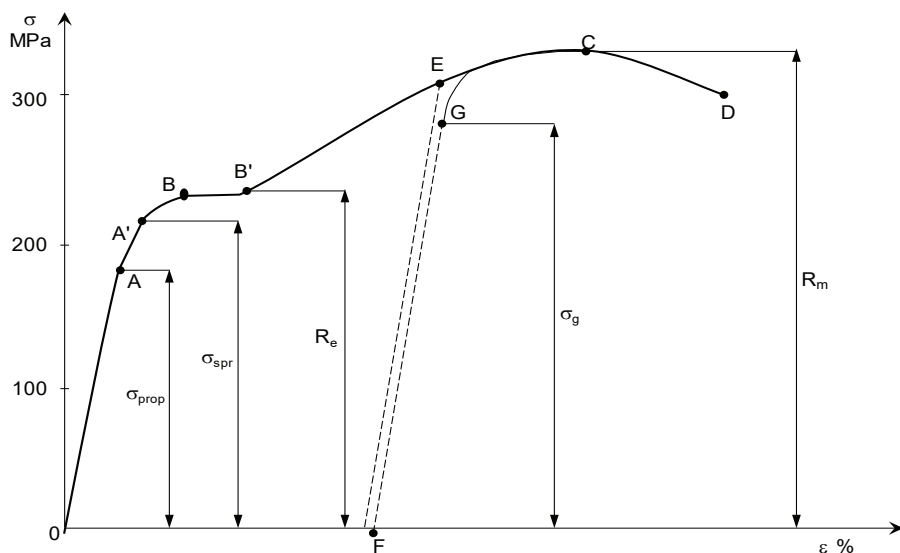
Łączny zespół sił czynnych Q_C i Q_P oraz sił biernych R_A i R_B nazywany jest obciążeniem konstrukcji cysterny. W dalszej analizie badanym obiektem niech będzie tylko sam zbiornik cysterny. Wówczas obciążeniem będzie tylko jedna siła czynna Q_C i reakcje: R_C , R_D i R_E podpór C , D , E zbiornika na platformie wagonu.

1.3. WYKRES ROZCIĄGANIA

Badania doświadczalne w zakresie rozciągania materiałów dowodzą, że prawo Hooke'a może być stosowane tylko do pewnej wartości naprężeń σ_{prop} , tak zwanej

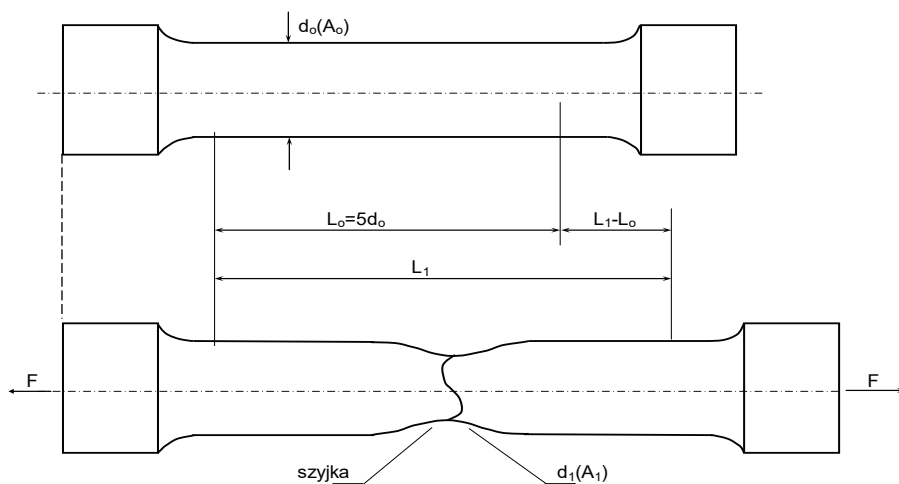
granicy proporcjonalności, która jest charakterystycznym parametrem dla danego materiału. Jeżeli naprężenia przekraczają σ_{prop} , to zależność $\sigma = f(\varepsilon)$ staje się nieliniowa.

Pełny zakres zależności $\sigma = f(\varepsilon)$ przedstawia się na wykresie rozciągania. Wykres taki dla stali niskowęglowej przedstawiono na rysunku 1.2.



Rys. 1.2. Wykres rozciągania stali niskowęglowej

Wykres rozciągania przedstawiony na rysunku 1.5 wykreślono na podstawie badań próbek pięciokrotnych (to znaczy, że $L_0 = 5d_0$) wykonanych ze stali niskowęglowej, przedstawionych na rysunku 1.3.



Rys. 1.3. Próbkki do badań na rozciąganie $L_0 = 5d_0$

Przebieg krzywej rozciągania rozpatruje się w układzie współrzędnych ε , σ (odkształcenie, naprężenie). Część krzywej rozciągania od punktu O do A odpowiada zakresowi proporcjonalności, to znaczy, że przyrost odkształcenia jest wprost proporcjonalny do naprężenia. Kolejnym punktem charakterystycznym wykresu jest punkt B , w którym odkształcenie rośnie pomimo braku wzrostu naprężeń σ . Punkt ten nazywany jest granicą plastyczności i oznaczany jest R_e . Zjawisko występowania wzrostu odkształcenia przy stałej wartości naprężenia nazywane jest płynięciem materiału. Ma to związek ze zmianami mikrostruktury materiału z powodu zachodzących mikropoślizgów w sieci krystalicznej podczas rozciągania, a nie znikających po odciążeniu i dających w wyniku wydłużenia trwałe.

W zakresie naprężeń, gdy σ nie przekracza σ_{prop} , mikropoślizgi występują bardzo rzadko. Jednak, gdy zachodzi wzrost naprężeń do R_e , to ich liczba gwałtownie rośnie. Gdy już pojawią się naprężenia trwałe, to proces ten stopniowo postępuje. Stąd też granicą sprężystości σ_{spr} (na krzywej rozciągania punkt A'), jest to taka wartość naprężenia, przy której nie ma jeszcze odkształceń trwałych, jest pojęciem umownym. Wartość naprężeń odpowiadająca σ_{spr} zależy od dokładności pomiaru i w tablicach wytrzymałościowych rzadko kiedy jest podawana.

Podczas rozciągania powstawanie mikropoślizgów w pewnym ich stanie zatrzymuje się. Na wykresie rozciągania jest to część krzywej od B' do C , w której występuje umocnienie materiału. Maksymalna wartość naprężenia w punkcie C nazywana jest doraźną wytrzymałością materiału i oznaczana symbolem R_m . Warto zaznaczyć, że na krzywej rozciągania od punktu O do punktu C , zachodzi równomierne wydłużenie próbki na jej całej długości. Tak samo jest z gęstością mikropoślizgów, nie zauważa się tu ich wyraźnej koncentracji. Po przekroczeniu punktu C następuje koncentracja mikropoślizgów w jednym miejscu próbki (połowa długości próbki), co sprzyja tworzeniu się lokalnego przewężenia, tak zwanej szyjki. W punkcie D następuje zerwanie próbki.

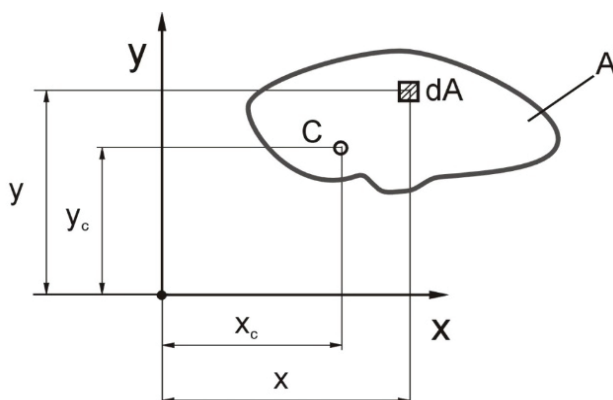
Podczas rozciągania próbki w przedziale $R_e - R_m$ zachodzi zjawisko podniesienia granicy sprężystości. Będzie tu przeprowadzona następująca analiza. Na maszynie wytrzymałościowej trwa proces obciążania próbki, w punkcie E ten proces zostaje przerwany, wówczas zachodzi odciążenie według linii EF równoległej do OA . Gdy nastąpi odkształcenie całkowite, wówczas $\sigma = 0$, a odkształcenie trwałe będzie równe OF . Jeżeli próbka zostanie powtórnie obciążona, to przebieg krzywej będzie po tej samej linii FE , prawie do punktu E . Następnie dalszy jej przebieg będzie po tej samej linii ECD , jak byłoby to rozciąganie bez przerywania i wznowianie obciążenia. Jeżeli powtórnie obciążenie nie będzie poprowadzone do punktu E , ale przerwane w punkcie G , to materiał próbki wróci ponownie do stanu F . Z tego wynika, że materiał w przedziale naprężeń od O do σ_G zachowuje się tak, jak materiał sprężysty.

2. MOMENTY GEOMETRYCZNE FIGUR PŁASKICH

2.1. MOMENT STATYCZNY I ŚRODEK CIĘŻKOŚCI

W obliczeniach wytrzymałościowych dotyczących głównie układów prętowych niezbędna jest znajomość wielkości geometrycznych charakteryzujących pole przekroju poprzecznego pręta. Wielkościami tymi są: momenty statyczne i momenty bezwładności.

Moment statyczny oznaczony literą S pola A figury płaskiej przedstawionej na rysunku 2.1 jest wyznaczany według wzoru (2.1).



Rys. 2.1. Moment statyczny względem osi x i y

$$S_x = \int_A y dA; \quad S_y = \int_A x dA \quad (2.1)$$

gdzie: S_x , S_y – momenty statyczne w $[\text{cm}^3, \text{m}^3]$ pola figury płaskiej odpowiednio względem osi x i y , A – pole powierzchni figury w $[\text{cm}^2, \text{m}^2]$, dA – obrany element pola z powierzchni całkowitej A , x i y – współrzędne obranego elementu dA . Wskaźnik A u dołu całki oznacza, że całkowanie należy wykonać po całym polu A rozpatrywanej figury płaskiej.

Środek ciężkości figury płaskiej o polu A w rozpatrywanym układzie współrzędnych x, y (rys. 2.1) jest to punkt, którego współrzędne spełniają równanie (2.2).

$$x_c = \frac{S_y}{A} = \frac{\int_A x dA}{A}; \quad y_c = \frac{S_x}{A} = \frac{\int_A y dA}{A} \quad (2.2)$$

gdzie: x_c, y_c – współrzędne środka ciężkości figury płaskiej o polu A .

Jeżeli przez środek ciężkości w punkcie C na rysunku 2.1 zostaną poprowadzone dwie proste, wzajemnie do siebie prostopadłe, to proste te będą nazywane osiami centralnymi. Na podstawie wzorów (2.2) można zapisać:

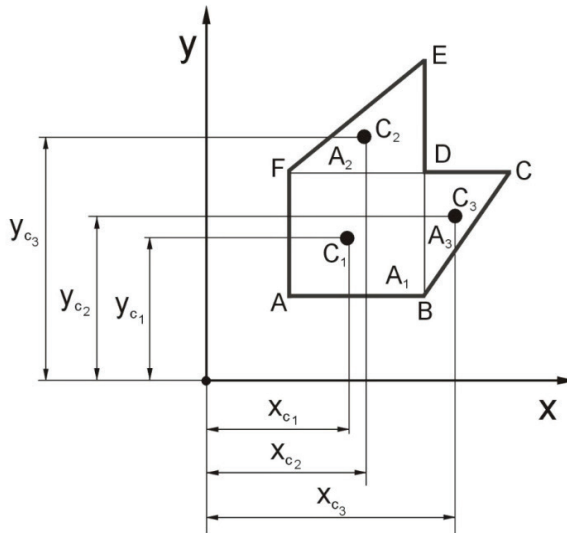
$$S_x = A \cdot y_c; \quad S_y = A \cdot x_c \quad (2.3)$$

Ze wzorów (2.3) wynika, że moment statyczny pola figury A względem prostej równa się iloczynowi pola A i odległości środka ciężkości tej figury od prostej.

W obliczeniach współrzędnych środka ciężkości figury płaskiej można korzystać z następujących twierdzeń:

- jeżeli figura płaska ma oś symetrii, to oś ta przechodzi przez środek ciężkości figury,
- jeżeli figura płaska ma środek symetrii, to równocześnie jest on środkiem ciężkości tej figury.

Jeżeli figura płaska o polu całkowitym A zostanie podzielona na n części, to moment statyczny całej figury względem danej osi jest równy sumie momentów statycznych poszczególnych n części figury względem tej osi. Przykład takiej figury składającej się z $n = 3$ części przedstawiono na rysunku 2.2.



Rys. 2.2. Moment statyczny figury płaskiej złożonej z $n = 3$ części

Figura płaska $ABCDEF$ podzielona na $n = 3$ części, z których każda ma pole powierzchni A_1, A_2, A_3 i odpowiednio współrzędne środka ciężkości: x_{c1}, x_{c2}, x_{c3} oraz y_{c1}, y_{c2}, y_{c3} , ma moment statyczny względem osi x i y obliczony według wzorów (2.4):

$$S_x = \sum_{i=1}^n A_i \cdot y_{c_i}; \quad S_y = \sum_{i=1}^n A_i \cdot x_{c_i} \quad (2.4)$$

gdzie: n w tym przypadku wynosi 3.

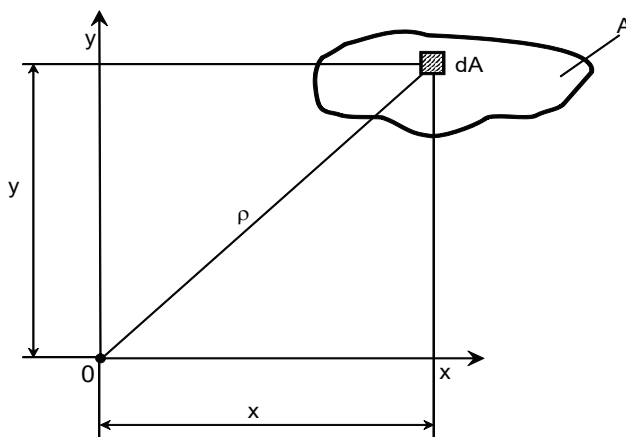
2.2. MOMENT BEZWŁADNOŚCI

Moment bezwładności, jest to wielkość charakteryzująca figurę płaską A ze względu na sposób rozłożenia jej obszarów wobec osi przyjętego układu współrzędnych, która jest wyznaczana za pomocą wzorów:

$$I_x = \int_A y^2 dA; \quad I_y = \int_A x^2 dA; \quad I_0 = \int_A \rho^2 dA \quad (2.5)$$

gdzie: I_x i I_y – osiowy moment bezwładności, odpowiednio względem osi x i y , I_0 – biegunowy moment bezwładności, obliczony według punktu O nazywanego biegunem, x , y – współrzędne elementarnego pola dA , $\rho^2 = x^2 + y^2$ – odległość elementarnego pola dA od początku układu współrzędnych.

Figurę płaską o dowolnym kształcie z wyodrębnionym elementarnym polem dA i jego współrzędnymi przedstawiono na rysunku 2.3.



Rys. 2.3. Moment bezwładności względem osi x , y i względem bieguna O

Korzystając z rysunku 2.3, przy uwzględnieniu, że $\rho^2 = x^2 + y^2$ biegunowy moment bezwładności można wyznaczyć jako sumę momentów osiowych:

$$I_0 = \int_A \rho^2 dA = \int_A (x^2 + y^2) dA = I_x + I_y \quad (2.6)$$

Momenty bezwładności I_x , I_y i I_0 zawsze są dodatnie, a ich wymiarem jest cm^4 lub m^4 .

W obliczeniach wytrzymałościowych dość często przydatne są promienie bezwładności i_x , i_y i i_0 , które wyznaczane są według wzorów (2.7):

$$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}}; \quad i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}; \quad i_0 = \sqrt{\frac{I_0}{A}} \quad (2.7)$$

Promieniem bezwładności i pola A figury płaskiej względem osi lub bieguna nazywana jest odległość, w której umieszczona całkowita powierzchnia A , daje moment bezwładności względem tej prostej lub tego bieguna równy momentowi samej figury.

Wzory (2.7) po przekształceniu ze względu na I_x , I_y i I_0 można zapisać w postaci:

$$I_x = i_x^2 \cdot A; \quad I_y = i_y^2 \cdot A; \quad I_0 = i_0^2 \cdot A \quad (2.8)$$

Podstawiając do wzoru (2.6) odpowiednie wyrażenia (2.8) uzyskuje się:

$$i_0^2 \cdot A = i_x^2 \cdot A + i_y^2 \cdot A \quad (2.9)$$

Po podzieleniu stronami przez A ostatecznie można napisać:

$$i_0^2 = i_x^2 + i_y^2 \quad (2.10)$$

Promienie bezwładności wyrażane są w jednostkach długości [cm, m].

2.3. MOMENT DEWIACJI LUB MOMENT ODŚRODKOWY

Moment dewiacji lub moment odśrodkowy D_{xy} pola A figury płaskiej względem osi x , y określany jest za pomocą wzoru (2.11), przy wykorzystaniu rysunku 2.3.

$$D_{xy} = \int_A xy dA \quad (2.11)$$

gdzie: D_{xy} – moment dewiacji lub moment odśrodkowy względem układu osi x i y ; x , y – współrzędne elementarnego pola dA .

Wymiarem momentu dewiacji lub momentu odśrodkowego jest [cm⁴, m⁴]. Moment ten może przyjmować wartości dodatnie, ujemne lub zero.

Osie układu, względem których wyznaczany moment dewiacji lub moment odśrodkowy jest równy zero, nazywane są głównymi osiami bezwładności. Momenty bezwładności względem tych osi nazywane są głównymi momentami bezwładności.

Jeżeli główne osie bezwładności przechodzą przez środek ciężkości figury płaskiej, to nazywamy je głównymi centralnymi osiami bezwładności.

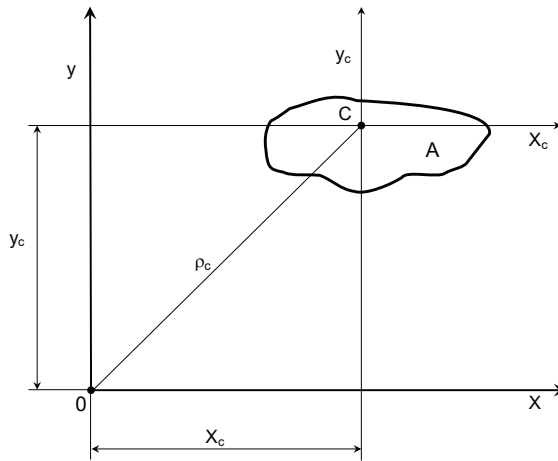
Jeżeli figura płaska zostanie podzielona na kilka części to obliczane momenty bezwładności lub moment dewiacji całej figury względem danych osi, będą równe odpowiednio sumie momentów bezwładności lub momentów dewiacji poszczególnych części figury względem tych osi. Korzystając z rysunku 2.2, podana definicja na moment bezwładności I_x , I_y oraz na moment dewiacji D_{xy} pola figury płaskiej $ABCDEF$ może być zapisana w formule matematycznej (2.12).

$$I_x = \sum_{i=1}^n I_{x_i}; \quad I_y = \sum_{i=1}^n I_{y_i}; \quad D_{xy} = \sum_{i=1}^n D_{x_i y_i} \quad (2.12)$$

gdzie: $n = 3$, liczba części na jaką podzielono całą figurę płaską.

2.4. MOMENTY BEZWŁADNOŚCI I MOMENT DEWIACJI WZGLĘDEM OSI RÓWNOLEGLYCH DO OSI CENTRALNYCH

Jeżeli osie x , y są odpowiednio równoległe do centralnych osi x_c i y_c pola figury płaskiej A , to pomiędzy momentami zachodzą zależności, które są określane wzorami Steinera. Zależności te zapisano za pomocą wzorów (2.13) przy wykorzystaniu rysunku 2.4.



Rys. 2.4. Dwa układy współrzędnych przesunięte względem siebie o x_c i y_c

$$\begin{aligned} I_x &= I_{x_c} + y_c^2 \cdot A; & I_y &= I_{y_c} + x_c^2 \cdot A; \\ I_0 &= I_c + \rho_c^2 \cdot A; & D_{xy} &= D_{x_c y_c} + x_c \cdot y_c \cdot A \end{aligned} \quad (2.13)$$

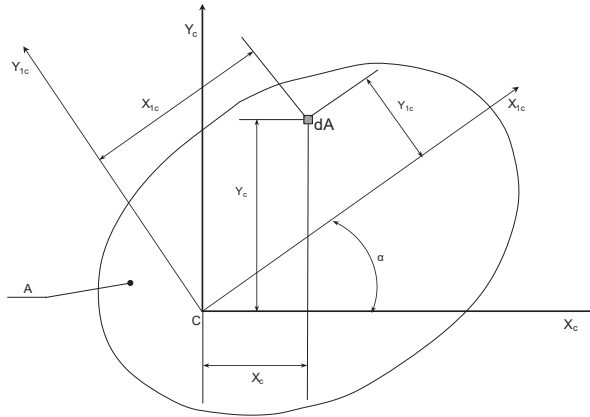
Zatem wypowiedzenie słowne twierdzenia Steinera brzmi:

Moment bezwładności figury płaskiej względem osi przesuniętej równoległe w stosunku do osi centralnej jest równy momentowi bezwładności względem osi centralnej powiększonemu o iloczyn kwadratu odległości między osiami i pola powierzchni figury płaskiej. Moment bezwładności względem osi centralnej jest najmniejszy w zbiorze momentów względem osi równoległych do niej.

Moment dewiacji lub moment odśrodkowy figury płaskiej względem osi przesuniętych równoległe w stosunku do osi centralnych jest równy momentowi dewiacji względem osi centralnych powiększonemu (lub pomniejszonemu) o iloczyn obydwu odległości między osiami i pola powierzchni figury płaskiej.

2.5. MOMENT BEZWŁADNOŚCI I MOMENT DEWIACJI WZGLĘDEM OSI OBRÓCONYCH

Rozpatrzono dowolną figurę płaską, której pole powierzchni wynosi A , wraz z układem osi centralnych x_c, y_c oraz układem obróconym x_{lc}, y_{lc} w stosunku do centralnego o kąt α . Figura ta przedstawiona jest na rysunku 2.5.



Rys. 2.5. Dwa układy współrzędnych obrócone względem siebie o kąt α

Współrzędne x_{lc} i y_{lc} elementarnego pola dA w układzie obróconym o kąt α względem początku układu x_c, y_c oblicza się według wzorów (2.14).

$$\begin{aligned}x_{lc} &= x_c \cdot \cos \alpha + y_c \cdot \sin \alpha \\y_{lc} &= y_c \cdot \cos \alpha - x_c \cdot \sin \alpha\end{aligned}\quad (2.14)$$

Momenty bezwładności w obróconym układzie współrzędnych x_{lc}, y_{lc} wyznacza się według wzorów:

Moment bezwładności $I_{x_{lc}}$:

$$\begin{aligned}I_{x_{lc}} &= \int_A y_{lc}^2 dA = \int_A (y_c \cdot \cos \alpha - x_c \cdot \sin \alpha)^2 dA \\I_{x_{lc}} &= \cos^2 \alpha \int_A y_c^2 dA + \sin^2 \alpha \int_A x_c^2 dA - 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha \int_A x_c y_c dA \\I_{x_{lc}} &= I_{x_c} \cdot \cos^2 \alpha + I_{y_c} \cdot \sin^2 \alpha - 2D_{x_c y_c} \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha\end{aligned}\quad (2.15)$$

Moment bezwładności $I_{y_{lc}}$:

$$\begin{aligned}I_{y_{lc}} &= \int_A x_{lc}^2 dA = \int_A (x_c \cdot \cos \alpha + y_c \cdot \sin \alpha)^2 dA \\I_{y_{lc}} &= \cos^2 \alpha \int_A x_c^2 dA + \sin^2 \alpha \int_A y_c^2 dA + 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha \int_A x_c y_c dA \\I_{y_{lc}} &= I_{x_c} \cdot \sin^2 \alpha + I_{y_c} \cdot \cos^2 \alpha + 2D_{x_c y_c} \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha\end{aligned}\quad (2.16)$$

Moment dewiacji $D_{x_{Ic}y_{Ic}}$:

$$D_{x_{Ic}y_{Ic}} = \int_A (x_c \cdot \cos\alpha + y_c \cdot \sin\alpha) \cdot (y_c \cdot \cos\alpha - x_c \cdot \sin\alpha) dA$$

$$D_{x_{Ic}y_{Ic}} = \int_A (x_c \cdot y_c \cdot \cos^2\alpha - x_c^2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha + y_c^2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha - y_c \cdot x_c \cdot \sin^2\alpha) dA$$

$$D_{x_{Ic}y_{Ic}} = \cos^2\alpha \int_A x_c y_c dA - \sin\alpha \cdot \cos\alpha \int_A x_c^2 dA + \sin\alpha \cdot \cos\alpha \int_A y_c^2 dA - \sin^2\alpha \int_A x_c y_c dA$$

$$D_{x_{Ic}y_{Ic}} = D_{x_c y_c} \cos^2\alpha - I_{y_c} \cdot \sin\alpha \cos\alpha + I_{x_c} \cdot \sin\alpha \cos\alpha - D_{x_c y_c} \sin^2\alpha$$

$$D_{x_{Ic}y_{Ic}} = (I_{x_c} - I_{y_c}) \sin\alpha \cdot \cos\alpha + D_{x_c y_c} (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) \tag{2.17}$$

Po uwzględnieniu znanych zależności trygonometrycznych:

$$2 \sin\alpha \cos\alpha = \sin 2\alpha \quad \text{oraz} \quad \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos 2\alpha$$

Wzory (2.15), (2.16), (2.17) przyjmują postać:

$$I_{x_{Ic}} = I_{x_c} \cdot \cos^2\alpha + I_{y_c} \cdot \sin^2\alpha - D_{x_c y_c} \cdot \sin 2\alpha \tag{2.18}$$

$$I_{y_{Ic}} = I_{x_c} \cdot \sin^2\alpha + I_{y_c} \cdot \cos^2\alpha + D_{x_c y_c} \cdot \sin 2\alpha \tag{2.19}$$

$$D_{x_{Ic}y_{Ic}} = \frac{1}{2} (I_{x_c} - I_{y_c}) \sin 2\alpha + D_{x_c y_c} \cos 2\alpha \tag{2.20}$$

Należy teraz określić takie położenie osi x_{Ic} , y_{Ic} układu współrzędnych, względem którego moment dewiacji $D_{x_{Ic}y_{Ic}} = 0$. Osie takie nazywa się głównymi centralnymi osiami bezwładności pola przekroju i oznaczają się x_{Ic}^1 , y_{Ic}^2 . Odpowiednio momenty bezwładności obliczane według tych osi I_1 oraz I_2 przyjmują wartości ekstremalne ($I_1 = \max$, $I_2 = \min$) nazywane są głównymi centralnymi momentami bezwładności.

Kąt $\alpha = \alpha_0$ określający położenie osi głównych wyznacza się z zależności (2.20), wykonując odpowiednie działania:

$$\frac{1}{2} (I_{x_c} - I_{y_c}) \sin 2\alpha_0 + D_{x_c y_c} \cos 2\alpha_0 = 0 \tag{2.21}$$

$$\frac{1}{2} (I_{x_c} - I_{y_c}) \sin 2\alpha_0 = -D_{x_c y_c} \cos 2\alpha_0$$

$$\frac{1}{2} (I_{x_c} - I_{y_c}) \operatorname{tg} \alpha_0 = -D_{x_c y_c}$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{-2D_{x_c y_c}}{I_{x_c} - I_{y_c}} \tag{2.22}$$

Kąt $\alpha = \alpha_0$ jest kątem zawartym pomiędzy osią x a osią główną układu współrzędnych. Jeżeli obliczona wartość kąta α_0 przyjmuje znak dodatni, to miarę tego kąta odkłada się od osi x w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara. Natomiast przy ujemnej wartości kąta α_0 , odłożenie jego miary jest zgodne z ruchem wskazówek zegara.

Wartość głównych centralnych momentów bezwładności oblicza się, podstawiając do wzorów (2.18), (2.19), (2.20) wartość kąta $\alpha = \alpha_0$, określaną zależnością (2.22). Po przekształceniach i uwzględnieniu zależności trygonometrycznych otrzymuje się:

$$I_{x_1c} = I_1 = I_{\max} = \frac{1}{2}(I_{x_c} + I_{y_c}) + \frac{1}{2}\sqrt{(I_{x_c} - I_{y_c})^2 + 4D_{x_1cy_1c}^2} \quad (2.23)$$

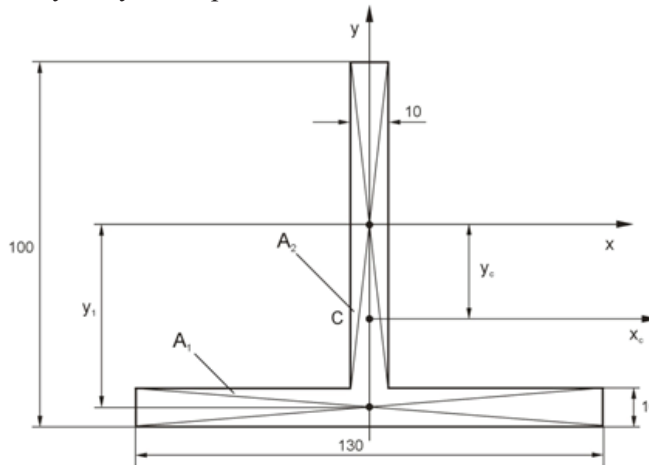
$$I_{x_2c} = I_2 = I_{\min} = \frac{1}{2}(I_{x_c} + I_{y_c}) - \frac{1}{2}\sqrt{(I_{x_c} - I_{y_c})^2 + 4D_{x_1cy_1c}^2} \quad (2.24)$$

Wyznaczanie osi głównych centralnych, jak również momentów względem tych osi znacznie się upraszcza w przypadku tych figur, które mają osie symetrii. Każda oś symetrii jest równocześnie osią główną centralną. Jako przykład figur płaskich o osiach symetrii można wymienić: kwadrat, trójkąt równoboczny, koło.

2.6. PRZYKŁADY ZADAŃ Z ROZWIĄZANAMI

Przykład 2.1.

Wyznaczyć położenie środka ciężkości pola figury płaskiej przedstawionej na rysunku 2.6. Wymiary na rysunku podano w milimetrach.



Rys. 2.6. Figura płaska w postaci teownika

Rozwiązanie:

Środek ciężkości leży na osi y , ponieważ jest to oś symetrii pola figury płaskiej. Pole powierzchni figury A_1 i A_2 na podstawie wymiarów podanych na rysunku wynosi:

$$A_1 = 13 \times 1 = 13 \text{ cm}^2$$

$$A_2 = 9 \times 1 = 9 \text{ cm}^2$$

Przyjmując układ współrzędnych x, y , którego oś pokrywa się z osią symetrii, a oś x przechodzi przez środek ciężkości figury A_2 , odpowiednie współrzędne figury A_1 i A_2 wynoszą:

$$x_1 = 0, \quad y_1 = -5 \text{ cm}$$

$$x_2 = 0, \quad y_2 = 0$$

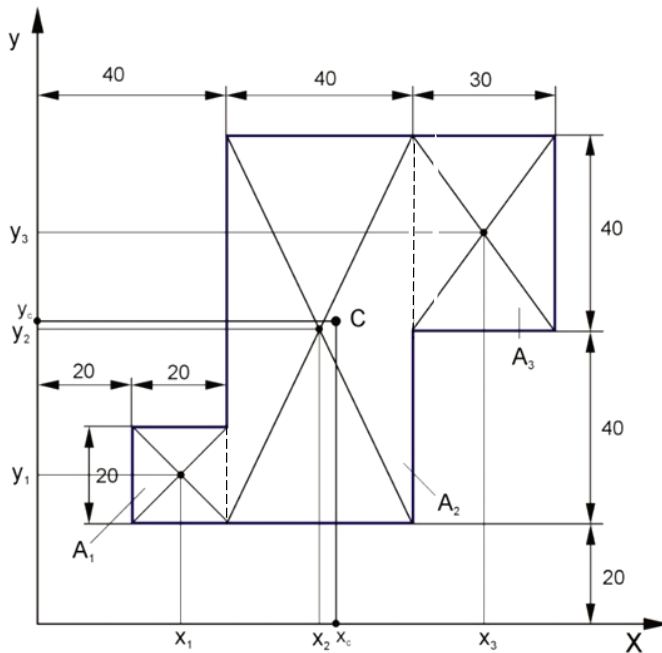
Współrzędne środka ciężkości całej figury względem osi x, y wynoszą:

$$x_c = \frac{A_1 \cdot x_1 + A_2 \cdot x_2}{A_1 + A_2} = \frac{13 \cdot 0 + 9 \cdot 0}{13 + 9} = 0$$

$$y_c = \frac{A_1 \cdot y_1 + A_2 \cdot y_2}{A_1 + A_2} = \frac{13 \cdot (-5) + 9 \cdot 0}{13 + 9} = \frac{-65}{22} = -2,95 \text{ cm}$$

Przykład 2.2.

Wyznaczyć położenie środka ciężkości figury płaskiej składającej się z trzech części, przedstawionej na rysunku 2.7. Wymiary na rysunku podano w milimetrach.



Rys. 2.7. Figura płaska złożona z trzech części

Rozwiązanie:

Pole całkowite figury płaskiej podzielono na $n=3$ części: A_1, A_2, A_3 . Środek ciężkości pola całkowitego figury płaskiej wyznacza się według wzorów, jak niżej:

$$x_c = \frac{S_y}{A} = \frac{\sum_{i=1}^n A_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^n A_i}; \quad y_c = \frac{S_x}{A} = \frac{\sum_{i=1}^n A_i \cdot y_i}{\sum_{i=1}^n A_i}$$

Pole powierzchni poszczególnych figur: A_1, A_2, A_3 wynosi:

$$A_1 = 2 \cdot 2 = 4 \text{ cm}^2$$

$$A_2 = 8 \cdot 4 = 32 \text{ cm}^2$$

$$A_3 = 4 \cdot 3 = 12 \text{ cm}^2$$

Współrzędne środków ciężkości figur: A_1, A_2, A_3 wynoszą:

$$x_1 = 3 \text{ cm}, \quad y_1 = 3 \text{ cm}$$

$$x_2 = 6 \text{ cm}, \quad y_2 = 6 \text{ cm}$$

$$x_3 = 9,5 \text{ cm}, \quad y_3 = 8 \text{ cm}$$

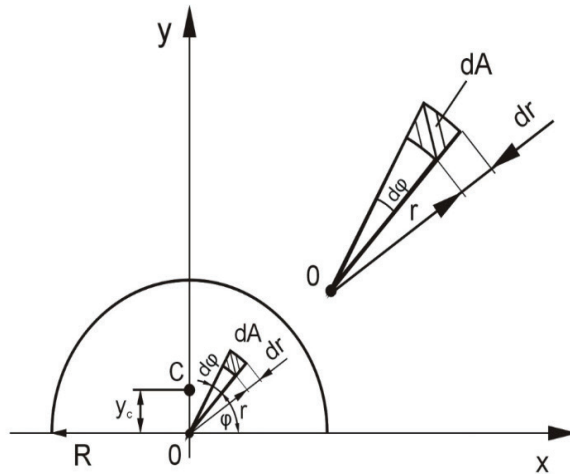
Współrzędne środka ciężkości całej figury wynoszą:

$$x_c = \frac{A_1 \cdot x_1 + A_2 \cdot x_2 + A_3 \cdot x_3}{A_1 + A_2 + A_3} = \frac{4 \cdot 3 + 32 \cdot 6 + 12 \cdot 9,5}{48} = \frac{318}{48} = 6,625 \text{ cm}$$

$$y_c = \frac{A_1 \cdot y_1 + A_2 \cdot y_2 + A_3 \cdot y_3}{A_1 + A_2 + A_3} = \frac{4 \cdot 3 + 32 \cdot 6 + 12 \cdot 8}{48} = \frac{318}{48} = 6,25 \text{ cm}$$

Przykład 2.3.

Wyznaczyć środek ciężkości półkole o promieniu R względem osi x, y , przedstawionego na rysunku 2.8.



Rys. 2.8. Półkole o promieniu R

Rozwiązanie

Współrzędne środka ciężkości względem osi x, y wyznacza się według wzorów:

$$x_c = \frac{S_y}{A}; \quad y_c = \frac{S_x}{A}; \quad \text{gdzie} \quad A = \frac{1}{2} \pi R^2$$

Moment statyczny półkola względem osi x oblicza się według wzoru:

$$S_x = \int_A y dA$$

gdzie elementarne pole $dA = r d\varphi dr$, współrzędna $y = r \cdot \sin\varphi$.

Zatem wyrażenie na moment statyczny S_x po wcześniejszym określeniu obszaru całkowania zapisano wzorem:

$$0 \leq \varphi \leq \pi$$

$$0 \leq r \leq R$$

$$S_x = \int_A r \cdot \sin\varphi \cdot r d\varphi dr = \int_0^\pi \sin\varphi \cdot \int_0^R r^2 dr = -\cos\varphi \Big|_0^\pi \cdot \frac{r^3}{3} \Big|_0^R$$

$$S_x = (-\cos\pi) - (-\cos 0) \cdot \left[\frac{R^3}{3} - \frac{0^3}{3} \right] = (1+1) \cdot \frac{R^3}{3} = \frac{2}{3} R^3$$

Moment statyczny półkola względem osi y przy wyrażeniu współrzędnej $x = r \cdot \cos\varphi$ wynosi:

$$S_y = \int_A x dA = \int_A r \cdot \cos\varphi \cdot r d\varphi dr = \int_0^\pi \cos\varphi d\varphi \cdot \int_0^R r^2 dr$$

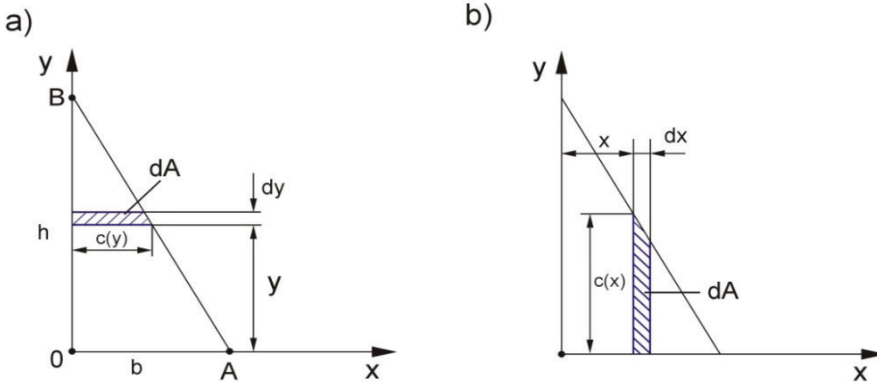
$$S_y = \sin\varphi \Big|_0^\pi \cdot \frac{r^3}{3} \Big|_0^R = 0 - 0 \cdot \left(\frac{R^3}{3} - 0 \right) = 0$$

Zatem obliczone współrzędne x_c, y_c wynoszą:

$$x_c = \frac{S_y}{A} = \frac{0}{\frac{1}{2}\pi R^2} = 0; \quad y_c = \frac{S_x}{A} = \frac{\frac{2}{3}R^3}{\frac{1}{2}\pi R^2} = \frac{4R}{3\pi}$$

Przykład 2.4.

Wyznaczyć środek ciężkości trójkąta prostokątnego przedstawionego na rysunku 2.9, mającego podstawę $OA = b$ i wysokość $OB = h$.



Rys. 2.9. Trójkąt prostokątny jako pole figury płaskiej

Rozwiązanie

Na podstawie podobieństwa trójkątów (rys. 2.9 a) długość paska elementarnego pola dA wynosi:

$$c(y) = \frac{b(h-y)}{h};$$

zaś pole elementarne

$$dA = \frac{b(h-y)}{h} dy.$$

Pole całkowite trójkąta wynosi:

$$A = \frac{1}{2}bh$$

Zatem wyrażenie na moment statyczny trójkąta względem osi x zapisano wzorem:

$$\begin{aligned} S_x &= \int_A y dA = \int_0^h y \cdot \frac{b(h-y)}{h} dy = \frac{b}{h} \int_0^h y(h-y) dy = \frac{b}{h} \int_0^h (y \cdot h - y^2) dy = \\ &= \frac{b}{h} \left[\frac{y^2}{2} \cdot h - \frac{y^3}{3} \right]_0^h = \frac{b}{h} \left[\frac{h^3}{2} - \frac{h^3}{3} \right] \\ S_x &= \frac{bh^2}{6} \end{aligned}$$

W dalszej kolejności do obliczenia pozostaje moment statyczny trójkąta względem osi y . Na podstawie podobieństwa trójkątów (rys. 2.9 b) długość paska elementarnego pola dA wynosi:

$$C_{(x)} = \frac{h(b-x)}{b}$$

zaś jego pole elementarne

$$dA = \frac{h(b-x)}{b} dx$$

Wyrażenie na moment statyczny trójkąta względem osi y zapisano wzorem:

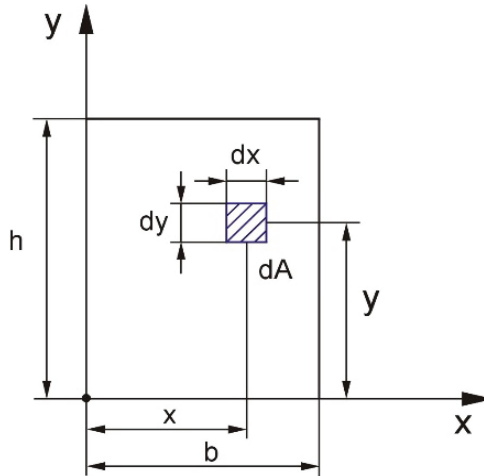
$$\begin{aligned} S_y &= \int_A x da = \int_0^b x \cdot \frac{h(b-x)}{b} dx = \frac{h}{b} \int_0^b x(b-x) dx = \frac{h}{b} \left[\int_0^b (x \cdot b - x^2) dx \right] \\ S_y &= \frac{h}{b} \left[\frac{x^2}{2} \cdot b - \frac{x^3}{3} \right]_0^b = \frac{h}{b} \left(\frac{b^3}{2} - \frac{b^3}{3} \right) = \frac{h}{b} \left(\frac{3b^3 - 2b^3}{6} \right) \\ S_y &= \frac{b^2h}{6} \end{aligned}$$

Ostatecznie wyznaczone współrzędne x_c i y_c środka ciężkości trójkąta wynoszą:

$$x_x = \frac{S_y}{A} = \frac{\frac{b^2h}{6}}{\frac{bh}{2}} = \frac{2b^2h}{6hb} = \frac{1}{3}b; \quad x_c = \frac{S_x}{A} = \frac{\frac{bh^2}{6}}{\frac{bh}{2}} = \frac{2bh^2}{6hb} = \frac{1}{3}h$$

Przykład 2.5.

Wyznacz moment bezwładności względem osi x i y przechodzących przez boki prostokąta, jak przedstawiono na rysunku 2.10.



Rys. 2.10. Prostokąt z przylegającymi bokami b i h do osi x i y

Rozwiązanie

Pole elementarne $dA = dx dy$

Zatem moment bezwładności względem osi x można zapisać:

$$I_x = \int_A y^2 dA = \int_0^h \int_0^b y^2 dx dy = \int_0^h y^2 \cdot x \Big|_0^b dy = \int_0^h y^2 \cdot b dy$$

$$I_x = \frac{bh^3}{3}$$

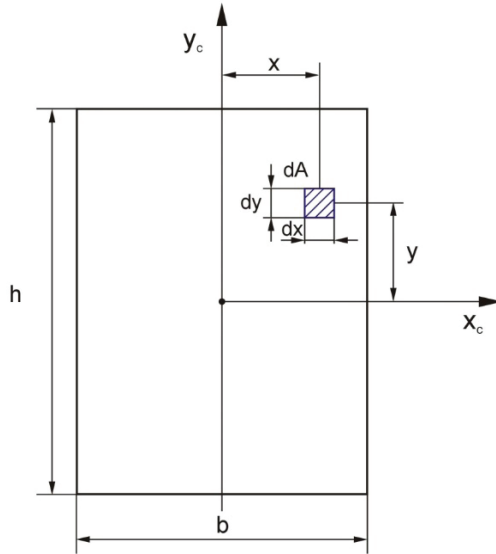
Podobnie można obliczyć moment bezwładności względem osi y :

$$I_y = \int_A x^2 dA = \int_0^b \int_0^h x^2 dy dx = \int_0^b x^2 \cdot y \Big|_0^h dx = \int_0^b x^2 \cdot h dx$$

$$I_y = \frac{hb^3}{3}$$

Przykład 2.6.

Wyznacz moment bezwładności względem osi centralnych x_c i y_c , prostokąta przedstawionego na rysunku 2.11.



Rys. 2.11. Prostokąt z osiami przechodzącymi przez środek ciężkości

Rozwiązanie

Pole elementarne prostokąta $dA = dxdy$ Moment bezwładności względem osi x_c wynosi:

$$I_{x_c} = \int_A y^2 dA = \int_{-\frac{1}{2}b}^{\frac{1}{2}b} \int_{-\frac{1}{2}h}^{\frac{1}{2}h} y^2 dxdy = \int_{-\frac{1}{2}h}^{\frac{1}{2}h} y^2 \cdot x \Big|_{-\frac{1}{2}b}^{\frac{1}{2}b} dy = \int_{-\frac{1}{2}h}^{\frac{1}{2}h} y^2 \cdot b dy$$

$$I_{x_c} = b \int_{-\frac{1}{2}h}^{\frac{1}{2}h} y^2 dy = b \cdot \frac{y^3}{3} \Big|_{-\frac{1}{2}h}^{\frac{1}{2}h} = b \cdot \frac{h^3}{8} + \frac{h^3}{8} = \frac{b \cdot 2h^3}{24} = \frac{bh^3}{12}$$

Postępując podobnie, wyznaczyć można moment bezwładności względem osi y_c :

$$I_{y_c} = \int_A x^2 dA = \int_{-\frac{1}{2}h}^{\frac{1}{2}h} \int_{-\frac{1}{2}b}^{\frac{1}{2}b} x^2 dxdy = \int_{-\frac{1}{2}b}^{\frac{1}{2}b} x^2 \cdot y \Big|_{-\frac{1}{2}h}^{\frac{1}{2}h} dx = \int_{-\frac{1}{2}b}^{\frac{1}{2}b} x^2 \cdot h dx$$

$$I_{y_c} = h \int_{-\frac{1}{2}b}^{\frac{1}{2}b} x^2 dx = h \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_{-\frac{1}{2}b}^{\frac{1}{2}b} = h \cdot \frac{b^3}{8} + \frac{b^3}{8} = \frac{h \cdot 2b^3}{24} = \frac{hb^3}{12}$$

Przykład 2.7.

Korzystając z rysunku 2.11 oraz z przykładu 2.5. wyznacz moment bezwładności względem osi centralnych x_c i y_c , przy stosowaniu twierdzenia Steinera.

W przykładzie 2.5 wyznaczono momenty bezwładności względem osi x i y . Wyrażenia tych momentów zapisane poniżej:

$$I_x = \frac{bh^3}{3}; \quad I_y = \frac{hb^3}{3}$$

posłużą do wyznaczenia momentów bezwładności I_{x_c} i I_{y_c} stosując twierdzenie Steinera.

Na podstawie twierdzenia Steinera zapisano:

$$I_{x_c} = I_x - A \left(\frac{h}{2} \right)^2 = \frac{bh^3}{3} - b \cdot h \cdot \frac{h^2}{4} = \frac{bh^3}{3} - \frac{bh^3}{4} = \frac{bh^3}{12}$$

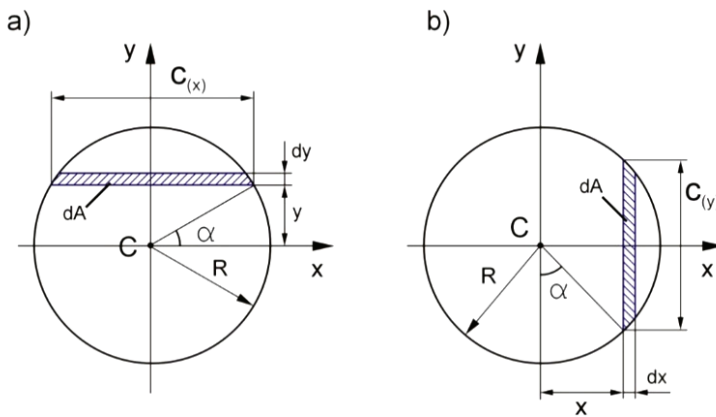
$$I_{y_c} = I_y - A \left(\frac{b}{2} \right)^2 = \frac{hb^3}{3} - b \cdot h \cdot \frac{b^2}{4} = \frac{hb^3}{3} - \frac{hb^3}{4} = \frac{hb^3}{12}$$

gdzie: I_x, I_y – wyniki z przykładu 2.5, A – pole powierzchni prostokąta o bokach a, b .

Jednakowe wyniki końcowe dowodzą, że typ zadań z przykładu 2.6, może być także rozwiązany za pomocą metody twierdzenia Steinera zastosowanej w przykładzie 2.7.

Przykład 2.8.

Wyznacz moment bezwładności względem osi x i y przechodzących przez punkt C , przekroju kołowego przedstawionego na rysunku 2.12.



Rys. 2.12. Przekrój kołowy z osiami przechodzącymi przez środek ciężkości

Rozwiązanie

Na podstawie rysunku 2.12 a) można napisać zależność na długość paska elementarnego $C_{(x)}$:

$$\frac{1}{2} C_{(x)} = \sqrt{R^2 - y^2}, \quad \text{więc} \quad C_{(x)} = 2\sqrt{R^2 - y^2}$$

Natomiast na podstawie rysunku 2.12 b) zależność na długość paska elementarnego $C_{(y)}$:

$$\frac{1}{2}C_{(y)} = \sqrt{R^2 - x^2}, \text{ więc } C_{(y)} = 2\sqrt{R^2 - x^2}$$

W przypadku rysunku 2.12 a) elementarne pole dA wynosi:

$$dA = C_{(y)} \cdot dy = 2\sqrt{R^2 - y^2} dy$$

Natomiast elementarne pole dA według rysunku 2.12 b) wynosi:

$$dA = C_{(y)} \cdot dx = 2\sqrt{R^2 - x^2} dx$$

W dalszej kolejności zapisano wyrażenia na moment bezwładności względem osi x i y :

$$I_x = \int_A y^2 dA = \int_{-R}^R y^2 \cdot 2\sqrt{R^2 - y^2} dy$$

$$I_y = \int_A x^2 dA = \int_{-R}^R x^2 \cdot 2\sqrt{R^2 - x^2} dx$$

Z ostatniego zapisu wynika, że momenty bezwładności I_x i I_y są sobie równe, gdyż określone są jednakowymi zależnościami.

Łatwiejsze będzie wykonanie obliczeń momentu bezwładności, jeżeli zamiast zmiennych x i y , zostanie przyjęta zmienna w postaci α .

W takim przypadku dokonany zapis przyjmuje postać:

$$y = R \cdot \sin \alpha, \quad dy = R \cos \alpha \cdot d\alpha$$

$$C_{(x)} = 2\sqrt{R^2 - (R \cdot \sin \alpha)^2} = 2\sqrt{R^2 - R^2 \cdot \sin^2 \alpha} = 2\sqrt{R^2(1 - \sin^2 \alpha)}$$

$$C_{(x)} = 2R \cos \alpha$$

Zapis na elementarne pole dA ma postać:

$$dA = C_{(x)} \cdot dy = 2R \cdot \cos \alpha \cdot R \cos \alpha d\alpha = 2R^2 \cos^2 \alpha d\alpha$$

Wyrażenie na moment bezwładności względem osi x po przyjęciu granic całkowania $\alpha_d = -\frac{\pi}{2}$ do $\alpha_g = \frac{\pi}{2}$ przyjmie postać:

$$I_x = \int_A y^2 dA = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (R \cdot \sin \alpha)^2 \cdot 2R^2 \cos^2 \alpha d\alpha = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2R^4 \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha d\alpha$$

$$I_x = 2R^4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha d\alpha = 2R^4 \left[-\frac{1}{4} \sin \alpha \cdot \cos^3 \alpha + \frac{1}{8} \sin \alpha \cos \alpha + \frac{1}{8} \alpha \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$I_x = 2R^4 \left[\left(-\frac{1}{4} \cdot 1 \cdot 0 + \frac{1}{8} \cdot 1 \cdot 0 + \frac{1}{8} \cdot \frac{\pi}{2} \right) - \left(\frac{1}{4} \cdot 1 \cdot 0 - \frac{1}{8} \cdot \frac{\pi}{2} \right) \right]$$

$$I_x = 2R^4 \left(\frac{\pi}{16} + \frac{\pi}{16} \right) = 2R^4 \cdot \frac{2\pi}{16} = \frac{\pi R^4}{4}$$

Jeżeli przyjęte zostanie założenie, że:

$$R = \frac{d}{2}$$

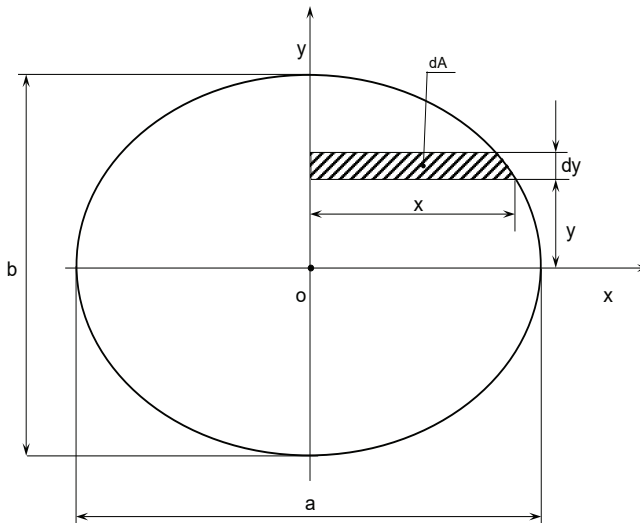
(d – średnica przekroju kołowego na rysunku 2.12), to moment bezwładności ostatecznie można zapisać wzorem:

$$I_x = I_y = \frac{\pi \left(\frac{d}{2} \right)^4}{4} = \frac{\pi \cdot d^4}{16 \cdot 4} = \frac{\pi d^4}{64}$$

Momenty bezwładności $I_x = I_y$ są centralnymi momentami bezwładności, gdyż osie x i y są osiami centralnymi przechodzącymi przez środek ciężkości C przekroju kołowego.

Przykład 2.9.

Wyznaczyć główne centralne momenty bezwładności dla przekroju elipsy mającej osie a i b .



Rys. 2.13. Przekrój elipsy o osiach a i b

Rozwiązanie

Najpierw oblicza się moment bezwładności ćwiartki elipsy względem osi x :

$$I'_x = \int_A y^2 dA$$

gdzie: A jest polem ćwiartki elipsy, a dA jej elementarnym polem.

Elementarne pole ćwiartki elipsy $dA = x \cdot dy$.

Z równania elipsy:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

wyznaczona długość x elementarnego pola dA wynosi:

$$x = \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - y^2}$$

i wstawiona do wzoru na moment bezwładności ćwiartki elipsy względem osi x daje wyrażenie:

$$I'_x = \int_A y^2 dA = \int_A y^2 x dy = \int_A y^2 \cdot \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - y^2} dy = \frac{a}{b} \int_0^b y^2 \sqrt{b^2 - y^2} dy$$

Jeżeli za y podstawić się:

$$y = b \cdot \sin z, \quad \text{to} \quad dy = b \cdot \cos z \cdot dz$$

$$I'_x = \frac{a}{b} \int_0^{\frac{\pi}{2}} b^2 \cdot \sin^2 z \cdot \sqrt{b^2 - b^2 \cdot \sin^2 z} \cdot b \cdot \cos z dz = ab^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 z \cdot \cos^2 z dz$$

Obliczenia całki prowadzą do dalszego zapisu:

$$I'_x = \frac{ab^3}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2z dz = \frac{ab^3}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 4z}{2} dz = \frac{ab^4}{4} \left(\frac{z}{2} - \frac{\sin 4z}{8} \right) \Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$I'_x = \frac{\pi ab^3}{16}$$

Można już wyznaczyć główny centralny moment bezwładności dla całej elipsy względem osi x i y :

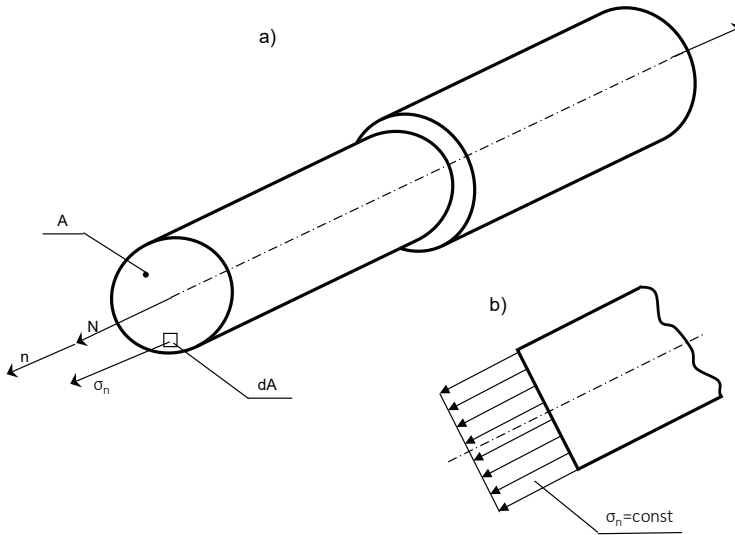
$$I_x = 4 \cdot I'_x = \frac{1}{4} \cdot \pi ab^3$$

$$I_y = 4 \cdot I'_y = \frac{1}{4} \cdot \pi a^3 b$$

3. ROZCIĄGANIE LUB ŚCISKANIE PRĘTÓW PROSTYCH

3.1. ZAŁOŻENIA. PODSTAWOWE ZALEŻNOŚCI

Rozciąganie osiowe lub ściskanie występuje w tych prętach, w których wypadkowa sił wewnętrznych leży w osi pręta. Podczas osiowego rozciągania i ściskania w przekrojach poprzecznych pręta występują tylko naprężenia normalne. Mając na uwadze zasadę de Saint-Venanta przyjmuje się, że w obliczanych przekrojach poprzecznych pręta, niezależnie od sposobu obciążenia, naprężenia normalne rozkładają się równomiernie. Przykład pręta obciążonego siłą rozciągającą N i równomiernym rozkładem naprężeń σ_n przedstawiono na rysunku 3.1.



Rys.3.1. Pręt prosty o stałym przekroju A : a) rozciąganie siłą wypadkową N , b) jednorodny rozkład naprężeń na przekroju poprzecznym A

Przy takim obciążeniu pręta jak na rysunku 3.1, wewnętrzną siłę wzdłużną N można obliczyć przez sumowanie elementarnych sił wewnętrznych występujących na powierzchni A , stosując wzór:

$$N = \int_A \sigma_n dA = \sigma_n \int_A dA = \sigma_n \cdot A \quad (3.1)$$

W celu obliczenia naprężeń w przekroju pręta rozciąganego, zakłada się jednorodny rozkład naprężeń $\sigma_n = \text{const}$, stały przekrój A na długości pręta oraz jednorodną strukturę materiału. Przy tak poczynionym założeniu wartość naprężenia σ_n można obliczyć ze wzoru:

$$\sigma_n = \frac{N}{A} \quad (3.2)$$

Odcinek pręta o długości L i sztywności rozciągania $E \cdot A$, w którym działa siła wzdłużna N wydłuża się o wartość ΔL wyznaczoną według wzoru:

$$\Delta L = \frac{N \cdot L}{E \cdot A} \quad (3.3)$$

Do obliczeń wytrzymałości i przemieszczenia przekroju pręta należy znać rozkład sił wzdłużnych N . Wartość siły wzdłużnej w dowolnym przekroju poprzecznym jest równa sumie algebraicznej rzutów na oś pręta wszystkich sił zewnętrznych, przyłożonych po jednej stronie rozpatrywanego przekroju. Wartość takiej siły oblicza się według wzoru:

$$N = \sum_{i=1}^{i=n} F_i \quad (3.4)$$

W przypadku, gdy przekrój poprzeczny pręta zmienia się, to zmianę długości pręta oblicza się przez sumowanie algebraiczne zmiany długości poszczególnych jego odcinków, dla których pole przekroju $A = const$ i siła wzdłużna $N = const$. Zmianę długości pręta wyznacza się według wzoru:

$$\Delta L = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{N_i \cdot L_i}{E_i \cdot A_i} \quad (3.5)$$

Z przedstawionymi obliczeniami naprężeń według wzoru (3.21) wiąże się warunek wytrzymałościowy wyrażony wzorem:

$$\sigma_{max} = \frac{N_{max}}{A} \leq \sigma_{dop} \quad (3.6)$$

gdzie: N_{max} jest maksymalną siłą wewnętrzną w przecie.

Naprężenia dopuszczalne σ_{dop} ustalane są w odniesieniu do granicy plastyczności R_e , lub też do wytrzymałości doraźnej R_m dla rozciągania lub ściskania.

Zapis naprężeń dopuszczalnych przedstawia się jako:

$$\sigma_{dop} = \frac{R_e}{\alpha_e} \quad \text{lub} \quad \sigma_{dop} = \frac{R_m}{\alpha_m}$$

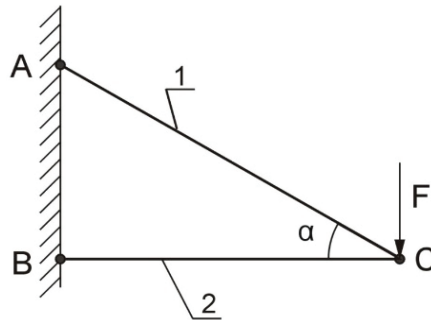
gdzie: α_e i α_m są współczynnikami bezpieczeństwa odniesionymi do granicy plastyczności bądź wytrzymałości doraźnej. W tablicach wytrzymałościowych naprężenia dopuszczalne przy rozciąganiu zazwyczaj oznaczane są jako k_t , a przy ścisaniu k_c .

3.2. UKŁADY PRĘTOWE STATYCZNIE WYZNACZALNE I NIEWYZNACZALNE

Przy rozwiązywaniu zagadnień statycznie wyznaczalnych, wartość sił wewnętrznych w prętach lub reakcji podpór wyznacza się z ogólnych równań równowagi ciała sztywnego. W przypadku, gdy liczba równań równowagi nie wystarcza do wyznaczenia

nieznanych sił, zagadnienie nazywa się statycznie niewyznaczalnym. Wówczas wykorzystuje się dodatkowo związki wynikające z warunków zgodności odkształceń z więzami nałożonymi na układ. Warunki zgodności (nazywane także równaniami geometrycznymi) i równania równowagi łączy się następnie za pomocą fizycznych, uzależniających siły i przemieszczenia.

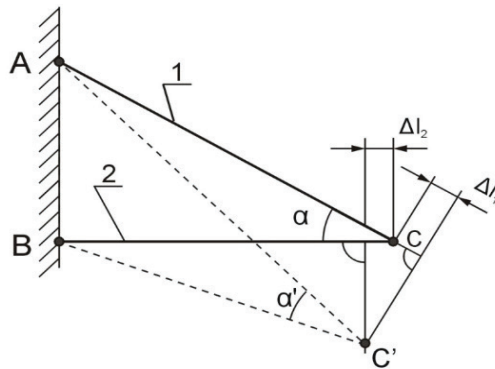
Przykładem układu statycznie wyznaczalnego może być zespół dwóch prętów połączonych w punkcie C i umocowanych w punkcie A i B , przedstawionych na rysunku 3.2.



Rys. 3.2. Układ prętowy statycznie wyznaczalny

Miejsce umocowania w punktach A i B jest przegubowe, jak również połączenie w punkcie C wykonano za pomocą przegubu. Przyjęto, że długość pręta 1 wynosi L_1 , przekrój poprzeczny A_1 i moduł Younga E_1 . I odpowiednio pręt 2 ma długość L_2 , przekrój poprzeczny A_2 , moduł Younga E_2 . Pomiędzy prętami 1 i 2 występuje kąt α .

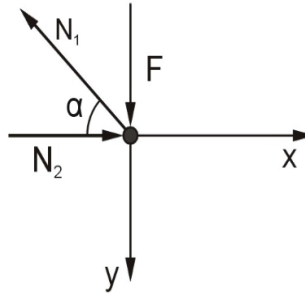
Siła F przyłożona w punkcie C powoduje wydłużenie pręta 1 o wartość ΔL_1 i skrócenie pręta 2 o wartość ΔL_2 . Punkt C obniży się do położenia C' , jak przedstawiono na rysunku 3.3.



Rys. 3.3. Odkształcenie prętów 1 i 2 powodujące obniżenie punktu C

Zakładając, że wydłużenia ΔL_1 i ΔL_2 są małe w porównaniu do długości prętów, przyjmuje się, że położenie osi prętów przed odkształceniem i po odkształceniu

określone jest tym samym kątem $\alpha = \alpha'$. Z założenia tego korzysta się ustalając warunki równowagi sił dla układu w stanie odkształconym. Układ działających sił przedstawiono na rysunku 3.4.



Rys. 3.4. Siły działające na układ prętowy

Na rysunku 3.4 przedstawiono wszystkie siły działające na układ prętowy. Siła czynna F oraz siły bierne N_1 i N_2 . Zwroty wektorów sił N_1 i N_2 zaznaczono zgodnie z zasadą: jeżeli pręt jest rozciągany to zwrot wektora siły wewnętrznej jest skierowany od węzła, natomiast jeżeli pręt jest ścispany to wektor siły wewnętrznej jest skierowany do węzła.

W przypadku układu prętowego na rysunku 3.2, pręt 1 jest rozciągany, a pręt 2 ścispany. Stąd też wektory sił wewnętrznych N_1 i N_2 przedstawione na rysunku 3.4 mają zwroty wynikające z podanej wyżej zasady.

Korzystając z rysunku 3.4 równania równowagi można zapisać:

$$\sum F_{ix} = N_2 - N_1 \cdot \cos \alpha = 0$$

$$\sum F_{iy} = F - N_1 \cdot \sin \alpha = 0$$

Wyznaczone wartości sił N_1 i N_2 będą równe:

$$N_1 = \frac{F}{\sin \alpha}; \quad N_2 = F \cdot \operatorname{ctg} \alpha$$

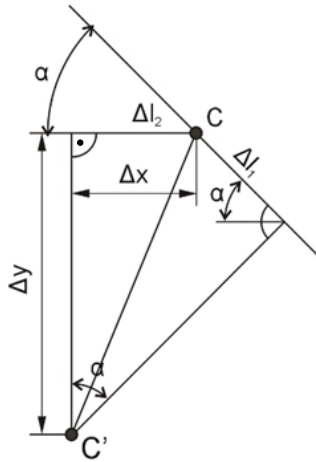
Natomiast naprężenia w przekrojach poprzecznych prętów 1 i 2 wyznacza się według wzorów:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1}; \quad \sigma_2 = \frac{N_2}{A_2}$$

Wydłużenie ΔL_1 pręta 1 i skrócenie ΔL_2 pręta 2 wyznacza się z zależności:

$$\Delta L_1 = \frac{N_1 \cdot L_1}{E_1 \cdot A_1}; \quad \Delta L_2 = \frac{N_2 \cdot L_2}{E_2 \cdot A_2}$$

Przemieszczenie punktu C w położenie C' wyznacza się w oparciu o pomocniczy rysunku 3.5.



Rys. 3.5. Konstrukcja geometryczna przemieszczenia punktu C

Korzystając z rysunku 3.5 przemieszczenie punktu C może być wyznaczone według wzoru:

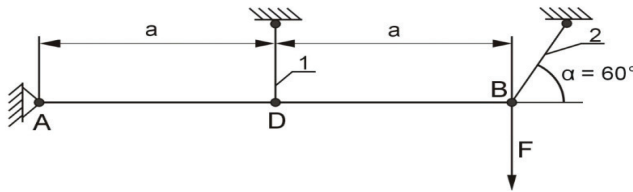
$$CC' = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

gdzie:

$$\Delta x = \Delta L_2; \quad \Delta y = \Delta L_1 \cdot \sin \alpha + (\Delta L_2 + \Delta L_1 \cdot \cos \alpha) \operatorname{ctg} \alpha$$

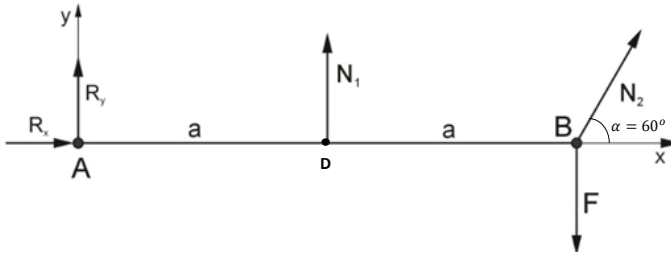
Z wydłużeniem pręta 1 o ΔL_1 wiążą się naprężenia rozciągające, natomiast ze skróceniem pręta 2 o ΔL_2 naprężenia ściskające.

W dalszym ciągu podany będzie przykład układu statycznie niewyznaczalnego. Oto sztywna belka AB zawieszona na dwóch przegubowo zamocowanych prętach i podparta przegubowo w punkcie A, przedstawiona jest na rysunku 3.6.



Rys. 3.6. Belka AB zawieszona na prętach 1 i 2 jako układ statycznie niewyznaczalny

Dane są moduły Younga prętów E_1 i E_2 , długości L_1 i L_2 oraz pola przekrojów A_1 i A_2 . Wyznaczane będą tu naprężenia w prętach 1 i 2. Układ z rysunku 3.6 po uwolnieniu od więzów może być zastąpiony nowym układem, jak na rysunku 3.7.



Rys. 3.7. Belka AB po uwolnieniu od więzów

Na belkę AB działają cztery niewiadome siły. Dwie z nich są składowymi reakcji przegubu A i dwie w prętach. Pręt, zarówno 1 jak i 2 jest rozciągany, więc zwroty wektorów sił N_1 i N_2 skierowane są od węzła w punkcie D i B . Korzystając z rysunku 3.7 można napisać równania równowagi belki AB :

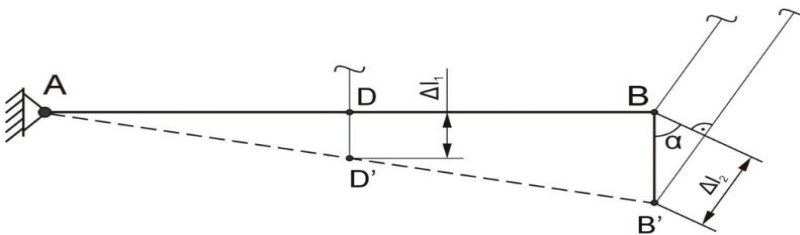
$$\sum F_{ix} = R_x + N_2 \cdot \cos \alpha = 0$$

$$\sum F_{iy} = R_y + N_1 - F + N_2 \cdot \sin \alpha = 0$$

$$\sum M_{i(A)} = -N_1 \cdot a + F \cdot 2a - N_2 \cdot \sin \alpha \cdot 2a = 0$$

Równań jest 3, a niewiadomych 4. Układ jest zatem jednokrotnie statycznie niewyznaczalny. Do wyznaczenia naprężeń w prętach potrzebna jest znajomość sił N_1 i N_2 . Nie będą tu wyznaczane reakcje w przegubie A . Takie założenie pozwoli na rozwiązanie zadania, obliczając siły N_1 i N_2 , a następnie naprężenia σ_1 i σ_2 .

W celu wyznaczenia wydłużenia prętów narysowano schemat odkształceń układu przedstawiony na rysunku 3.8.

Rys. 3.8. Schemat odkształcenia belki AB i układu prętowego

Na podstawie rysunku 3.8 napisano warunek geometryczny:

$$\frac{DD'}{a} = \frac{BB'}{2a}; \quad \text{czyli} \quad \frac{\Delta L_1}{a} = \frac{\Delta L_2}{2a \cdot \sin \alpha}$$

gdzie: ΔL_1 i ΔL_2 są wydłużeniami prętów 1 i 2.

Na rysunku 3.8 przedstawiającym schemat odkształcenia przyjęto uproszczenia, zakładając, że punkty belki przemieszczają się po prostych prostopadłych do osi belki oraz że osie prętów przed i po odkształceniu są do siebie równoległe.

Można zatem napisać wyrażenia na wydłużenia prętów korzystając z prawa Hooke'a:

$$\Delta L_1 = \frac{N_1 \cdot L_1}{E_1 \cdot A_1}; \quad \Delta L_2 = \frac{N_2 \cdot L_2}{E_2 \cdot A_2}$$

Patrząc na rysunek 3.6 i 3.7, można napisać równanie równowagi dla belki AB , które ma postać:

$$\sum M_{i(A)} = -N_1 \cdot a + 2F \cdot a - 2N_2 \cdot a \sin \alpha = 0$$

W równaniach powyższych N_1 i N_2 są wielkościami niewiadomymi. Wyznaczenie tych niewiadomych odbędzie się przez rozwiązanie układu równań złożonego z równania równowagi i z warunku geometrycznego. Układ taki przyjmuje postać:

$$-N_1 \cdot a + 2F \cdot a - 2N_2 \cdot a \sin \alpha = 0$$

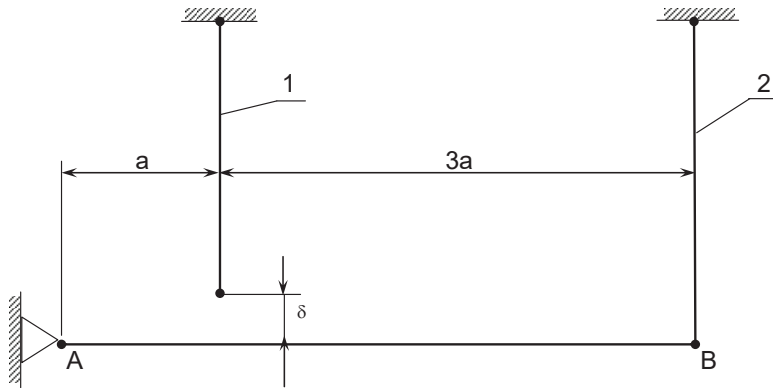
$$\frac{N_1 \cdot L_1}{a \cdot E_1 \cdot A_1} = \frac{N_2 \cdot L_2}{2a \cdot \sin \alpha \cdot E_2 \cdot A_2}$$

Z układu tego będą wyznaczone wyrażenia opisujące siły N_1 i N_2 . W dalszej kolejności można wyznaczyć naprężenia w prętach 1 i 2, stosując wzory:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1}; \quad \sigma_2 = \frac{N_2}{A_2}$$

Przypadki statycznie niewyznaczalne spotyka się często w zastosowaniach technicznych, na przykład podczas montażu elementów konstrukcyjnych w jeden zespół.

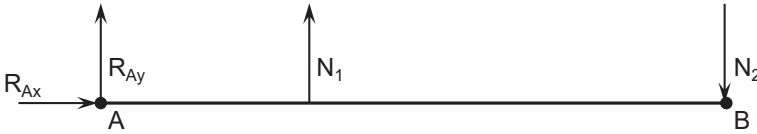
Niech będzie dany układ prętowy przedstawiony na rysunku 3.9.



Rys. 3.9. Układ prętowy z różnicą długości prętów

Długość pręta 1 jest o δ mniejsza od długości pręta 2. Podczas montażu tego układu, pręt 1 wydłuży się o ΔL_1 . Wydłużeniom tym odpowiadają siły wewnętrzne i naprężenia w prętach, zwane naprężeniami montażowymi.

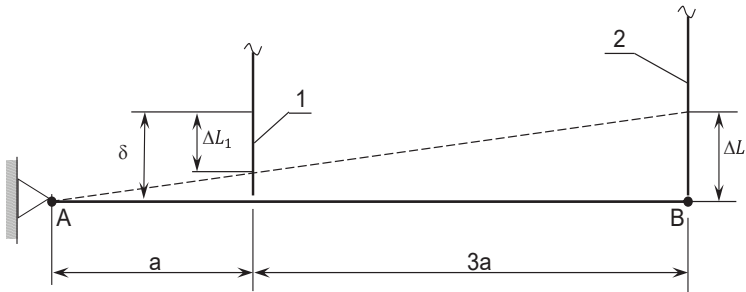
Układ prętowy z rysunku 3.9 po uwolnieniu od więzów przedstawiono na rysunku 3.10.

Rys. 3.10. Pręt AB z siłami wewnętrznymi N_1 i N_2

W celu obliczenia naprężeń montażowych najpierw należy obliczyć siły wewnętrzne N_1 i N_2 , do czego będzie potrzebne równanie równowagi belki AB :

$$\sum M_{i(A)} = -N_1 \cdot a + N_2 \cdot 4a = 0$$

Do wyznaczenia sił N_1 i N_2 potrzebne jest drugie równanie, które będzie ułożone w oparciu o warunek geometryczny, przy wykorzystaniu rysunku 3.11.

Rys. 3.11. Wydłużenie pręta 1 o ΔL_1 i skrócenie pręta 2 o ΔL_2

Na podstawie odkształceń prętów 1 i 2 na rysunku 3.11, można napisać równanie:

$$\frac{\delta - \Delta L_1}{a} = \frac{\Delta L_2}{4a}$$

Wydłużenia ΔL_1 i ΔL_2 na podstawie prawa Hooke'a zapisano w postaci:

$$\Delta L_1 = \frac{N_1 \cdot L_1}{E_1 \cdot A_1}; \quad \Delta L_2 = \frac{N_2 \cdot L_2}{E_2 \cdot A_2}$$

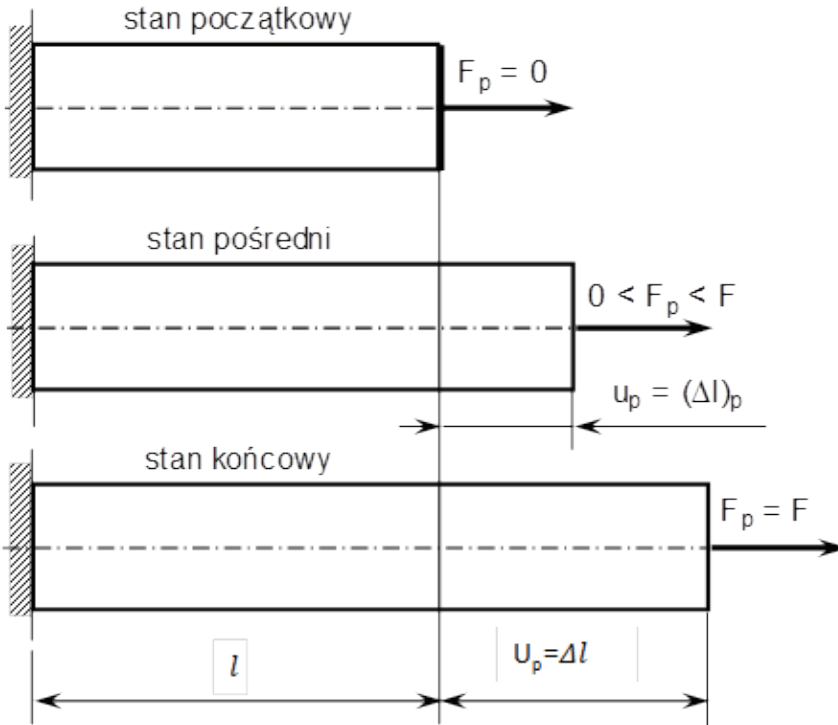
W oparciu o równanie fizyczne na ΔL_1 i ΔL_2 oraz równanie równowagi belki AB , wyznacza się siły N_1 i N_2 , a następnie naprężenia montażowe σ_1 i σ_2 .

3.3. ENERGIA ODKSZTAŁCENIA PRZY ROZCIĄGANIU

Podczas obciążania pręta siłą rozciągającą wykonywana jest pewna praca, zużywana na zmianę odległości między atomami materiału pręta, która związana jest ze zmianą energii potencjalnej jego cząstek. Energia ta nazywana jest energią odkształcenia i jest ona zwracana w procesie odciążania.

W energetycznym ujęciu, ciałem idealnie sprężystym jest takie ciało, w którym praca zwrócona w procesie odciążania jest równa pracy włożonej przy obciążaniu. Jeśli

praca zwrócona jest mniejsza niż włożona, to ciało takie jest częściowo sprężyste. Różnica między tymi pracami zostaje zużyta na nieodwracalne zmiany w materiale, będące trwałym jego odkształceniem. Analiza energii odkształcenia może być przeprowadzona na przykładzie rozciągania pręta pryzmatycznego, przedstawionego na rysunku 3.12.



Rys. 3.12. Praca obciążenia przy pręcie rozciągany

W analizie założono, że proces obciążania przebiega bardzo powoli, czyli zachodzi powolny wzrost siły F_p od zera do końcowej wartości $F_p = F$. Można uznać, że w tym powolnym quasi-statycznym procesie, prędkości cząstek ciała są bardzo małe, a ich energia kinetyczna także jest pomijalnie mała. Przeszyczenie chwilowe u_p swobodnego końca pręta jest równe wydłużeniu $(\Delta l)_p$ pręta przy statycznym działaniu siły F_p . Zgodnie z prawem Hooke'a w przypadku prostego rozciągania można napisać zależność:

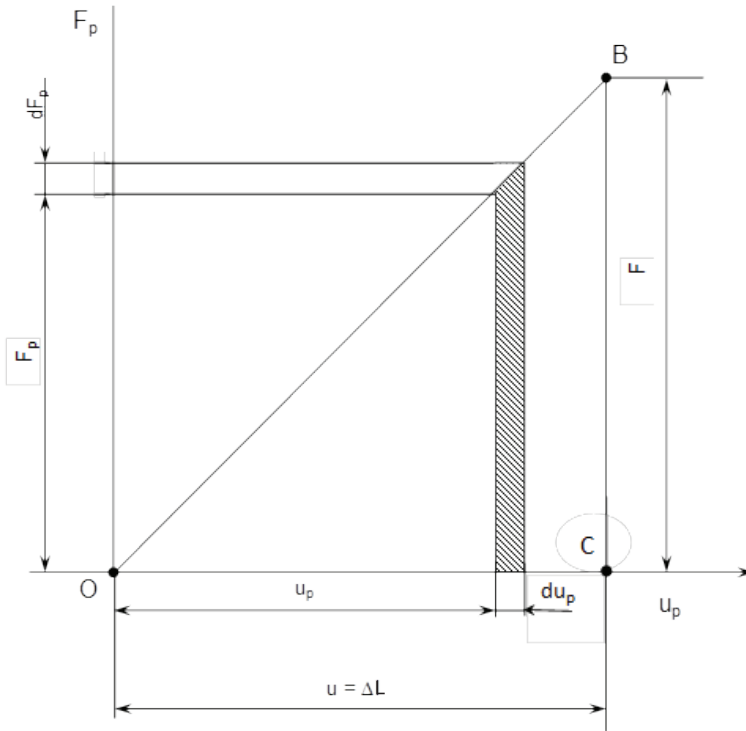
$$u_p = (\Delta l)_p = \frac{F_p \cdot l}{E \cdot A} \quad (3.7)$$

gdzie: l – długość pręta, E – moduł Younga, A – pole przekroju poprzecznego pręta.

Siłę F_p można zapisać zależnością:

$$F_p = f(u_p) \quad (3.8)$$

Zależność ta została przedstawiona graficznie na rysunku 3.13.

Rys. 3.13. Obraz siły F_p w funkcji przemieszczenia u_p

Następnie będzie obliczona praca, jaką wykona siła F_p w całym procesie obciążania. Wzrostowi siły z wartości F_p do $F_p + dF_p$ odpowiada przyrost przemieszczenia du_p , a elementarną pracę dL siły F_p zapisano:

$$dL = F_p \cdot du_p \quad (3.9)$$

Praca ta jest równa wartości pola zakreskowanego na rysunku 3.13. Całkowita praca L jest równa sumie takich elementarnych prac, czyli polu powierzchni trójkąta OCB i może być zapisana jako:

$$L = \frac{1}{2} F \cdot u = \frac{1}{2} F \cdot \Delta l \quad (3.10)$$

gdzie: F i Δl oznaczają końcowe wartości siły i wydłużenia.

Jeżeli siła F będzie wyrażona w niutonach (N), a wydłużenie w metrach (m), to praca otrzyma miano dżula ($1 \text{ Nm} = 1 \text{ J}$).

Przy poczynionym założeniu, że rozciąganie jest procesem quasi-statycznym, można powiedzieć, że praca zamienia się całkowicie na energię potencjalną U , którą można zapisać za pomocą wzoru:

$$U = L = \frac{1}{2} F \cdot \Delta l \quad (3.11)$$

Korzystając ze wzoru (3.10) energia potencjalna U może być wyrażona:

$$U = \frac{F^2 \cdot l}{2E \cdot A} \quad (3.12)$$

Jak widać z zapisu wzoru (3.19) energia potencjalna jest kwadratową funkcją siły F , a zatem nie zależy od jej znaku (rozciąganie lub ściskanie pręta) i jest zawsze dodatnia, gdy tylko $F \neq 0$. Należy zauważyć, że nieliniowość zależności energii potencjalnej od siły ($U_{(F)}$) sprawia, iż energia odkształcenia nie podlega zasadzie superpozycji. Inaczej mówiąc, energia potencjalna U przy jednoczesnym rozciąganiu pręta przez dwie siły F_1 i F_2 nie będzie równa sumie energii U_1 i U_2 odpowiadających oddzielnemu działaniu tych sił. Od tego stwierdzenia istnieją wyjątki, które wymagają jednak oddzielnego szczegółowego uzasadnienia.

Podczas rozciągania pręta pryzmatycznego w każdej jego części występują jednakowe warunki, wobec czego w jednostce objętości ilość energii U' będzie wyrażona wzorem:

$$U' = \frac{U}{A \cdot l} \quad (3.13)$$

Wielkość U' jest nazywana właściwą energią odkształcenia i jest ona miarą poziomu energetycznego jednostki objętości materiału. Wykorzystując wzór na energię potencjalną U można zapisać:

$$U' = \frac{F^2 \cdot l}{2EA^2 \cdot l} = \frac{F^2}{2EA^2} = \frac{\sigma^2}{2E} \quad (3.14)$$

Podobnie można określić inną wielkość U'' , nazywaną miarą poziomu energetycznego jednostki masy materiału przy rozciąganiu. Wielkość U'' zapisano wzorem:

$$U'' = \frac{F^2 \cdot l}{2EA^2 \cdot l \cdot \rho} = \frac{F^2}{2EA^2 \cdot \rho} = U' \cdot \frac{l}{\rho} \quad (3.15)$$

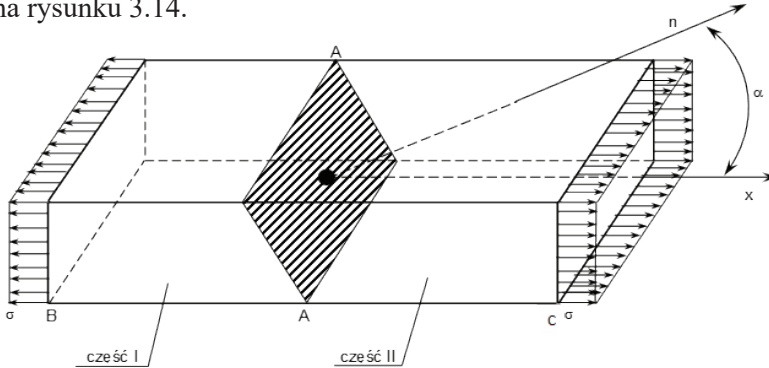
gdzie: ρ jest masą właściwą materiału pręta.

Wielkości U' i U'' mogą być stosowane, między innymi do oceny materiału ze względu na możliwości akumulowania energii, w przypadku podstawienia za σ wartości granicy sprężystości.

W dalszej kolejności będzie przedstawiona analiza pręta przy jego odciążaniu. Patrząc na rysunek 3.13, zauważa się, że początkowi procesu odciążania odpowiada punkt B , a końcowi punkt O . W przypadku materiału sprężystego jest to ta sama prosta BO . Świadczy to o tym, że ilość pracy oddana na zewnątrz przy odciążaniu jest równa pracy włożonej podczas obciążania, jak również o tym, że w zakresie sprężystym materiału przemiany energetyczne są całkowicie odwracalne. Nie są tu uwzględniane dodatkowe efekty wymiany ciepła z otoczeniem, które są bardzo małe.

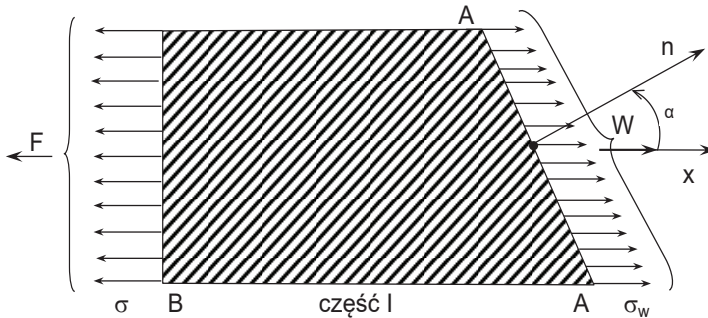
3.4. STAN NAPIĘCIA I ODKSZTAŁCENIA PRZY ROZCIĄGANIU

W pręcie rozciągającym panuje określony stan napięcia i odkształcenia. Dokładniejsza jego analiza będzie przeprowadzona na ukośnym przekroju AA pręta przedstawionego na rysunku 3.14.



Rys. 3.14. Naprężenia w ukośnym przekroju pręta rozciąganego

W tym celu wyznaczy się najpierw naprężenia w ukośnym przekroju A – A pręta. Położenie tego przekroju w badanej części I zostało określone kątem α , zawartym pomiędzy osią x pręta, a normalną n zewnętrzną dla części I. Wypadkowe naprężenia σ_w są rozłożone równomiernie, co przedstawiono na rysunku 3.15.



Rys. 3.15. Wypadkowa naprężenia W

Naprężenia σ_w powinny być równoległe do osi x , jest to bowiem niezbędne do spełnienia warunku równowagi badanej części I. Wypadkową naprężeń σ_w oznaczoną literą W zapisano zależnością:

$$W = \sigma_w \cdot A_\alpha = \frac{\sigma_w \cdot A}{\cos \alpha} \quad (3.16)$$

gdzie: A_α jest polem przekroju A – A.

Z warunków równowagi części I wynika, że:

$$W - F = 0$$

oraz uwzględniając, że:

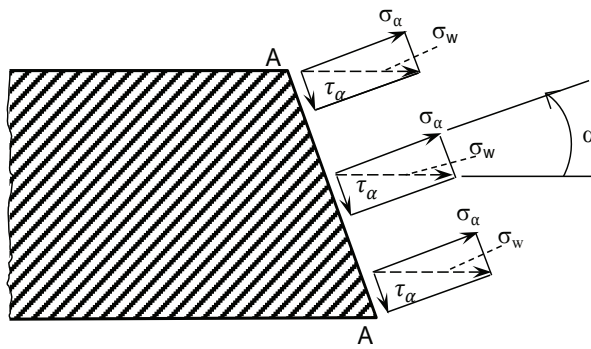
$$\sigma = \frac{F}{A}$$

jest naprężeniem w przekroju poprzecznym B,

można napisać:

$$\sigma_w = \frac{F \cdot \cos \alpha}{A} = \sigma \cdot \cos \alpha \tag{3.17}$$

Naprężenie wypadkowe σ_w może być rozłożone na normalne σ_α oraz styczne τ_α . Rozkład tych naprężeń przedstawiono na rysunku 3.16.



Rys. 3.16. Naprężenie normalne σ_α i styczne τ_α na przekroju ukośnym A - A

Rozkładając naprężenie wypadkowe na normalne i styczne otrzymuje się:

$$\sigma_\alpha = \sigma_w \cdot \cos \alpha = \sigma \cdot \cos^2 \alpha \tag{3.18}$$

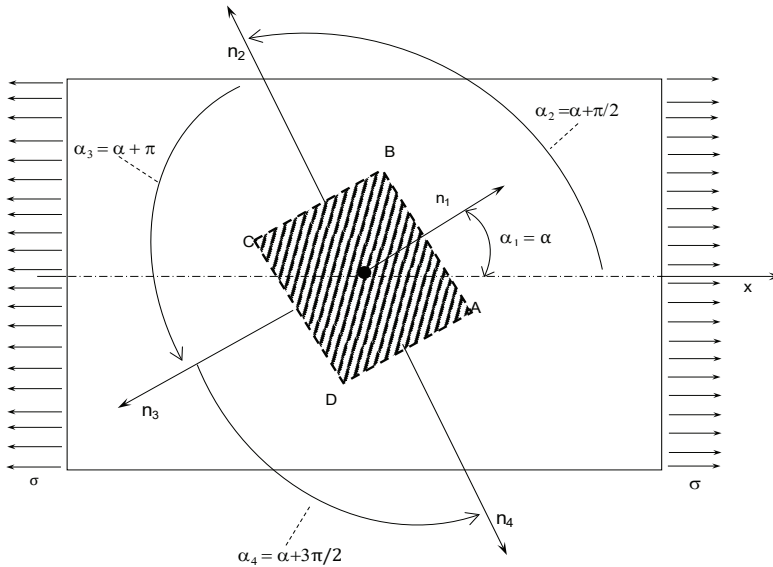
$$\tau_\alpha = \sigma_w \cdot \sin \alpha = \sigma \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha \tag{3.19}$$

Wzory (3.18) i (3.19) odnoszą się do rozciągania. Te same wzory będą stosowane w przypadku ściskania, z tą różnicą, że wielkości σ_α i τ_α będą miały zwroty przeciwnie aniżeli na rysunku 3.16. W celu orientacji w znakach warto zauważyć, że naprężenie normalne σ_α jest dodatnie, gdy działa na zewnątrz rozpatrywanej części I. Naprężenie styczne τ_α jest dodatnie, gdy dokonuje obrotu rozpatrywanej części zgodnego z ruchem wskazówek zegara.

Przedstawione na rysunku 3.14 przecięcie A – A jest jednokrotne. Można jednak w tym samym przecięciu dokonać kilka przekrojów. Mogą to być na przykład cztery przekroje: A – B, B – C, C – D, D – A, które odpowiadają kątom

$$\alpha_1 = \alpha, \alpha_2 = \alpha + \left(\frac{\pi}{2}\right), \alpha_3 = \alpha + \pi, \alpha_4 = \alpha + \frac{3}{2}\pi$$

W wyniku tych przekrojów uzyska się kostkę materiału w postaci elementarnego prostopadłościanu, co zostało przedstawione na rysunku 3.17.



Rys. 3.17. Wycięta kostka prostopadłościenna

Korzystając z wzorów (3.18) i (3.19), podstawiając kolejno

$\alpha_1 = \alpha, \alpha_2 = \alpha + \frac{1}{2}\pi, \alpha_3 = \alpha + \pi, \alpha_4 = \alpha + \frac{3}{2}\pi$ można napisać:

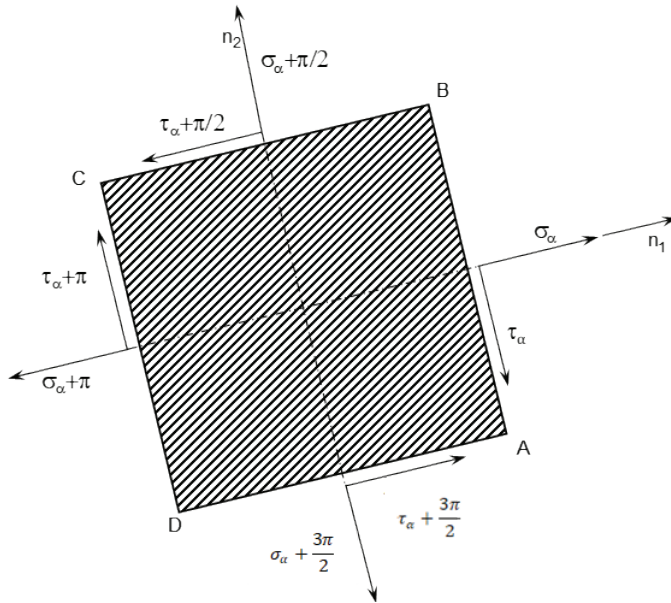
$$\sigma_\alpha = \sigma_{\alpha+\pi} = \sigma \cdot \cos^2 \alpha \quad (3.20)$$

$$\sigma_{\alpha+\frac{\pi}{2}} = \sigma_{\alpha+\frac{3}{2}\pi} = \sigma \cdot \sin^2 \alpha \quad (3.21)$$

Napężenia styczne na prostopadłych do siebie ściankach mają jednakowe bezwzględne wartości:

$$\tau_\alpha = -\tau_{\alpha+\frac{\pi}{2}} = \tau_{\alpha+\pi} = -\tau_{\alpha+\frac{3}{2}\pi} = \sigma \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha \quad (3.22)$$

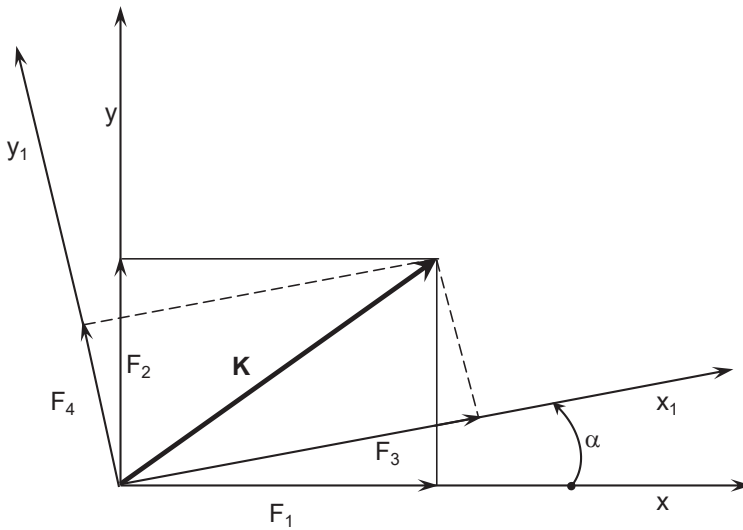
Dobrą ilustracją wzorów (3.20), (3.21), (3.22) jest graficzne przedstawienie wektorów naprężeń normalnych i stycznych na wyciętej elementarnej kostce prostopadłościennej przedstawionej na rysunku 3.18.



Rys. 3.18. Naprężenia normalne i styczne na ściankach elementarnej kostki prostokątnej

Naprężenia styczne zapisane za pomocą wzoru (3.22) wyrażają zasadę o równowartości naprężeń stycznych.

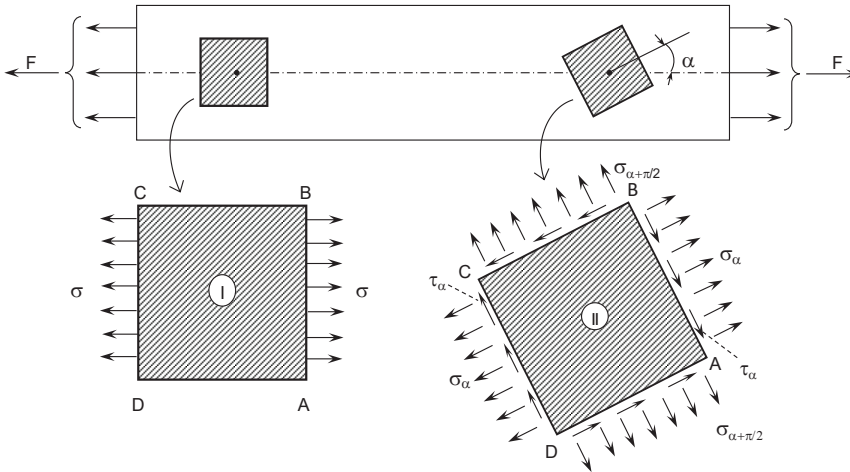
Sens fizyczny rozważań zasady równowartości naprężeń stycznych, można dodatkowo objaśnić przez analogię do przedstawionego na rysunku 3.19 wektora K w różnych układach współrzędnych.



Rys. 3.19. Rozkład wektora K na składowe F_1, F_2 oraz na F_3 i F_4

W układzie xy składowymi wektora K są F_1 i F_2 , a w układzie x_1y_1 składowe F_3 i F_4 . Są to różne składowe, a sam wektor K nie zmienia się.

W analogii do wektora K z rysunku 3.19 zapisano obrazy naprężeń, które wynikają z położenia dwóch wyciętych kostek prostokątnych z tego samego pręta przedstawionego na na rysunku 3.20.



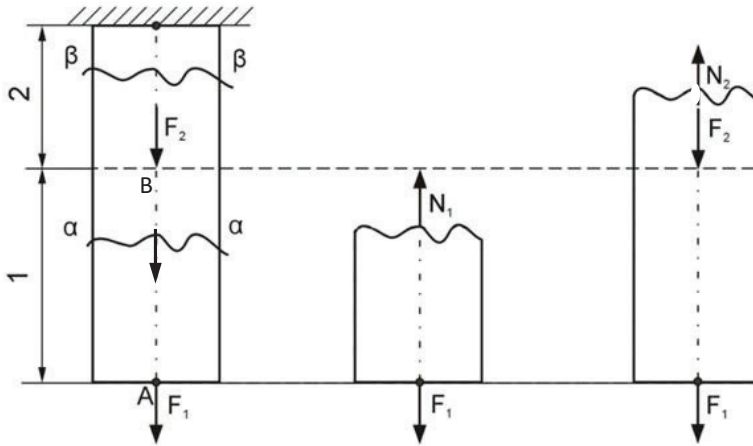
Rys. 3.20. Położenie kostki prostokątnej w osi pręta rozciąganego

Obraz naprężeń kostki II jest bardziej złożony od kostki I, chociaż stan napięcia materiału w przecie pozostaje ten sam. Jest tylko inaczej przedstawiony. Fakt, że stan napięcia materiału pozostaje ten sam w obydwu obrazach, nazywany jest stanem prostego rozciągania i występuje tylko wtedy, gdy naprężenia: σ , σ_α i τ_α spełniają zależności (3.18) i (3.19).

3.5. PRZYKŁADY ZADAŃ Z ROZWIĄZANIAMI

Przykład 3.1.

Pręt o przekroju kołowym i średnicy $d = 4$ cm obciążono siłami: $F = 5000$ N, $F = 15000$ N, przyłożonymi w jego osi jak na rysunku 3.21. Obliczyć¹ naprężenia w² przedziałach 1 i 2.



Rys. 3.21. Pręt o przekroju kołowym obciążony siłami osiowymi

Rozwiązanie

Na początku należy wykonać przekroje myślowe $\alpha - \alpha$ i $\beta - \beta$, odpowiednio w przedziale 1 i 2. Następnie z warunków równowagi określić wartości sił wewnętrznych N_1 i N_2 , występujących w przekrojach $\alpha - \alpha$ i $\beta - \beta$.

Przekrój $\alpha - \alpha$:

$$N_1 - F_1 = 0$$

$$N_1 = F_1 = 5000 \text{ N}$$

Przekrój $\beta - \beta$:

$$N_2 - F_2 - F_1 = 0$$

$$N_2 = F_1 + F_2 = 5000 + 15000 = 20000 \text{ N}$$

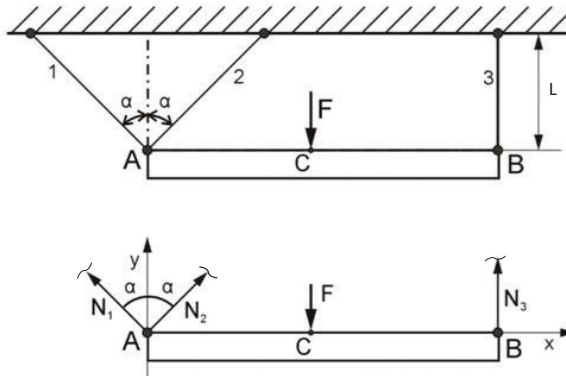
Siły zewnętrzne F_1 i F_2 przyłożone w punktach A i B powodują, że zmiana naprężeń występuje pomiędzy tymi punktami.

$$\sigma_{AB} = \frac{4N_1}{\pi d^2} = \frac{4 \cdot 5000}{\pi \cdot 0,04^2} = \frac{20000}{0,005024} = 3980891 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2} = 3,98 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{BC} = \frac{4N_2}{\pi d^2} = \frac{4 \cdot 20000}{\pi \cdot 0,04^2} = \frac{80000}{0,005024} = 15923566 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2} = 15,92 \text{ MPa}$$

Przykład 3.2.

Sztywną belkę AB zawieszono na trzech prętach z mocowaniem przegubowym, jak na rysunku 3.22. Średnice kolejnych prętów wynoszą: $d_1 = 8 \text{ mm}$, $d_2 = 10 \text{ mm}$, $d_3 = 8 \text{ mm}$. Belkę w punkcie C obciążono siłą skupioną $F = 20000 \text{ N}$. Obliczyć naprężenia w prętach: 1, 2, 3 oraz ich wydłużenia, przyjmując $\alpha = 45^\circ$, moduł Younga $E = 2,1 \times 10^5 \text{ MPa}$, $L = 120 \text{ cm}$, $AB = 5L$, $AC = 1,5L$.



Rys. 3.22. Belka wisząca na trzech prętach

Rozwiązanie

Siły w prętach będą wyznaczone na podstawie warunków równowagi napisanych dla układu płaskiego:

$$\sum F_{ix} = -N_1 \cdot \sin\alpha + N_2 \cdot \sin\alpha = 0$$

$$\sum F_{iy} = N_1 \cdot \cos\alpha + N_2 \cdot \cos\alpha - F + N_3 = 0$$

$$\sum M_{i(A)} = F \cdot 1,5L - N_3 \cdot 5L = 0$$

Rozwiązując układ równań otrzymano:

$$N_3 = \frac{F \cdot 1,5L}{5L} = \frac{F \cdot 1,5}{5} = \frac{20000 \cdot 1,5}{5} = 6000 \text{ N}$$

$$N_1 = N_2 = \frac{F - N_3}{2 \cos\alpha} = \frac{20000 - 6000}{\sqrt{2}} = 9899,5 \text{ N}$$

Obliczone naprężenia w prętach otrzymują wartość:

$$\sigma_1 = \frac{4N_1}{\pi d_1^2} = \frac{4 \cdot 9899,5}{\pi \cdot 0,008^2} = \frac{39598}{0,00020096} = 197044187,9 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2} = 197 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = \frac{4N_2}{\pi d_2^2} = \frac{4 \cdot 9899,5}{\pi \cdot 0,01^2} = \frac{39598}{0,000314} = 126108280,39 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2} = 126,1 \text{ MPa}$$

$$\sigma_3 = \frac{4N_3}{\pi d_3^2} = \frac{4 \cdot 6000}{\pi \cdot 0,008^2} = \frac{24000}{0,00020096} = 119426751,5 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2} = 119,4 \text{ MPa}$$

Wydłużenia prętów oblicza się według prawa Hooke'a dla prostego rozciągania, więc będzie:

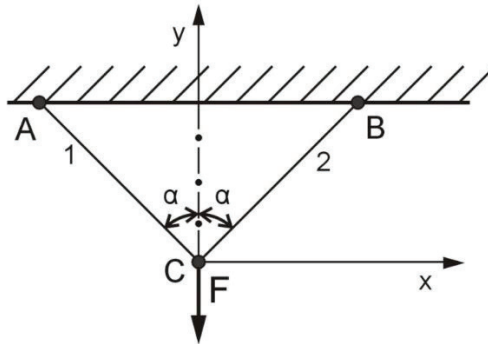
$$\Delta L_1 = \frac{N_1 \cdot L_1}{E \cdot A_1} = \frac{4 \cdot N_1 \cdot L}{E \cdot \pi \cdot d_1^2 \cdot \cos\alpha} = \frac{4 \cdot 9899,5 \cdot 1,2}{2,1 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 0,008^2 \cdot \pi \cdot \cos 45^\circ} = 0,00159 \text{ m} = 1,59 \text{ mm}$$

$$\Delta L_2 = \frac{N_2 \cdot L_2}{E \cdot A_2} = \frac{4 \cdot N_1 \cdot L}{E \cdot \pi \cdot d_2^2 \cdot \cos\alpha} = \frac{4 \cdot 9899,5 \cdot 1,2}{2,1 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 0,010^2 \cdot \pi \cdot \cos 45^\circ} = 0,00101 \text{ m} = 1,01 \text{ mm}$$

$$\Delta L_3 = \frac{N_3 \cdot L_3}{E \cdot A_3} = \frac{4 \cdot N_3 \cdot L}{E \cdot \pi \cdot d_3^2} = \frac{4 \cdot 6000 \cdot 1,2}{2,1 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 0,008^2 \cdot \pi} = 0,00068 \text{ m} = 0,68 \text{ mm}$$

Przykład 3.3.

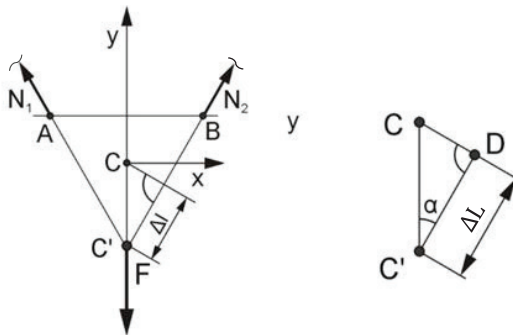
Walec o ciężarze $F = 50000 \text{ N}$ zawieszono na dwóch prętach o jednakowych średnicach $d = 15 \text{ mm}$ i jednakowych długościach $L = 1,5 \text{ m}$. Pręty zamocowane są przegubowo w punktach A, B i C . Obliczyć naprężenia w prętach 1 (AC) i 2 (BC) oraz obniżenie punktu C . Moduł Younga materiału pręta $E = 2,1 \times 10^5 \text{ MPa}$, kąt $\alpha = 30^\circ$. Schemat układu prętowego przedstawiono na rysunku 3.23.



Rys. 3.23. Schemat układu prętowego obciążonego siłą F

Rozwiązanie

Obydwa pręty będą rozciągane, więc zwroty reakcji więzów będą jak na rysunku 3.24.



Rys. 3.24. Rysunek pomocniczy z wydlużeniem prętów o ΔL

Korzystając z rysunku 3.24 można napisać równania sumy rzutów sił na oś x i y :

$$\sum F_{ix} = -N_1 \cdot \sin \alpha + N_2 \cdot \sin \alpha = 0$$

$$\sum F_{iy} = N_1 \cdot \cos \alpha + N_2 \cdot \cos \alpha - F = 0$$

Z równania sumy rzutów sił na oś x wynika, że:

$$N_1 = N_2 = N$$

Z równania sumy rzutów sił na oś y wyznaczono wartość $N_1 = N_2 = N$, która wynosi:

$$2N \cdot \cos \alpha = F$$

$$N = \frac{F}{2 \cos 30^\circ}$$

$$N = \frac{50000}{2 \cos 30^\circ} = 28868,3 N = 28,8683 kN$$

Z obliczeń wynika, że pręt 1 (AC) i pręt 2 (BC) jest rozciągany siłą $N = 28,8683 kN$.

Ponieważ pręty mają jednakowe średnice, rozciągane są jednakową siłą, więc występujące w nich naprężenia również będą jednakowe:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma = \frac{4N}{\pi d^2} = \frac{4 \cdot 28,8683}{\pi \cdot 0,015^2} = 163444,0198 kN \cdot m^{-2} = 163,4 MPa$$

Walec o ciężarze $F = 50000 N$ spowodował obniżenie punktu C do położenia C' na skutek wydłużenia prętów o ΔL , które może być wyznaczone według wzoru z prawa Hooke'a:

$$\Delta L = \frac{N \cdot L}{E \cdot A}$$

Rozważane odkształcenie jest bardzo małe, mieszczące się w granicach prawa Hooke'a, więc przyjęto, że kąt α nie ulega zmianie po przyłożeniu obciążenia F . Na tej podstawie wyodrębniono na rysunku 3.24 trójkąt prostokątny CDC' , z którego wynika, że bok CC' tego trójkąta jest obniżeniem punktu C i może być wyznaczony według wzoru:

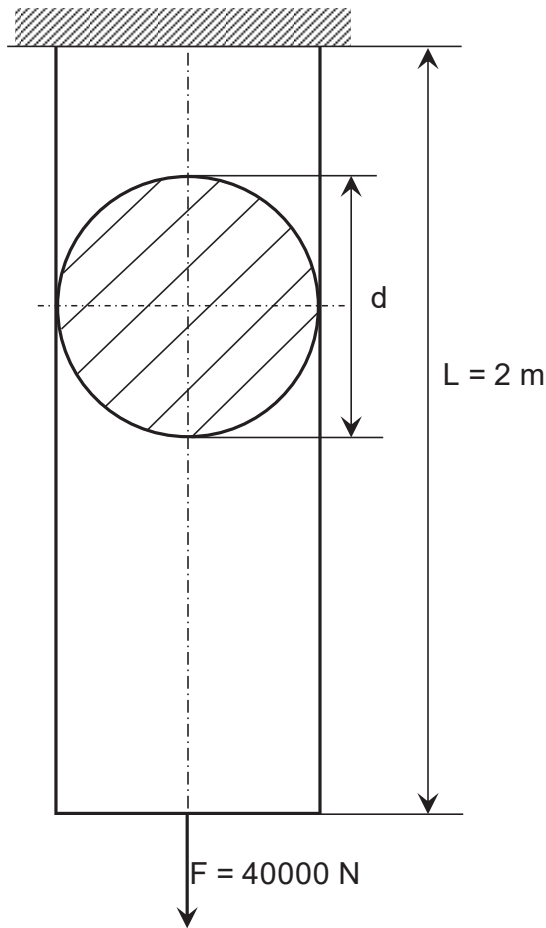
$$CC' = \frac{\Delta L}{\cos \alpha} = \frac{\frac{N \cdot L}{E \cdot A}}{\cos \alpha} = \frac{N \cdot L}{E \cdot A \cdot \cos \alpha} = \frac{4NL}{E \cdot \pi d^2 \cos \alpha}$$

Wstawiając dane liczbowe do powyższego wzoru, wyznaczona wartość obniżenia punktu C wynosi:

$$CC' = \frac{4 \cdot 28,8683 \cdot 1,5}{2,1 \cdot 10^8 \cdot \pi \cdot 0,0015^2 \cdot \cos 30^\circ} = 0,001348 m = 1,348 mm$$

Przykład 3.4.

Do pręta stalowego o przekroju kołowym i długości $L = 2 m$, zawieszono pionowo przyłożono siłę $F = 40000 N$. Naprężenie dopuszczalne materiału pręta na rozciąganie $k_r = 95 MPa$, moduł Younga $E = 2,1 \cdot 10^5 MPa$, współczynnik Poissona $\nu = 0,3$. Obliczyć średnicę pręta, która spełni warunek wytrzymałościowy oraz wydłużenie ΔL , wydłużenie jednostkowe ϵ , odkształcenie poprzeczne jednostkowe ϵ_d i odkształcenie poprzeczne całkowite Δd . Schemat obciążenia pręta przedstawiono na rysunku 3.25.



Rys. 3.25. Schemat obciążenia pręta

Rozwiązanie

Na podstawie warunku wytrzymałościowego obliczana jest średnica pręta:

$$\sigma_r = \frac{F}{A} \leq k_r$$

Dla przekroju kołowego jest:

$$\sigma_r = \frac{4F}{\pi d^2} \leq k_r$$

Zatem średnica d jest równa:

$$d \geq \sqrt{\frac{4F}{\pi k_r}}$$

$$d \geq \sqrt{\frac{4 \cdot 40000}{\pi \cdot 95 \cdot 10^6}}$$

$$d \geq 0,02315 \text{ m}$$

Przyjęto średnicę $d = 24 \text{ mm}$

Wydłużenie ΔL będzie obliczone według prawa Hooke'a:

$$\Delta L = \frac{F \cdot L}{E \cdot A} = \frac{4F \cdot L}{E \pi d^2}$$

Wstawiając dane liczbowe otrzymuje się:

$$\Delta L = \frac{4 \cdot 40000 \cdot 2}{2,1 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot \pi \cdot 0,024^2} = 0,000842 \text{ m} = 0,842 \text{ mm}$$

Wydłużenie jednostkowe (względne) ε jest równe:

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L}$$

$$\varepsilon = \frac{0,000842}{2} = 0,000421$$

Odształcenie poprzeczne jednostkowe (względne):

$$\varepsilon_d = -\nu \cdot \varepsilon$$

$$\varepsilon_d = -0,3 \cdot 0,000421 = -0,0001263$$

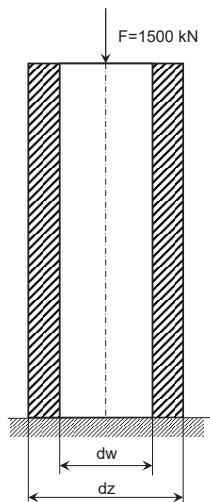
Odształcenie poprzeczne całkowite:

$$\Delta d = \varepsilon_d \cdot d$$

$$\Delta d = -0,0001263 \cdot 0,024 = -0,00000303 \text{ m} = -0,000303 \text{ mm}$$

Przykład 3.5.

Rura stalowa o przekroju pierścieniowym obciążona jest siłą ściskającą osiową $F = 1500 \text{ kN}$. Średnica wewnętrzna rury wynosi $d_w = 0,15 \text{ m}$. Obliczyć średnicę zewnętrzną rury d_z , jeżeli naprężenia ściskające nie mogą przekroczyć naprężeń dopuszczalnych $k_c = 70 \text{ MPa}$. Schemat obciążenia rury przedstawiono na rysunku 3.26.



Rys. 3.26. Schemat obciążenia rury

Rozwiązanie

Warunek wytrzymałościowy rury zapisano:

$$\sigma_c = \frac{F}{A} \leq k_c$$

Pole przekroju pierścieniowego rury wyraża się wzorem:

$$A = \frac{\pi(d_z^2 - d_w^2)}{4}$$

Zatem warunek wytrzymałościowy przyjmuje postać:

$$\sigma_c = \frac{4F}{\pi(d_z^2 - d_w^2)} \leq k_c$$

Po przekształceniach jest:

$$4F \leq \pi(d_z^2 - d_w^2) \cdot k_c$$

$$4F \leq \pi \cdot d_z^2 \cdot k_c - \pi \cdot d_w^2 \cdot k_c$$

$$4F + \pi \cdot d_w^2 \cdot k_c \leq \pi \cdot d_z^2 \cdot k_c$$

$$d_z \geq \sqrt{\frac{4F + \pi \cdot d_w^2 \cdot k_c}{\pi \cdot k_c}}$$

$$d_z \geq \sqrt{\frac{4F}{\pi \cdot k_c} + d_w^2}$$

Wstawiając dane liczbowe do ostatniego wzoru, uzyskuje:

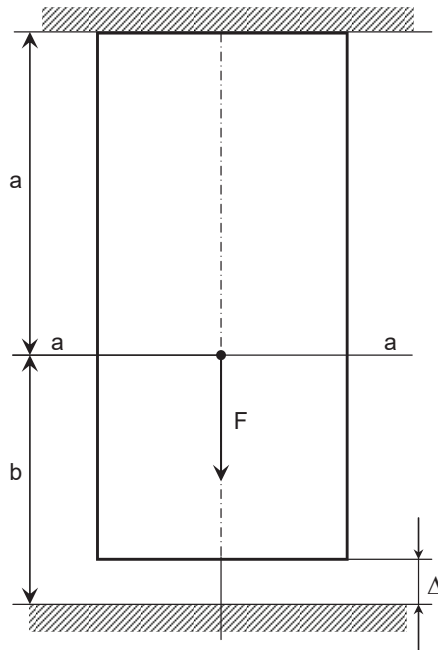
$$d_z \geq \sqrt{\frac{4 \cdot 1500000}{\pi \cdot 70 \cdot 10^6} + 0,15^2}$$

$$d_z \geq 0,22315 \text{ m}$$

Ostatecznie przyjęta średnica $d_z = 230$ mm spełnia warunek wytrzymałościowy.

Przykład 3.6.

Pręt stalowy o przekroju poprzecznym $A = 12 \text{ cm}^2$ i długości $L = a + b$ jest utwierdzony w górnej części. Natomiast między częścią dolną, a sztywną podstawą istnieje szczelina $\Delta = 0,22 \text{ mm}$. Należy wyznaczyć reakcje podstaw oraz naprężenia w obu częściach pręta, jeżeli w przekroju $\alpha - \alpha$ przyłożono siłę $F = 100000 \text{ N}$. Moduł Younga materiału pręta $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ MPa}$, $a = 1,5 \text{ m}$, $b = 0,5 \text{ m}$. Schemat układu prętowego przedstawiono na rysunku 3.27.

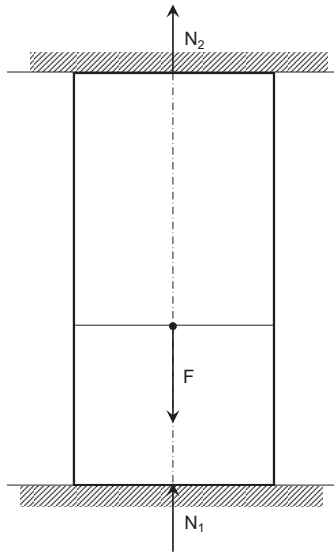
Rys. 3.27. Schemat pręta obciążonego siłą osiową F **Rozwiązanie**

W zadaniu tym rozpatruje się dwa przypadki:

Jeżeli wydłużenie pręta na długości a w wyniku działania siły F będzie mniejsza od $\Delta = 0,22$ mm, to pręt nie będzie się opierał o dolną podstawę i wystąpią w nim tylko naprężenia rozciągające w górnej części, co zapisano wzorem:

$$\sigma_{\alpha} = \frac{F}{A}$$

Jeżeli wydłużenie pręta będzie większe od Δ , to wówczas pręt będzie się opierał o dolną podstawę i w tym miejscu wystąpi oddziaływanie reakcji N , widoczne na rysunku 3.28.

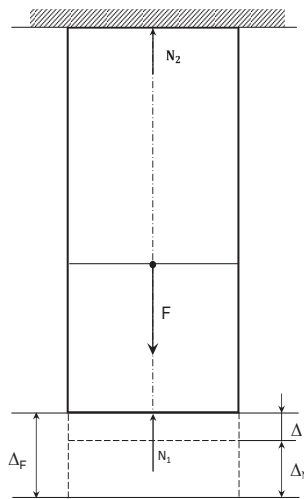


Rys. 3.28. Pręt po wydłużeniu opiera się o dolną podstawę

W zakresie równań równowagi ciała sztywnego na podstawie rysunku 3.28. można napisać tylko jedno równanie:

$$N_1 - F + N_2 = 0$$

W równaniu powyższym są dwie niewiadome N_1 i N_2 , a więc występuje tu przypadek układu jednokrotnie statycznie niewyznaczalnego. W celu rozwiązania zadania należy ułożyć dodatkowe równanie, korzystając z warunku zgodności odkształceń pręta. W tym celu myślowo będzie usunięta podstawa dolna, a pręt pod wpływem działania siły F przesunie się o Δ_F widoczną na rysunku 3.29.



Rys. 3.29. Przesunięcie pręta o Δ_F wpływem działania siły F

Zależność na przesunięcie Δ_F zapisano wzorem, korzystając z prawa Hooke'a:

$$\Delta_F = \frac{F \cdot a}{E \cdot A}$$

W układzie rzeczywistym nieodkształcalna podstawa dolna nie pozwala na przesunięcie i oddziałuje na pręt reakcją N_1 , która powoduje skrócenie pręta o Δ_N , co będzie zapisane wzorem:

$$\Delta_N = \frac{N_1 \cdot a}{E \cdot A} + \frac{N_1 \cdot b}{E \cdot A} = \frac{N_1}{E \cdot A} (a + b)$$

Warunek zgodności odkształceń zapisano:

$$\Delta_F = \Delta + \Delta_N$$

Wstawiając do powyższego wzoru, wyznaczone wcześniej zależności na Δ_F i Δ_N otrzyma się zapis:

$$\frac{F \cdot a}{E \cdot A} = \Delta + \frac{N_1}{E \cdot A} (a + b)$$

Stąd wyrażenie na N_1 otrzyma postać:

$$\frac{N_1}{E \cdot A} (a + b) = \frac{F \cdot a}{E \cdot A} - \Delta$$

$$\frac{N_1}{E \cdot A} = \frac{F \cdot a - \Delta \cdot E \cdot A}{E \cdot A \cdot (a + b)}$$

$$N_1 = \frac{F \cdot a - \Delta \cdot E \cdot A}{E \cdot A \cdot (a + b)} \cdot E \cdot A$$

$$N_1 = F \cdot \frac{a}{a + b} - \Delta \frac{E \cdot A}{a + b}$$

Wstawiając dane liczbowe do ostatniego wzoru, obliczona wartość reakcji N_1 jest równa:

$$N_1 = 100000 \cdot \frac{1,5}{2} - 0,00022 \frac{2,1 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 0,0012}{2} = 47280 \text{ N}$$

Z warunku równowagi sił wyznaczona reakcja N_2 wynosi:

$$N_2 = F - N_1$$

$$N_2 = 100000 - 47280 = 52720 \text{ N}$$

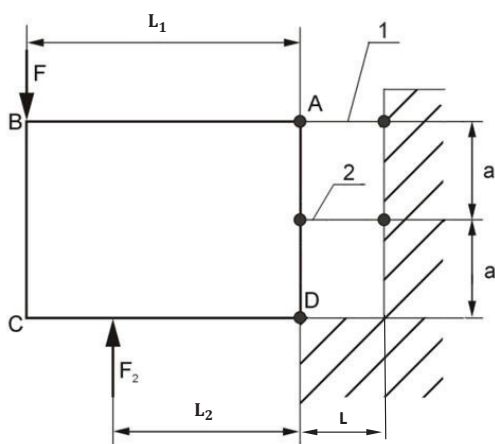
Z układu sił na rysunku 3.29 wynika, że górna część pręta będzie rozciągana siłą N_2 , a część dolna będzie ścismana siłą N_1 . Stąd obliczone naprężenia przyjmują odpowiednie wartości:

$$\sigma_a = \frac{N_2}{A} = \frac{52720}{0,0012} = 43933333,33 \text{ Pa} = 43,93 \text{ MPa}$$

$$\sigma_b = -\frac{N_1}{A} = -\frac{47280}{0,0012} = -39400000 \text{ Pa} = -39,4 \text{ MPa}$$

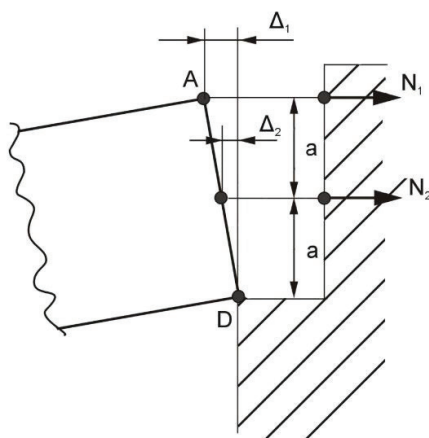
Przykład 3.7.

Sztywny arkusz blachy o kształcie prostokąta $ABCD$, podparty przegubowo w punkcie D , utrzymywany jest za pomocą dwóch stalowych prętów o jednakowej długości. Obciążony jest siłą $F_1 = 120000$ N oraz siłą $F_2 = 50000$ N. Obliczyć średnicę prętów, jeżeli pole przekroju pręta 2 powinno być dwa razy większe niż pręta 1. Dopuszczalne naprężenie na rozciąganie materiału pręta 1 i pręta 2 wynosi $k_r = 120$ MPa. Odpowiednio wymiary liniowe wynoszą: $a = 0,5$ m, $L_1 = 2$ m, $L_2 = 1,2$ m. Schemat obciążenia przedstawiono na rysunku 3.30.

Rys. 3.30. Schemat obciążenia arkusza blach $ABCD$

Rozwiązanie

Pod wpływem działania sił zewnętrznych F_1 i F_2 w prętach powstaną siły rozciągające N_1 i N_2 oraz odkształcenia Δ_1 i Δ_2 . Rozpatrywany układ prętów po odkształceniu przedstawiono na rysunku 3.31.

Rys. 3.31. Odkształcenia prętów Δ_1 i Δ_2

Dokonując sumowania momentów względem punktu D powstanie równanie:

$$\sum M_{i(D)} = -F_1 \cdot L_1 + F_2 \cdot L_2 + N_1 \cdot 2a + N_2 \cdot a = 0$$

W równaniu tym występują dwie niewiadome: N_1 i N_2 . Jedno równanie, dwie niewiadome, a więc układ jednokrotnie niewyznaczalny. Można tu jeszcze wprowadzić dwie składowe reakcji w punkcie D i napisać równania sumy rzutów sił na osie x i y . W takim przypadku byłoby 3 równania i 4 niewiadome. Zatem wystarczające jest równanie sumy momentów.

Na podstawie rysunku 3.31 równanie zgodności odkształceń prętów daje się zapisać:

$$\frac{\Delta_1}{\Delta_2} = \frac{2a}{a}$$

$$\text{Stąd: } \Delta_1 = 2\Delta_2$$

Odształcenie prętów Δ_1 i Δ_2 na podstawie prawa Hooke'a będzie wyrażone za pomocą wzorów:

$$\Delta_1 = \frac{N_1 \cdot L}{E \cdot A_1}, \quad \Delta_2 = \frac{N_2 \cdot L}{E \cdot A_2} = \frac{N_2 \cdot L}{E \cdot 2A_1}$$

Stąd równanie zgodności odkształceń można zapisać w postaci:

$$\frac{N_1 \cdot L}{E \cdot A_1} = 2 \frac{N_2 \cdot L}{E \cdot 2A_1}$$

Ostatni wzór dowodzi, że:

$$N_1 \cdot L \cdot E \cdot 2A_1 = E \cdot A_1 \cdot 2N_2 \cdot L$$

Stąd wynika, że:

$$N_1 = N_2 = N$$

Podstawiając $N_1 = N_2 = N$ do równania sumy momentów otrzymuje się wyrażenie na reakcję N .

$$F_1 \cdot L_1 - F_2 \cdot L_2 = 3N \cdot a$$

$$N = \frac{F_1 \cdot L_1 - F_2 \cdot L_2}{3 \cdot a}$$

Wstawiając dane liczbowe i wykonując obliczenia otrzymuje się:

$$N = \frac{120000 \cdot 2 - 50000 \cdot 1,2}{3 \cdot 0,5} = 120000 N$$

Warunek wytrzymałościowy dla pręta pierwszego zapisano:

$$\sigma = \frac{N}{A_1} \leq k_r$$

gdzie:

$$A_1 = \frac{\pi d_1^2}{4}$$

Zatem średnica pręta pierwszego wynosi:

$$\sigma = \frac{4N}{\pi d_1^2} \leq k_r$$

$$d_1 \geq \sqrt{\frac{4N}{\pi \cdot k_r}}$$

$$d_1 \geq \sqrt{\frac{4120000}{\pi \cdot 120 \cdot 10^6}}$$

$$d_1 \geq 0,0357 \text{ m}$$

Przyjęto średnicę pręta pierwszego $d_1 = 36 \text{ mm}$.

Biorąc pod uwagę założenie w treści zadania, że:

$$A_2 = 2A_1$$

można zapisać:

$$\frac{\pi d_2^2}{4} = 2 \frac{\pi d_1^2}{4}$$

stąd:

$$\pi d_2^2 = 2\pi d_1^2$$

$$d_2 = d_1 \sqrt{2}$$

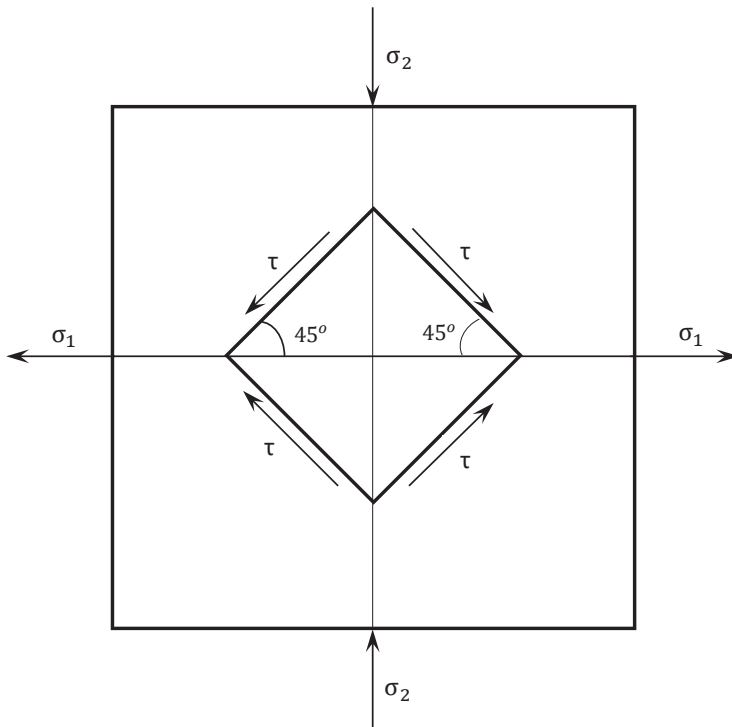
$$d_2 = 36\sqrt{2} = 50,91 \text{ mm}$$

Przyjęto średnicę pręta drugiego $d_2 = 52 \text{ mm}$.

4. ŚCINANIE

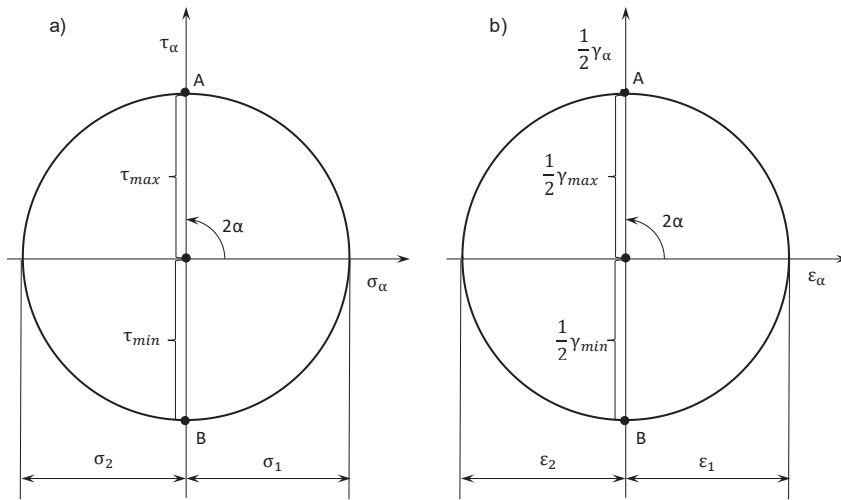
4.1. STAN CZYSTEGO ŚCINANIA I ŚCINANIA TECHNICZNEGO

Ścinaniem czystym nazywa się taki przypadek, gdy siły wewnętrzne w rozpatrywanym przekroju sprowadzają się jedynie do siły tnącej, leżącej w płaszczyźnie tego przekroju. W zagadnieniach praktycznych przypadek czystego ścinania występuje bardzo rzadko. Najczęściej z naprężeniami stycznymi występują naprężenia normalne. Obraz naprężeń stycznych przedstawiono na rysunku 4.1.



Rys. 4.1. Stan czystego ścinania

W przypadku czystego ścinania koła Mohra zarówno dla naprężeń, jak i dla odkształceń przyjmują położenie środkowe, co przedstawiono na rysunku 4.2.



Rys. 4.2. Koło Mohra: a) największe naprężenie styczne $\tau_{max} = \sigma_1$,
 b) największe odkształcenie postaciowe $\frac{1}{2} \gamma_{max} = \epsilon_1$

Z rysunku 4.2a wynika, że największe naprężenia styczne $\tau = \tau_{max} = \sigma_1 = / \sigma_2 /$ występują na płaszczyznach nachylonych pod kątem 45° do osi głównych. Na tych płaszczyznach nie występują naprężenia normalne i dlatego ten przypadek nazywa się ścinaniem czystym. Z kolei z rysunku 4.2b wynika, że $\frac{1}{2} \gamma = \frac{1}{2} \gamma_{max} = \epsilon_1 = / \epsilon_2 /$. Element, który poddany jest tylko naprężeniom stycznym ulega jedynie odkształceniu postaciowemu. Można zatem zauważyć zależność pomiędzy naprężeniem stycznym τ i odkształceniem postaciowym γ .

Korzystając z uogólnionego prawa Hooke’a można napisać:

$$\epsilon_1 = \frac{1}{E} (\sigma_1 - \nu \cdot \sigma_2)$$

W przypadku ścinania czystego $\sigma_1 = -\sigma_2$ daje się zapisać:

$$\epsilon_1 = \sigma_1 \cdot \frac{1 + \nu}{E}$$

Korzystając z równości $\sigma_1 = \tau$ i $\epsilon_1 = \frac{1}{2} \gamma$ otrzymuje się wzór wyrażający prawo Hooke’a dla ścinania:

$$\tau = \gamma \cdot G \tag{4.1}$$

gdzie:

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \tag{4.2}$$

G wyrażone wzorem (4.2) jest modułem sprężystości poprzecznej (zwanym też modułem ścinania lub modułem Kirchoffa).

W rzeczywistych układach mechanicznych łącznie z naprężeniami stycznymi występują naprężenia normalne, chociaż są pewne elementy maszyn, w których

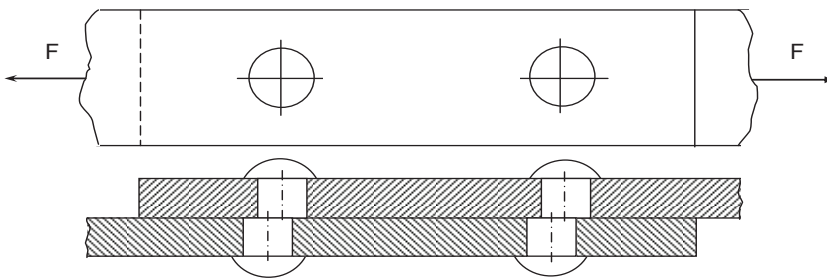
naprężenia styczne wykazują dominujące znaczenie. Na przykład, elementami tymi są: nity, kołki, sworznie, czopy wałów, połączenia spawane.

W podanych wyżej przypadkach występuje ścinanie, które nazywane jest ścinaniem technicznym.

Dobrym przykładem na omówienie obliczeń wytrzymałościowych związanych ze ścinaniem technicznym jest połączenie nitowe dwóch płaskowników poddanych siłom rozciągającym. Zniszczenie lub uszkodzenie połączenia nitowego może być rozpatrywane zasadniczo na trzy sposoby.

Sposób I:

W sposobie tym uwzględnia się ścinanie nitów, co zostało przedstawione na rysunku 4.3.

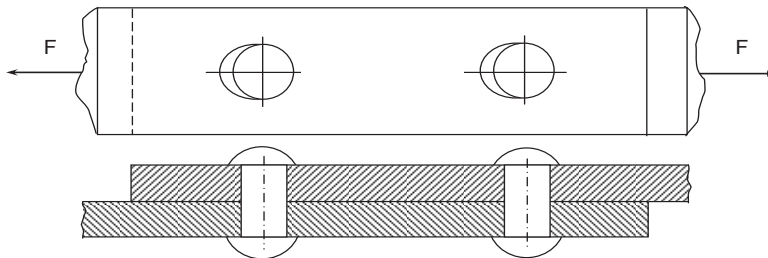


Rys. 4.3. Uszkodzenie złącza nitowego przez ścięcie nitów

Ścinanie nitów zawsze zachodzi w miejscu stykających się powierzchni łączonych elementów, szczególnie wtedy, gdy siły tarcia między tymi powierzchniami wynikające z docisku są zbyt małe w stosunku do siły F rozciągającej złącze.

Sposób II:

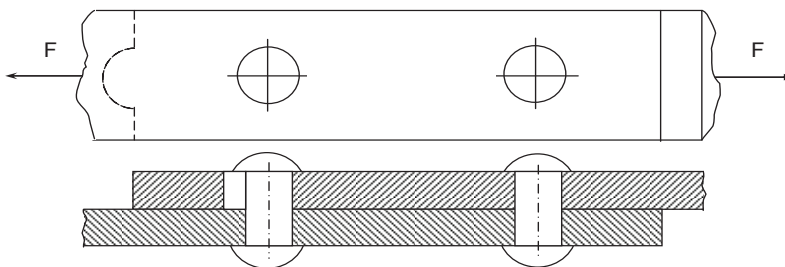
Ten sposób uwzględnia owalizację otworów oraz odkształcenia nitów lub łączonych płaskowników, które wynikają z uplastycznienia wywołanego dociskiem powierzchniowym. Ten sposób uszkodzenia przedstawiono na rysunku 4.4.



Rys. 4.4. Uszkodzenie złącza nitowego przez owalizację otworów, odkształcenie nitów lub łączonych płaskowników

Sposób III:

Uwzględnia miejsce najłabszego przekroju wynikające z odległości otworu pod nity od krawędzi płaskownika, sprzyjające pękaniu i zerwaniu się płaskownika. Przykład takiego uszkodzenia przedstawiono na rysunku 4.5.



Rys. 4.5. Uszkodzenie złącza nitowego przez pęknięcie i zerwanie się płaskownika

Warunek wytrzymałościowy ze względu na ścinanie może być zapisany w postaci ogólnej:

$$\sigma_t = \frac{T}{A} \leq k_t \quad (4.3)$$

gdzie: T – siła ścinająca, A – przekrój elementu podlegającego ścinaniu, k_t naprężenia dopuszczalne na ścinanie.

W połączeniach nitowanych zakłada się równomierny rozkład sił ścinających we wszystkich nitach rozpatrywanego złącza nitowego, przy równoczesnym uwzględnieniu liczby płaszczyzn cięcia nitu. W odniesieniu do połączenia nitowego warunek wytrzymałościowy można zapisać:

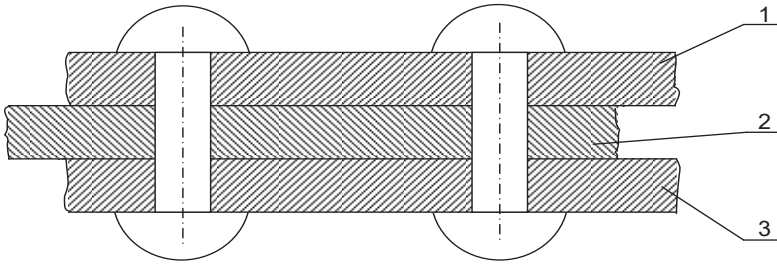
$$\sigma_t = \frac{F}{\frac{n \cdot i \cdot \pi \cdot d^2}{4}} \leq k_t \quad (4.4)$$

gdzie: F – siła obciążająca, a połączenie nitowe, n – obliczeniowa liczba nitów tworząca połączenie, i – liczba płaszczyzn cięcia nitu, d – średnica nitu, k_t naprężenie dopuszczalne na ścinanie materiału, z którego wykonane są nity.

Liczbę płaszczyzn cięcia nitu określa się z zależności:

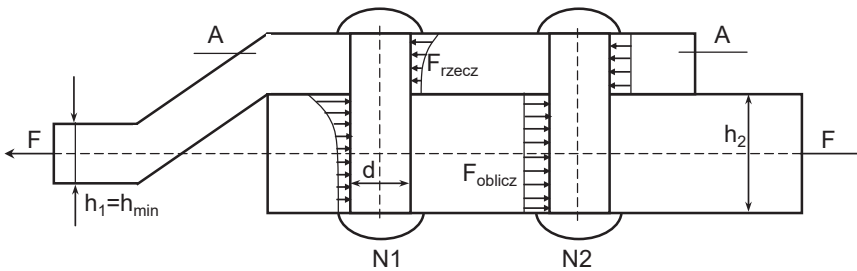
$$i = k - 1 \quad (4.5)$$

gdzie: k – liczba elementów (płaskowników lub blach) łączonych ze sobą za pomocą nitów. Przykład, gdzie liczba płaszczyzn cięcia nitu $i = 2$ przedstawiono na rysunku 4.6.

Rys. 4.6. Połączenie nitowe o liczbie płaszczyzn cięcia $i = 2$

Połączenie nitowe na rysunku 4.6 składa się z 3 elementów. Zatem liczba płaszczyzn cięcia nitu $i = 2$. Jedna płaszczyzna cięcia nitu jest w miejscu styku płaszczyzny elementu 1 i 2, a druga płaszczyzna cięcia w miejscu styku płaszczyzn elementu 2 i 3.

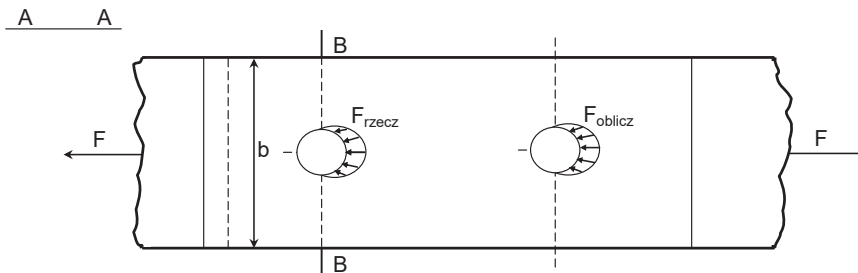
Obliczenia wytrzymałościowe połączenia nitowego omówiono na przykładzie przedstawionym na rysunku 4.7.



Rys. 4.7. Połączenie nitowe dwóch elementów dwoma nitami

Połączenie nitowe z rysunku 4.7 charakteryzuje się następująco: liczba nitów $n = 2$, liczba płaszczyzn ścinania nitu $i = 1$, siła ścinająca $T = \frac{1}{2} F$.

Obliczenia nitów na docisk prowadzi się zakładając, że nacisk przekazywany na nit rozkłada się równomiernie na całej powierzchni docisku. Jednakże rzeczywisty rozkład nacisków dla nitu N1, a także rozkład uśredniony przyjmowany do obliczeń nitu N2 jest inny, czyli taki jak przedstawiono na rysunku 4.7 i 4.8.



Rys. 4.8. Rzeczywisty rozkład nacisków dla nitu $N1$ i rozkład uśredniony dla nitu $N2$

Naprężenia na docisk oblicza się z warunku:

$$p_d = \frac{T}{A_d} \leq p_{dop} \quad (4.6)$$

gdzie: A_d – całkowita obliczeniowa powierzchnia na docisk, określana jest jako rzut rzeczywistej powierzchni docisku na płaszczyznę prostopadłą do kierunku działania siły ścinającej T , p_{dop} – naprężenie dopuszczalne na docisk.

Naprężenia dopuszczalne na docisk przyjmowane są zwykle według reguły, że $p_{dop} = (2 \div 2,5) k_c$. Wielkość k_c jest tu dopuszczalnym naprężeniem na ściskanie. W połączeniu nitowym warunek na docisk można zapisać:

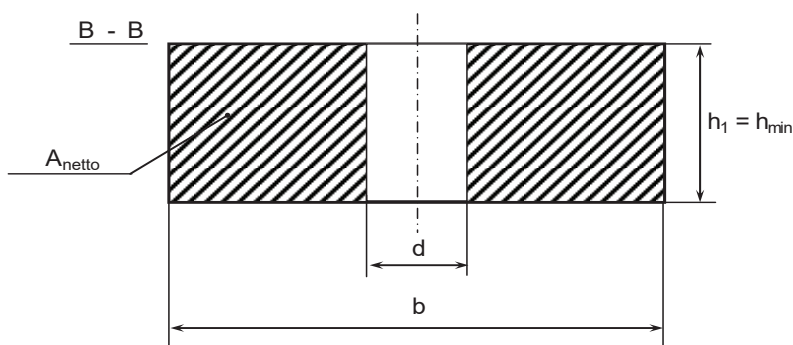
$$p_d = \frac{F}{n \cdot d \cdot h_{min}} \leq p_{dop} \quad (4.7)$$

gdzie: F – siła obciążająca złącze nitowe, n – liczba nitów, d – średnica nitu, $h_{min} = h_1$ – jest to grubość cieńszego elementu występującego w złączu nitowym.

Wykonanie otworów na nity osłabia łączone elementy, a zatem występuje konieczność sprawdzenia warunku wytrzymałościowego ze względu na rozciąganie osłabionych przekrojów. Sprawdzenie to można przeprowadzić według wzoru:

$$\sigma_t = \frac{T}{A_{netto}} \leq k_t \quad (4.8)$$

Odwołując się do połączenia przedstawionego na rysunku 4.7 w obliczeniach, należy uwzględnić ten przekrój, w którym wystąpi największa siła rozciągająca oraz najmniejszy przekrój A_{netto} . Z wykresu sił podłużnych na rysunku 4.8 wynika, że najsłabszym przekrojem jest przekrój B – B elementu o grubości h_1 . Wydzielone pole przekroju B – B przedstawiono na rysunku 4.9.

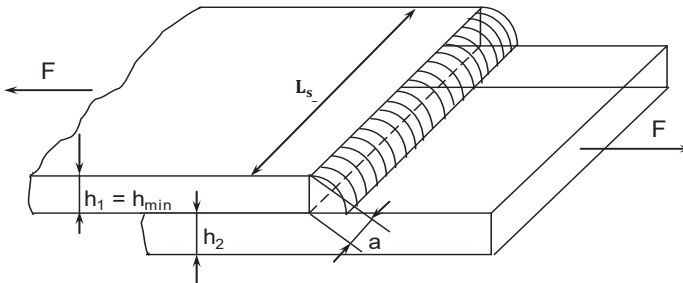
Rys. 4.9. Najmniejsze pole przekroju A_{netto} złącza nitowego

Pole przekroju $A_{netto} = h_1 (b - d)$ jest najsłabszym miejscem rozpatrywanego złącza, stąd też przy projektowaniu takiego węzła należy zwrócić szczególną uwagę na chropowatość otworu o średnicy d , jak i samego nitu.

Metoda stosowana do obliczeń wytrzymałościowych połączeń nitowych odnosi się także do połączeń sworzniowych, kołkowych, połączeń klinowych i wpustowych, wobec czego nie będzie tu omawiana.

Przy projektowaniu połączenia nitowego powinno się brać pod uwagę rzeczywiste warunki przenoszenia obciążeń zewnętrznych przez to połączenie, mając na uwadze, że rozpatrywane uszkodzenia na trzy sposoby mogą występować jednocześnie.

Omówione będą natomiast obliczenia połączeń spawanych, których przykład przedstawiono na rysunku 4.10.



Rys. 4.10. Połączenie spawane ze spoiną pachwinową

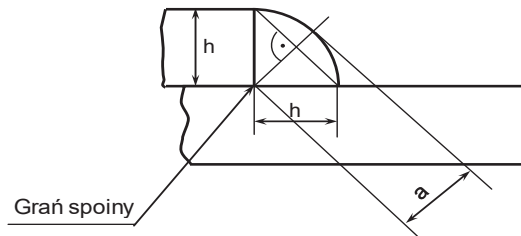
Połączenie spawane zostanie zniszczone wówczas, jeżeli nastąpi ścięcie spoiny w płaszczyźnie najsłabszego przekroju wyrażonego iloczynem $a \cdot L_s$.

Warunek wytrzymałościowy spoiny będzie zapisany:

$$\sigma_t = \frac{F}{L \cdot a} \leq k_s \quad (4.9)$$

gdzie: F – siła obciążająca spoinę, L – obliczeniowa długość spoiny, liczona jako suma wszystkich spoin występujących w rozpatrywanym połączeniu (przykład połączenia na rysunku 4.10 ma $L = L_s$), a – obliczeniowa grubość spoiny, k_s – naprężenia dopuszczalne na ścinanie materiału spoiny.

Obliczeniowa grubość spoiny przyjmowana jest jako wysokość trójkąta wpisanego w przekrój spoiny wyprowadzoną z grani spoiny. Sposób wymiarowania grubości spoiny przedstawiono na rysunku 4.11.



Rys. 4.11. Wymiarowanie spoiny pachwinowej

Maksymalną grubość spoiny można obliczyć według wzoru:

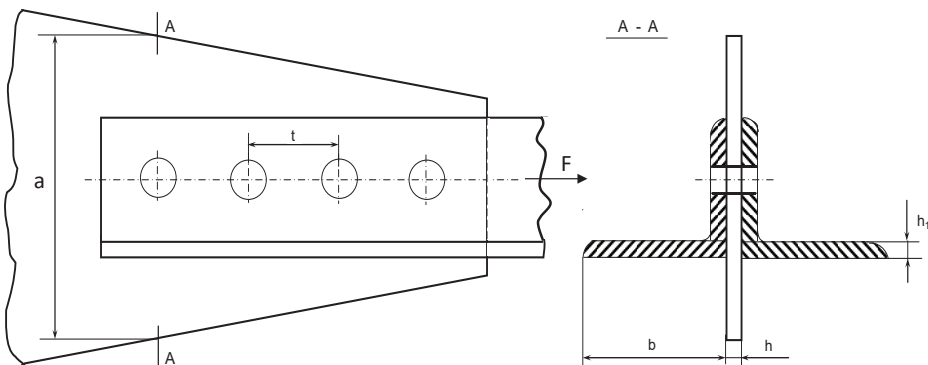
$$a = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot h_{min} = 0,707 \cdot h_{min} \quad (4.10)$$

Wielkość h_{min} we wzorze odnosi się do grubości cieńszego elementu rozpatrywanego połączenia spawanego. W praktyce długość obliczeniową spoiny L_s powinno się powiększać do wymiaru $L = L_s + 2a$, ze względu na powstawanie kraterów na końcach spoiny.

4.2. PRZYKŁADY ZADAŃ Z ROZWIĄZANIAMİ

Przykład 4.1.

Do płaskownika o grubości $h = 12,5$ mm przynitowano dwa kątowniki równoramienne. Siła rozciągająca przyłożona do kątowników wynosi $F = 200$ kN. Należy dobrać kątowniki i obliczyć nity, przyjmując naprężenia dopuszczalne na rozciąganie $k_r = 100$ MPa, naprężenia dopuszczalne na ścinanie $k_t = 80$ MPa oraz naprężenia dopuszczalne na docisk $p_d = 200$ MPa. Schemat połączenia nitowego przedstawiono na rysunku 4.12.



Rys. 4.12. Połączenie nitowe

Rozwiązanie

Warunek wytrzymałościowy zapisano wzorem:

$$\sigma = \frac{F}{A} \leq k_r$$

Z tego wzoru będzie obliczony przekrój netto A_{netto} obydwu kątowników

$$A_{netto} = \frac{F}{k_r}$$

$$A_{netto} = \frac{200 \cdot 10^3}{100 \cdot 10^6} = 0,002 \text{ m}^2$$

Przekrój netto dla jednego kątownika wynosi:

$$A_{\text{netto}} = 0,002 \cdot \frac{1}{2} = 0,001 \text{ m}^2$$

Z tablic wyrobów walcowanych polskich hut wybrano kątownik o wymiarach: 80 x 80 x 8 mm

dla którego przekrój brutto wynosi:

$$A_{\text{brutto}} = 0,00123 \text{ m}^2$$

Średnicę nita przyjmuje się zwykle $1,5 \div 2,5$ grubości jednego z nitowanych elementów. Będzie zatem przyjęta średnica nitów $d = 0,02$ m.

W celu ułatwienia nitowania średnica nita powinna spełniać warunek:

$$d \leq \frac{b - h_1}{3}$$

Zatem

$$d \leq \frac{0,08 - 0,008}{3}$$

co w rozpatrywanym przykładzie jest spełnione.

Wymiar $b = 0,08$ m jest szerokością kątownika, a wymiar $h_1 = 0,008$ m jest grubością kątownika.

Dla jednego kątownika przekrój netto będzie obliczony:

$$A_{\text{netto}} = A_{\text{brutto}} - h_1 \cdot d$$

$$A_{\text{netto}} = 0,00123 - 0,008 \cdot 0,02 = 0,00107 \text{ m}^2$$

Przekrój netto jest nieco większy od wymaganego $A_{\text{netto}} = 0,001 \text{ m}^2$. Liczba płaszczyzn cięcia nitów $i = 2$, co jest widoczne na przekroju A - A rysunku 4.12.

Ilość nitów oblicza się z warunku wytrzymałościowego:

$$\tau = \frac{4F}{n \cdot i \cdot \pi d^2} \leq k_t$$

$$n \geq \frac{4F}{i \cdot \pi d^2 \cdot k_t}$$

$$n \geq \frac{4 \cdot 200 \cdot 10^3}{2 \cdot \pi \cdot 0,02^2 \cdot 80 \cdot 10^6}$$

$$n \geq 3,98$$

Przyjęto, że ilość nitów będzie $n = 4$.

Następnie sprawdzona będzie grubość płaskownika z warunku na docisk:

$$p_d = \frac{F}{n \cdot d \cdot h} \leq p_{\text{dop}}$$

$$h \geq \frac{F}{n \cdot d \cdot p_{\text{dop}}}$$

$$h \geq \frac{200 \cdot 10^3}{4 \cdot 0,02 \cdot 200 \cdot 10^6}$$

$$h \geq 0,0125 \text{ m}$$

Grubość płaskownika $h = 12,5$ mm spełnia warunek wytrzymałościowy ze względu na docisk.

Należy jeszcze doliczyć szerokość a płaskownika w przekroju A – A, który przenosi całe obciążenie od siły F . Niezbędną szerokość a w tym przekroju wyznacza się z warunku:

$$\sigma_r = \frac{F}{(a-d)h} \leq k_r$$

$$F \leq (a \cdot h - d \cdot h) \cdot k_r$$

$$F + d \cdot h \cdot k_r \leq a \cdot h \cdot k_r$$

$$a \geq \frac{F}{h \cdot k_r} + d$$

Wstawiając dane liczbowe, obliczona szerokość a płaskownika w przekroju AA wynosi:

$$a \geq \frac{200 \cdot 10^3}{0,0125 \cdot 100 \cdot 10^6} + 0,02$$

$$a \geq 0,18 \text{ m}$$

Odległość między nitami, czyli podziałka t zwykle przyjmowana jest następująco:

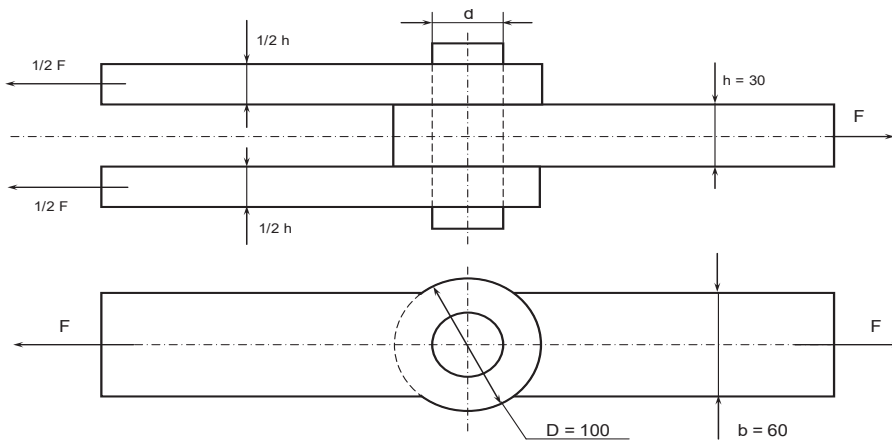
$$t = (3,5 \div 4) d$$

$$t = 4 \cdot 0,02 = 0,08 \text{ m}$$

Podziałka t w połączeniu nitowym została pokazana na rysunku 4.12.

Przykład 4.2.

Obliczyć dopuszczalną wartość siły F , jaką można obciążyć połączenie sworzniowe o wymiarach podanych na rysunku. Naprężenie dopuszczalne na rozciąganie $k_r = 140$ MPa, na ściskanie $k_t = 60$ MPa, na docisk $p_{dop} = 200$ MPa. Połączenie przedstawiono na rysunku 4.13.



Rys. 4.13. Połączenie sworzniowe obciążone siłą rozciągającą

Rozwiązanie

Wyznaczenie siły z warunku na zerwanie płaskownika:

$$\sigma_r = \frac{F}{A} \leq k_r$$

$$F \leq A \cdot k_r$$

$$F \leq 0,03 \cdot 0,06 \cdot 140 \cdot 10^6$$

$$F \leq 252000 \text{ N}$$

Wyznaczenie siły z warunku na zerwanie ucha płaskownika:

$$\sigma_r = \frac{F}{(D-d) \cdot h} \leq k_r$$

$$F \leq (D-d) \cdot h \cdot k_r$$

$$F \leq (0,1 - 0,04) \cdot 0,03 \cdot 140 \cdot 10^6$$

$$F \leq 252000 \text{ N}$$

Wyznaczenie siły z warunku na ścięcie sworznia, uwzględniając, że sworznień ma dwie płaszczyzny cięcia:

$$\sigma_t = \frac{4F}{2 \cdot \pi d^2} \leq k_t$$

$$F \leq \frac{1}{2} \pi d^2 \cdot k_t$$

$$F \leq \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 0,04^2 \cdot 60 \cdot 10^6$$

$$F \leq 150720 \text{ N}$$

Wyznaczenie siły z warunku na docisk powierzchniowy:

$$p_d = \frac{F}{h \cdot d} \leq p_{dop}$$

$$F \leq h \cdot d \cdot p_{dop}$$

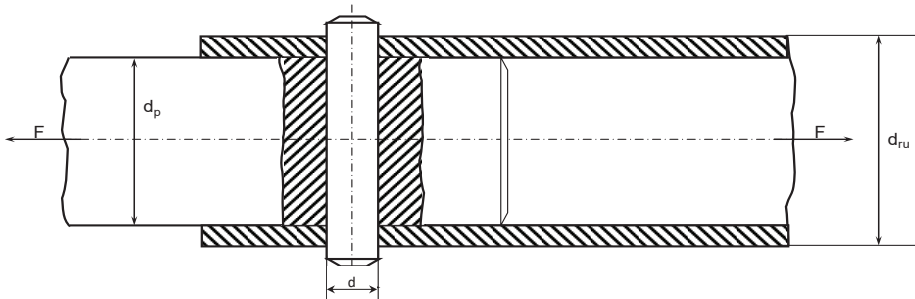
$$F \leq 0,03 \cdot 0,04 \cdot 200 \cdot 10^6$$

$$F \leq 240000 \text{ N}$$

Dopuszczalną siłą, jaką można obciążyć połączenie sworzniowe jest siła $F = 150\,720 \text{ N}$ wyznaczona z warunku na ścięcie sworznia.

Przykład 4.3.

Dane jest połączenie kołkowe pręta o średnicy $d_{pr} = 40 \text{ mm}$ z rurą o średnicy zewnętrznej $d_{ru} = 50 \text{ mm}$. Obliczyć obciążenie, jakie może przenosić to połączenie, jeżeli dane są: średnica kołka $d = 20 \text{ mm}$, naprężenie dopuszczalne na rozciąganie $k_r = 120 \text{ MPa}$, naprężenie dopuszczalne na ścinanie $k_t = 70 \text{ MPa}$, naprężenie dopuszczalne na docisk $p_{dop} = 280 \text{ MPa}$. Połączenie to przedstawiono na rysunku 4.14.



Rys. 4.14. Połączenie kołkowe pręta z rurą

Rozwiązanie

Siłę F ze względu na ścinanie kołka określa się ze wzoru:

$$\sigma_t = \frac{4F}{2\pi d^2} \leq k_t$$

$$F \leq \frac{1}{2} \cdot \pi d^2 \cdot k_t$$

$$F \leq \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 0,02^2 \cdot 70 \cdot 10^6$$

$$F \leq 43960 \text{ N}$$

Siłę F ze względu na zerwanie pręta wyznacza się ze wzoru:

$$\sigma_r = \frac{F}{\frac{\pi \cdot d_p^2}{4} - d_p \cdot d} \leq k_r$$

$$\sigma_r = \frac{F}{\frac{\pi \cdot d_{pr}^2}{4} - 4d_{pr} \cdot d} \leq k_r$$

$$\sigma_r = \frac{4F}{\pi \cdot d_{pr}^2 - 4d_{pr} \cdot d} \leq k_r$$

$$F \leq \left(\frac{\pi \cdot d_{pr}^2}{4} - d_{pr} \cdot d \right) \cdot k_r$$

$$F \leq \left(\frac{\pi \cdot 0,04^2}{4} - 0,04 \cdot 0,02 \right) \cdot 120 \cdot 10^6$$

$$F \leq 54720 \text{ N}$$

Siłę F ze względu na zerwanie rury określa się:

$$\sigma_r = \frac{F}{\frac{\pi \cdot d_{ru}^2}{4} - \frac{\pi \cdot d_{pr}^2}{4} - d(d_{ru} - d_{pr})} \leq k_r$$

$$\sigma_r = \frac{F}{\frac{\pi \cdot d_{ru}^2 - \pi \cdot d_{pr}^2 - 4d(d_{ru} - d_{pr})}{4}} \leq k_r$$

$$\sigma_r = \frac{4F}{\pi \cdot d_{ru}^2 - \pi \cdot d_{pr}^2 - 4d(d_{ru} - d_{pr})} \leq k_r$$

$$F \leq \frac{\pi \cdot d_{ru}^2 - \pi \cdot d_{pr}^2 - 4d(d_{ru} - d_{pr})}{4} \cdot k_r$$

$$F \leq \left[\frac{\pi \cdot d_{ru}^2}{4} - \frac{\pi \cdot d_{pr}^2}{4} - d(d_{ru} - d_{pr}) \right] \cdot k_r$$

Wstawiając dane liczbowe do ostatniego wyrażenia, otrzymuje się:

$$F \leq \left[\frac{\pi \cdot 0,05^2}{4} - \frac{\pi \cdot 0,04^2}{4} - 0,02(0,05 - 0,04) \right] \cdot 120 \cdot 10^6$$

$$F \leq 60780 \text{ N}$$

Ze względu na to, że powierzchnia docisku pomiędzy kołkiem a rurą jest dużo mniejsza od powierzchni docisku pomiędzy kołkiem a prętem, obliczenia będą wykonane tylko z warunku na docisk pomiędzy kołkiem a rurą.

A zatem spełnienie warunku na docisk określa wzór:

$$p_d = \frac{F}{d(d_{ru} - d_{pr})} \leq p_{dop}$$

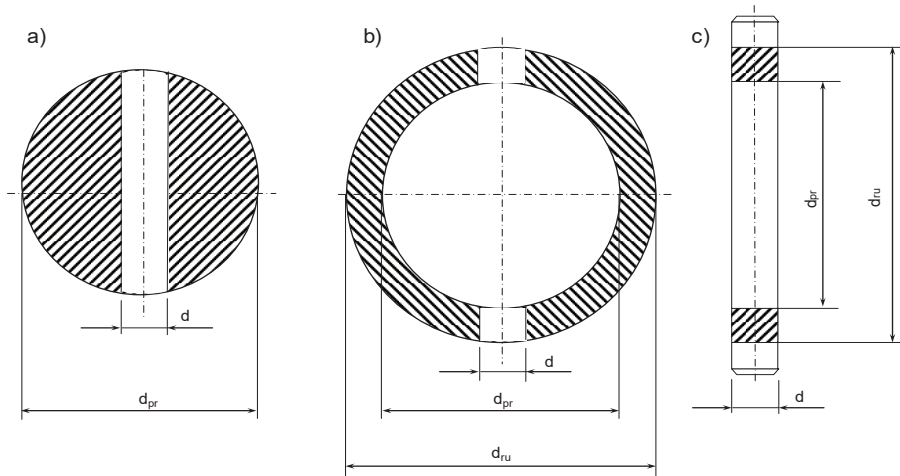
$$F \leq d(d_{ru} - d_{pr}) \cdot p_{dop}$$

$$F \leq 0,02(0,05 - 0,04) \cdot 280 \cdot 10^6$$

$$F \leq 56000 \text{ N}$$

Połączenie najmniejszą siłę może przenosić ze względu na ścinanie kołka, która wynosi $F \leq 43960 \text{ N}$. Siłę tę przyjęto jako dopuszczalne obciążenie dla rozpatrywanego połączenia kołkowego.

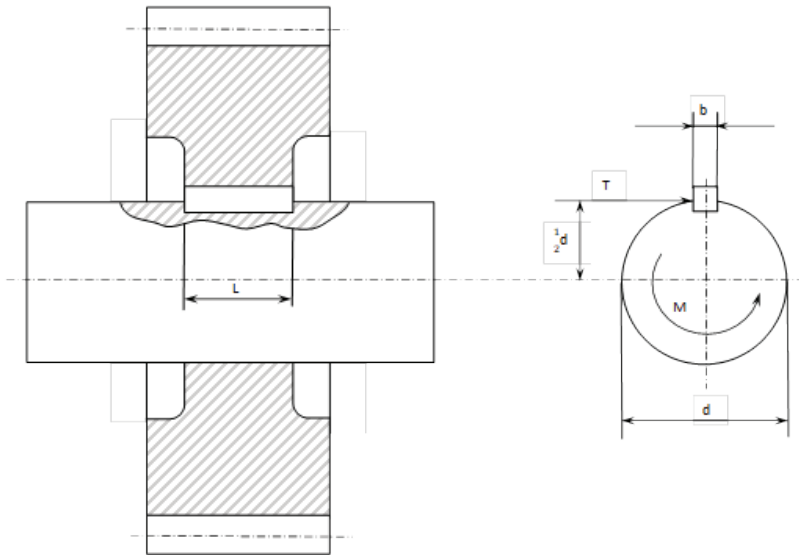
W celu lepszego uwidocznienia analizowanego obliczeniowo połączenia kołkowego, przedstawiono na rysunku 4.15 pojedyncze elementy tworzące to połączenie.



Rys. 4.15. Elementy tworzące połączenie kołkowe: a) pręt o średnicy d_{pr} , b) rura o średnicy zewnętrznej d_{ru} , c) kołek z znacznymi miejscami docisku

Przykład 4.4.

Na wałę o średnicy $d = 50$ mm osadzono koło zębate za pomocą wpustu. Koło to przekazuje moc $N = 50$ kW przy prędkości obrotowej $n = 450$ min⁻¹. Oblicz długość L wpustu, jeżeli naprężenia dopuszczalne na ścianie materiału wpustu $k_t = 80$ MPa, a szerokość wpustu $b = 8$ mm. Połączenie wału z kołem przedstawiono na rysunku 4.16.



Rys. 4.16. Koło zębate połączone z wałem za pomocą wpustu

Rozwiązanie

Moment obrotowy na wale oblicza się ze wzoru:

$$M = 9550 \cdot \frac{N}{n}$$

$$M = 9550 \cdot \frac{50}{450} = 1061 \text{ Nm}$$

Moment ten jest równoważony siłą T działającą na ramieniu $\frac{1}{2}d$.

Zatem równanie równowagi momentów można zapisać:

$$\frac{1}{2}T \cdot d - M = 0$$

Stąd wyznaczona siła T jest równa:

$$T = \frac{2 \cdot M}{d}$$

$$T = \frac{2 \cdot 1061}{0,05} = 42440 \text{ N}$$

Długość wpustu L obliczona z warunku wytrzymałościowego na ścinanie wynosi:

$$\tau = \frac{T}{b \cdot L} \leq k_t$$

Stąd:

$$L \geq \frac{T}{b \cdot k_t}$$

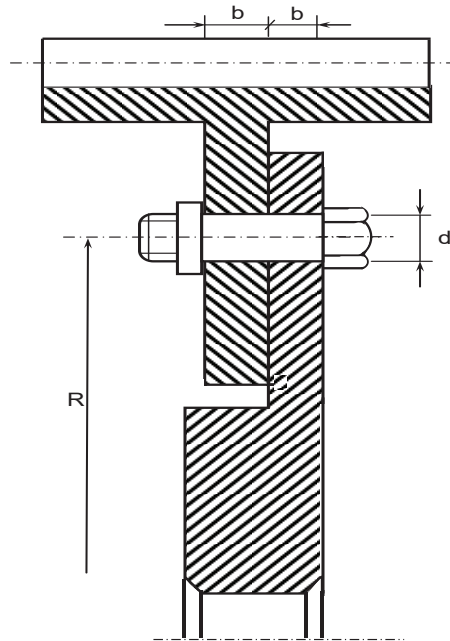
$$L \geq \frac{42440}{0,008 \cdot 80 \cdot 10^6}$$

$$L \geq 0,0663 \text{ m}$$

Przyjęta długość wpustu $L = 68 \text{ mm}$.

Przykład 4.5.

Wykonać obliczenia sprawdzające połączenia śrubowego (śruby pasowane) koła z wieńcem zębatym przenoszącym moc $N = 180 \text{ kW}$ przy prędkości obrotowej $n = 150 \text{ min}^{-1}$. Średnica śruby $d = 20 \text{ mm}$, wymiar $b = 10 \text{ mm}$, $R = 160 \text{ mm}$, liczba śrub na obwodzie koła $n = 8$, naprężenia dopuszczalne na ścinanie materiału śruby $k_t = 70 \text{ MPa}$, naprężenia dopuszczalne na docisk $p_{dop} = 180 \text{ MPa}$. Sposób połączenia koła z wieńcem przedstawiono na rysunku 4.17.



Rys. 4.17. Połączenie śrubowe koła z wieńcem zębatym

Rozwiązanie

Moment obrotowy przenoszony przez koło zębate wynosi:

$$M_o = 9550 \cdot \frac{180}{150} = 11460 \text{ Nm}$$

Siła obciążająca każdą śrubę wynosi:

$$F = \frac{M_o}{n \cdot R}$$

$$F = \frac{11460}{8 \cdot 0,16} = 8953,125 \text{ N}$$

Naprężenie ścinające w śrubie oblicza się ze wzoru:

$$\tau = \frac{F}{\frac{\pi d^2}{4}} \leq k_t$$

Za siłę F wstawiono wyrażenie $F = \frac{M_o}{n \cdot R}$, co w rezultacie daje:

$$\tau = \frac{\frac{M_o}{n \cdot R}}{\frac{\pi d^2}{4}} = \frac{4 \cdot M_o}{n \cdot R \cdot \pi d^2}$$

Wstawiając dane liczbowe i wyznaczony wcześniej moment obrotowy M_o otrzymuje się:

$$\tau = \frac{4 \cdot 11460}{8 \cdot 0,16 \cdot \pi \cdot 0,02^2} = 28,5 \text{ MPa}$$

Warunek na ścinanie śrub jest spełniony, gdyż:

$$\tau < k_t$$

Naprężenie na docisk sprawdza się według wzoru:

$$p_d = \frac{F}{b \cdot d} \leq p_{dop}$$

Za F należy wstawić wyrażenie $F = \frac{M_o}{n \cdot R}$

$$p_d = \frac{M_o}{n \cdot R \cdot b \cdot d} = \frac{1160}{8 \cdot 0,16 \cdot 0,01 \cdot 0,02} = 44,7 \text{ MPa}$$

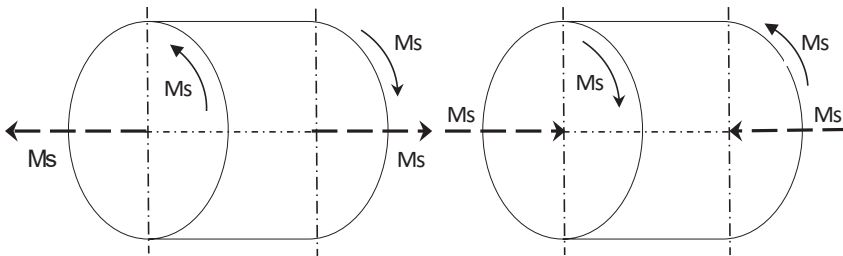
Warunek na docisk jest spełniony z dużym nadmiarem, zatem średnice śrub mogą być zmniejszone, albo zmniejszona może być liczba śrub.

5. SKRĘCANIE PRĘTÓW

5.1. SKRĘCANIE PRĘTÓW O PRZEKROJU KOŁOWYM

Skręcaniem nazywa się taki stan obciążenia pręta, przy którym działające siły zewnętrzne można sprowadzić do par sił działających w różnych płaszczyznach prostopadłych do jego osi. Moment skręcający w rozpatrywanym przekroju pręta, równy jest algebraicznej sumie momentów działających na ten pręt po jednej z dowolnie obranych stron tego przekroju.

Moment skręcający M_s uważany jest za dodatni, gdy jego wektor ma zwrot na zewnątrz przekroju rozpatrywanej części pręta. Natomiast gdy wektor momentu skręcającego M_s skierowany jest do wewnątrz przekroju, to taki moment uważany jest za ujemny. Przykład przyjętej definicji znaków momentu przedstawiono na rysunku 5.1.

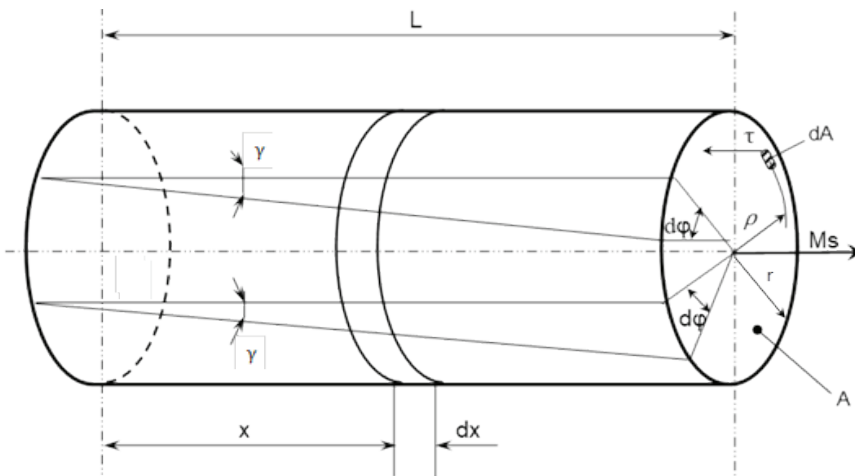


Rys. 5.1. Umowna definicja znaków momentu skręcającego: a) moment dodatni, b) moment ujemny

Określenie naprężeń i odkształceń w prętach o przekroju kołowym wymaga przyjęcia szczegółowych założeń, którymi są:

- przekroje płaskie i prostopadłe do osi pręta przed obciążeniem pozostają płaskie i prostopadłe do tej osi po obciążeniu,
- dowolny promień przekroju poprzecznego pozostaje prosty po odkształceniu pręta.

Założenia powyższe są zgodne z wynikami obserwacji skręcania pręta przedstawionego na rysunku 5.2.

Rys. 5.2. Skręcanie pręta o długości L i promieniu r

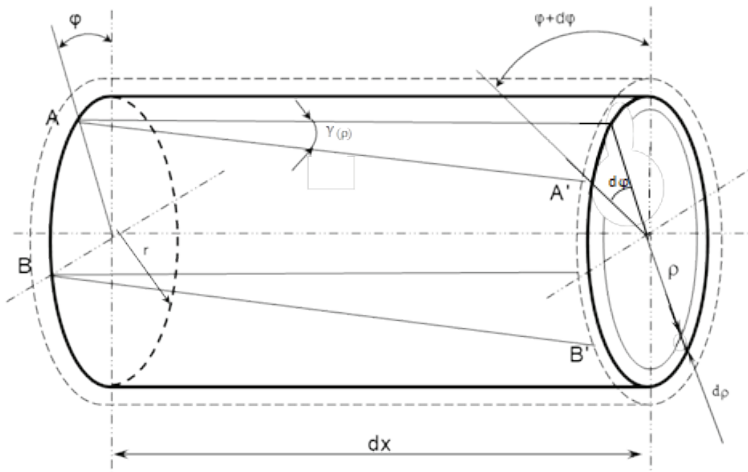
Spełnione założenia oznaczają, że naprężenia styczne w dowolnym przekroju pręta są prostopadłe do promienia przekroju oraz stałe na dowolnym obwodzie określonym promieniem ρ . Biorąc pod uwagę poczynione założenia moment skręcający M_s wyraża się następującym wzorem:

$$M_s = \int_A \rho \cdot \tau dA \quad (5.1)$$

gdzie: ρ – dowolny promień na przekroju pręta.

W wyniku skręcania kołowe przekroje poprzeczne ulegają obrotowi wokół osi wzdłużnej pręta, a tworzące powierzchni bocznej walca ulegają pochyleniu. Miarą tego obrotu jest kąt φ , natomiast pochylenia kąt γ .

Z pręta na rysunku 5.2 wycięty element dwoma prostopadłymi przekrojami odległymi od siebie o dx oraz dwoma przekrojami obwodowymi odległymi o $d\rho$ przedstawiono na rysunku 5.3.



Rys. 5.3. Wycięty element dx

Z rysunku 5.3 wynika, że kąty $\gamma_{(\rho)}$ i d_ϕ wyznaczają taką samą długość łuku, co można zapisać wzorem:

$$\gamma_{(\rho)} dx = \rho d\phi \tag{5.2}$$

dzieląc obustronnie przez dx otrzymuje się:

$$\gamma_{(\rho)} = \rho \frac{d\phi}{dx} = \rho \cdot K_s \tag{5.3}$$

gdzie:

$$K_s = \frac{d\phi}{dx}$$

jest nazywane względnym jednostkowym kątem skręcenia elementarnego odcinka dx pręta o przekroju kołowym.

Kąt pochylenia $\gamma_{(\rho)}$ jest kątem odkształcenia postaciowego i zgodnie z prawem Hooke’a zapisany jest wzorem:

$$\gamma_{(\rho)} = \frac{\tau}{G} \tag{5.4}$$

gdzie: G – jest modułem sprężystości poprzecznej, zwanym też modułem Kirchoffa.

Porównując wyrażenia (5.3) i (5.4) można zapisać:

$$\frac{\tau}{G} = \rho \frac{d\phi}{dx} \tag{5.5}$$

Zależność (5.5) wstawiona do wzoru (5.1) z równoczesnym przyjęciem, że

$$\frac{d\phi}{dx} = const ,$$

daje zapis dla danego przekroju poprzecznego:

$$M_s = \int_A \rho \cdot G \cdot \rho \frac{d\phi}{dx} dA = G \frac{d\phi}{dx} \int_A \rho^2 dA \tag{5.6}$$

gdzie:

$$\int_A \rho^2 dA = I_s$$

jest wielkością charakteryzującą tak zwaną geometryczną sztywność skręcania. W przypadku pręta kołowego wielkość ta jest biegunowym momentem bezwładności pola przekroju względem jego środka.

Uwzględnienie powyższego pozwala przekształcić wzór (5.6) do postaci:

$$M_s = G \cdot \frac{d_\varphi}{dx} \cdot I_s \quad (5.7)$$

$$\frac{d_\varphi}{dx} = \frac{M_s}{G \cdot I_s}$$

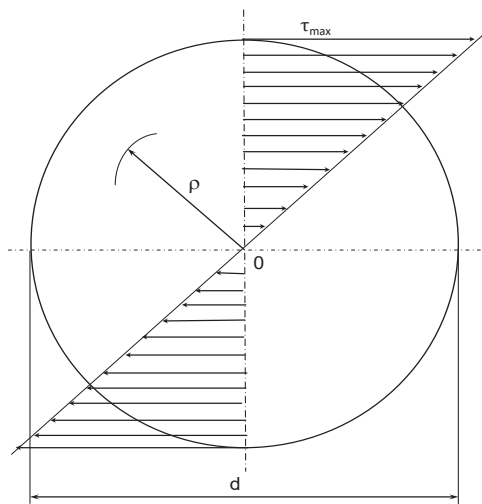
Całkując wyrażenie (5.7) po całej długości L skręcanego pręta otrzyma się wzór na kąt skręcenia:

$$\varphi = \frac{M_s \cdot L}{G \cdot I_s} \quad (5.8)$$

Stosując wzór (5.8) można określić kąt wzajemnego obrotu końców obciążonego pręta, czyli kąt skręcenia. Iloczyn $G \cdot I_s$ wyraża sztywność pręta na skręcanie. Podstawienie wzoru (5.7) do (5.5) prowadzi do zależności:

$$\tau = G \cdot \frac{M_s}{G \cdot I_s} \cdot \rho = \frac{M_s}{I_s} \cdot \rho \quad (5.9)$$

Za pomocą wzoru (5.9) oblicza się naprężenia styczne w przecie poddanym skręcaniu. Naprężenia te są liniową funkcją promienia ρ . Rozkład naprężeń wzdłuż promienia w przypadku przekroju kołowego przedstawiono na rysunku 5.4.



Rys. 5.4. Rozkład naprężeń stycznych w przekroju pręta pełnego

Naprężenia styczne uzyskują wartość maksymalną dla promienia $\rho = \rho_{max}$, co można zapisać zależnością:

$$\tau_{max} = \frac{M_s}{I_s} \cdot \rho_{max} = \frac{M_s}{W_s} \quad (5.10)$$

gdzie: W_s – jest wielkością zwaną wskaźnikiem wytrzymałości na skręcanie. Wskaźnik ten obliczany jest według wzoru:

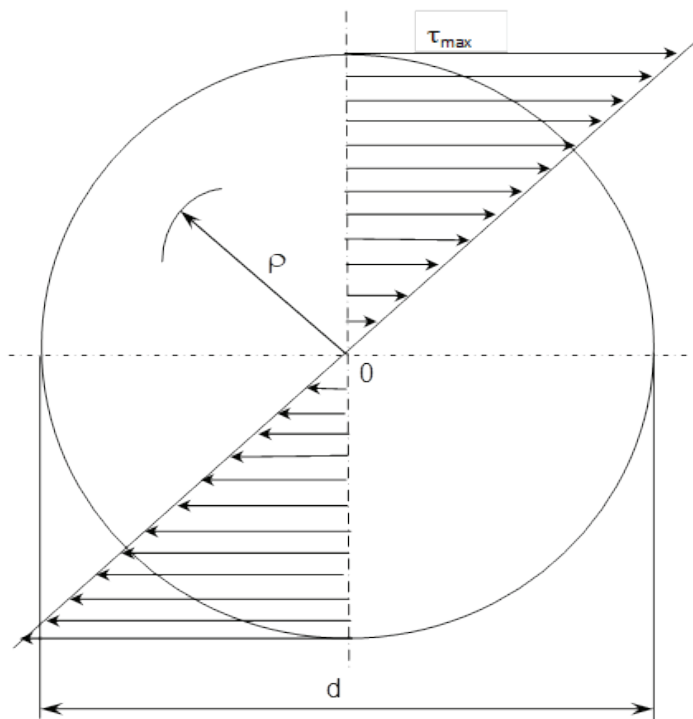
$$W_s = \frac{I_s}{\rho_{max}} \quad (5.11)$$

Jeżeli wskaźnik ten jest stosowany do prętów o przekroju kołowym, to często oznaczany jest jako W_o i obliczany według wzoru:

$$W_s = W_o = \frac{\pi d^3}{16} \quad (5.12)$$

gdzie: d – średnica pręta pełnego widoczna na rysunku 5.4.

Jeżeli rozpatrywany jest pręt drążony (jako rura), to rozkład naprężeń wzdłuż promienia przebiega według rysunku 5.5.



Rys. 5.5. Rozkład naprężeń stycznych w przekroju pręta drążonego

Dla przekroju pręta drążonego wskaźnik wytrzymałości na skręcanie obliczany jest według wzoru:

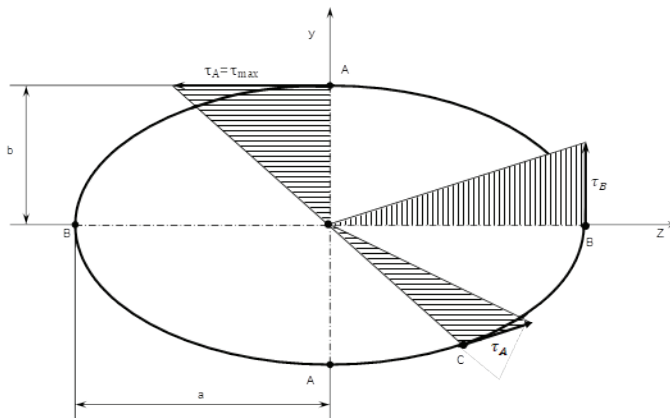
$$W_s = W_o = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{16D} \quad (5.13)$$

Analizując rozkład naprężeń w przekroju pręta pełnego (rys. 5.4), zauważa się, że materiał w części środkowej przekroju, przenosi niewielkie obciążenia w postaci naprężeń stycznych w porównaniu z naprężeniami występującymi w przekroju przy średnicy zewnętrznej. Stąd też, często stosuje się pręty drażnione (przekroje rurowe), jako bardziej ekonomiczne.

5.2. SKRĘCANIE PRĘTÓW O PRZEKROJU NIEKOŁOWYM

Skręcanie prętów o przekroju niekołowym (może to być przekrój trójkątny, prostokątny, eliptyczny) daje bardziej złożony obraz odkształceń aniżeli w przypadku prętów o przekroju kołowym. Zachodzi tu odkształcenie przekroju skręcanego pręta, które polega na obrocie przekroju oraz na przemieszczaniu się poszczególnych punktów przekroju w kierunku równoległym do osi pręta. Przekroje te charakteryzują się nierównomiernym rozkładem naprężeń, jak również tym, że pierwotny płaski przekrój pod wpływem działania momentu skręcającego przestaje być płaski. Nie może zatem tu być wykorzystana hipoteza płaskich przekrojów, co sprawia, że dla prętów o przekroju niekołowym metody wytrzymałości materiałów na ogół nie mogą być stosowane do wyznaczania naprężeń, ani odkształceń.

Rozwiązanie zagadnienia skręcania prętów o przekroju niekołowym umożliwia teoria sprężystości. Według teorii sprężystości obowiązuje założenie, że w przekrojach poprzecznych prętów przy skręcaniu swobodnym występują tylko naprężenia styczne, których kierunki i wartości są różne w różnych punktach przekroju. Przykład pręta o przekroju eliptycznym i półosiach a i b przedstawiono na rysunku 5.6.



Rys. 5.6. Naprężenia w pręcie o przekroju eliptycznym

Największe naprężenia styczne na konturze przekroju eliptycznego występują w punkcie A, natomiast najmniejsze w punkcie B. Wartość tych naprężeń określana jest z zależności:

$$\tau_A = \tau_{max} = \frac{M_s}{W_{S(b)}} = \frac{M_s}{\frac{1}{2}\pi ab^2} = \frac{2M_s}{\pi ab^2} \tag{5.14}$$

$$\tau_B = \tau_{min} = \frac{M_s}{W_{S(a)}} = \frac{M_s}{\frac{1}{2}\pi a^2 b} = \frac{2M_s}{\pi a^2 b} \tag{5.15}$$

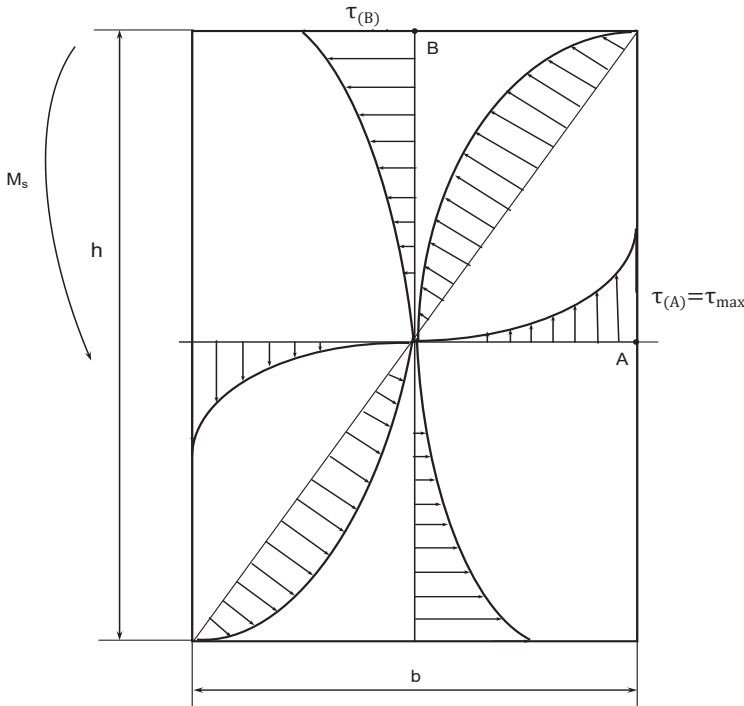
Kąt skręcenia w pręcie o przekroju eliptycznym określa się według wotu:

$$\varphi = \frac{M_s \cdot L}{G \cdot I_s} = \frac{M_s \cdot L}{G \cdot \pi \cdot \frac{a^3 b^3}{a^2 + b^2}} = \frac{M_s \cdot L (a^2 + b^2)}{G \cdot \pi \cdot a^3 b^3} \tag{5.165}$$

gdzie: dla przekroju eliptycznego o osiach a i b charakterystyka geometryczna

$$I_s = \pi \cdot \frac{a^3 b^3}{a^2 + b^2}$$

Często stosowanymi prętami w konstrukcjach inżynierskich są pręty o przekroju prostokątnym. Przykład takiego pręta przedstawiono na rysunku 5.7.



Rys. 5.7. Pręt o przekroju prostokątnym $h \times b$ ($h \geq b$)

W przypadku przekroju prostokątnego maksymalne naprężenia występują w połowie boków dłuższych. Na rysunku 5.7 jest to w punkcie A, gdzie $\tau_{(A)} = \tau_{max}$. Wartość

liczbową τ_{max} określa się według wzoru, jak dla wszystkich przekrojów poddanych momentowi skręcającemu:

$$\tau_{max} = \frac{M_s}{W_s} \quad (5.17)$$

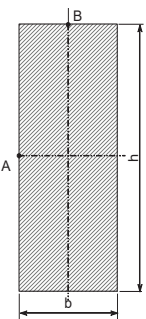
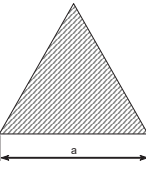
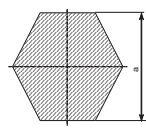
Kąt skręcenia pręta na długości x określa się według wzoru:

$$\varphi_{(x)} = \frac{M_s \cdot x}{G \cdot I_s} \quad (5.18)$$

Wielkości W_s (wskaźnik wytrzymałości na skręcanie) oraz I_s (wskaźnik sztywności) są wielkościami czysto geometrycznymi i zależą tylko od kształtu i wymiarów przekroju.

Napężenie styczne w punkcie B , oznaczone na rysunku 5.7 jako $\tau_{(B)}$ jest mniejsze od τ_{max} . *Pomiędzy $\tau_{(B)}$ a τ_{max} zachodzi zależność: $\tau_{(B)} = c_3 \cdot \tau_{max}$. Wartości współczynników c_1, c_2, c_3 w zależności od stosunku $h : b$ oraz wzory na W_s i I_s dla typowych przekrojów prętów skręcanych podano w tabeli 5.1.*

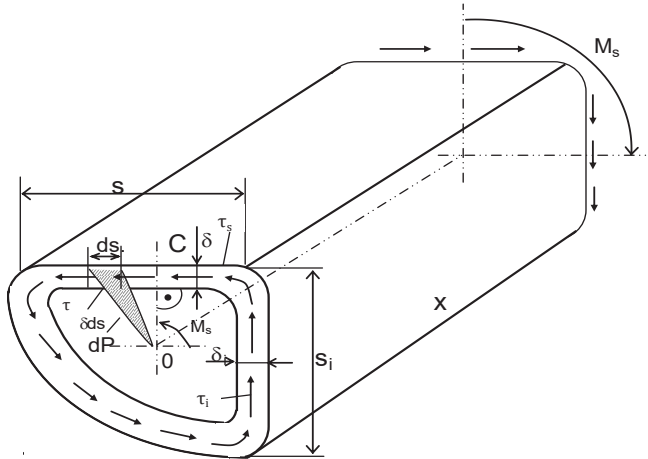
Tabela 5.1. Wielkości W_s i I_s w zależności od przekroju [2]

Przekrój	W_s				I_s				
 $\frac{h}{b} \geq 1$	$W_s = c_1 \cdot h \cdot b^3$				$I_s = c_2 \cdot h \cdot b^3$				
	$\frac{h}{b}$	1,0	1,2	1,4	1,5	2,0	3,0	4,0	8,0
	c_1	0,208	0,219	0,228	0,231	0,246	0,267	0,282	0,307
	c_2	0,141	0,166	0,187	0,196	0,229	0,263	0,281	0,307
	c_3	1,000	0,932	0,865	0,858	0,796	0,753	0,745	0,743
	Trójkąt równoboczny								
	$W_s = \frac{a^3}{20}$				$I_s = \frac{a^4}{46.2}$				
	Sześciokąt foremny								
	$W_s = 0.189 a^3$				$I_s = 0.115 a^4$				

W narożach przekroju prostokątnego, trójkątnego i sześciokątnego naprężenia styczne $\tau = 0$. Natomiast naprężenia maksymalne τ_{max} występują w połowie boku trójkąta równobocznego oraz w połowie boku sześciokąta foremnego.

5.3. SKRĘCANIE RUR CIENKOŚCIENNYCH O DOWOLNYM OBRYŚIE

Rury cienkościenne są to takie elementy, których grubość ścianek δ_i jest wielokrotnie mniejsza od długości pewnych fragmentów obrysu s_i i wielokrotnie mniejsza od innych wymiarów liniowych charakterystycznych dla rozpatrywanego przekroju. Przykład takiej rury przedstawiono na rysunku 5.8.



Rys. 5.8. Rura cienkościenna o dowolnym obrysie

W przedstawionym fragmencie rury cienkościennej na skutek jej obciążenia momentami skręcającymi M_s powstają w przekroju poprzecznym naprężenia styczne τ na całym jej obwodzie. Ze względu na bardzo małą grubość ścianek rury przyjmuje się, że rozkład naprężeń na całej grubości jest stały. Dalej także przyjmuje się, że naprężenia te są styczne do linii średniej konturu, tworząc w przekroju poprzecznym obieg zamknięty i spełniają zależność:

$$\tau \cdot \delta = \tau_i \cdot \delta_i = \text{const} \quad (5.19)$$

gdzie: δ_i – grubość dowolnego elementu ścianki rury, τ_i – naprężenie w tym elemencie.

Na podstawie rysunku 5.8 można zapisać sumę momentów elementarnych względem obranego punktu O , równoważną momentowi M_s działającemu w danym przekroju. A więc zapis ten ma postać:

$$M_s = \int_S \tau \cdot \delta \cdot ds \cdot OC = 2\tau \cdot \delta \int_S dp = 2\tau \cdot \delta \cdot P \quad (5.20)$$

gdzie: P – całe pole ograniczone środkową linią konturu. Wprowadzono tu odmienne oznaczenie tego pola przez literę P , w celu podkreślenia różnicy tego pojęcia od pola oznaczonego wcześniej A przekroju rury.

Z ostatniego wzoru (5.20) można wyznaczyć poszukiwaną wartość $\tau \cdot \delta$:

$$\tau \cdot \delta = \frac{M_s}{2P} \quad (5.21)$$

Maksymalna wartość naprężenia τ_{\max} może być wyznaczona ze wzoru (5.17), a kąt skręcenia rury cienkościennej ze wzoru (5.18).

Wskaźniki geometryczne występujące w tych wzorach wyznaczają się z następujących zależności:

$$W_s = 2P\delta_{\min} \quad (5.22)$$

$$I_s = 4P^2 \sum \frac{S_i}{\delta_i} \quad (5.23)$$

Największe naprężenia styczne τ_{\max} występują w miejscu, gdzie grubość ścianki δ jest najmniejsza. Jeżeli rura cienkościenne o przekroju kołowym ma stałą grubość ścianki δ i średni promień r_s , to wskaźnik wytrzymałości W_s i wskaźnik sztywności I_s określają zależności:

$$W_s = 2\pi r_s^2 \delta \quad (5.24)$$

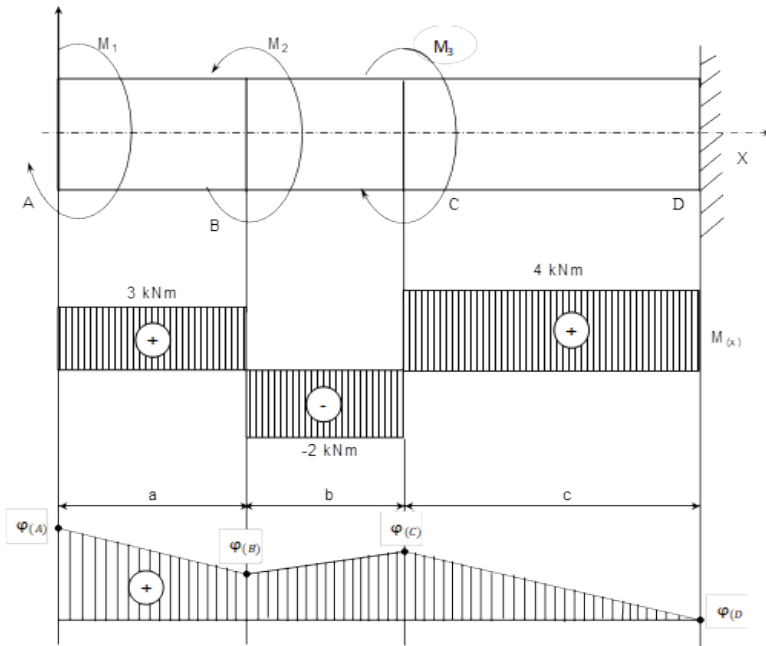
$$I_s = 2\pi r_s^3 \delta \cdot 4 \quad (5.25)$$

Rury cienkościenne przenoszące momenty skręcające stanowią dobry przykład konstrukcji, w której racjonalnie wykorzystywany jest materiał. Prawidłowe ustalenie wymiarów rury cienkościennej jest podstawą do tego, aby konstrukcja wykonana z takiej rury była lekka i sztywna. Aby to osiągnąć, należy stosować wzór (5.21), dokonując analizy obciążenia z udziałem momentu skręcającego.

5.4. PRZYKŁADY ZADAŃ Z ROZWIĄZANIAM I

Przykład 5.1.

Pręt stalowy o średnicy $d = 60$ mm, utwierdzony jednym końcem obciążono trzema momentami skręcającymi. Obliczyć naprężenie styczne oraz kąty obrotów poszczególnych odcinków pręta. Dane do zadania: $M_1 = 3$ kNm, $M_2 = 5$ kNm, $M_3 = 6$ kNm, $a = 40$ cm, $b = 20$ cm, $c = 60$ cm, moduł Kirchoffa $G = 8,5 \cdot 10^4$ MPa. Narysować wykres momentów skręcających oraz kątów skręcenia. Schemat obciążenia pręta przedstawiono na rysunku 5.9.



Rys. 5.9. Schemat obciążenia pręta wraz z wykresem momentów skręcających i kątów skręcenia

Rozwiązanie

Wartość momentu skręcającego na poszczególnych odcinkach pręta jest równa:

$$M_{(AB)} = M_1 = 3 \text{ kNm}$$

$$M_{(BC)} = M_1 - M_2 = 3 - 5 = -2 \text{ kNm}$$

$$M_{(CD)} = M_1 - M_2 + M_3 = 3 - 5 + 6 = 4 \text{ kNm}$$

Zwrot momentu M_1 jest zgodny z ruchem wskazówek zegara, zatem ma znak dodatni.

Wskaźnik wytrzymałości $W_s = W_o$ przekroju ze względu na skręcanie jest obliczany ze wzoru:

$$W_s = W_o = \frac{\pi d^3}{16} = \frac{\pi \cdot 0 \cdot 0,06^3}{16} = 0,00004239 \text{ m}^3$$

Maksymalne naprężenia w poszczególnych odcinkach pręta są równe:

$$\tau_{S(AB)} = \frac{M_{(AB)}}{W_o} = \frac{3 \cdot 10^3}{0,00004239} = 70771408 \text{ Pa} = 70,7 \text{ MPa}$$

$$\tau_{S(BC)} = \frac{M_{(BC)}}{W_o} = \frac{2 \cdot 10^3}{0,00004239} = 47180938 \text{ Pa} = 47,8 \text{ MPa}$$

$$\tau_{S(CD)} = \frac{M_{(CD)}}{W_o} = \frac{4 \cdot 10^3}{0,00004239} = 94361877,9 \text{ Pa} = 94,3 \text{ MPa}$$

Obliczony wskaźnik sztywności I_s , który jest biegunowym momentem bezwładności I_o przyjmuje wartość:

$$I_s = I_o = W_o \cdot \frac{d}{2} = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi \cdot 0.06^4}{32} = 0,000001271 \text{ m}^4$$

Koniec pręta w części D jest utwierdzony, zatem kąt skręcenia jest równy zero, a więc:

$$\varphi_{(D)} = 0$$

W poszczególnych przekrojach obliczone kąty skręcenia są równe:

$$\varphi_{(C)} = \varphi_{(D)} + \frac{M_{(CD)} \cdot c}{G \cdot I_o} = 0 + \frac{4 \cdot 10^3 \cdot 0,6}{8,5 \cdot 10^{10} \cdot 1,271 \cdot 10^{-6}} = 0,022215 \text{ rad}$$

$$\begin{aligned} \varphi_{(B)} &= \varphi_{(C)} + \frac{M_{(BC)} \cdot b}{G \cdot I_o} = 0,022215 - \frac{2 \cdot 10^3 \cdot 0,2}{8,5 \cdot 10^{10} \cdot 1,271 \cdot 10^{-6}} = \\ &= 0,018512 \text{ rad} \end{aligned}$$

$$\varphi_{(A)} = \varphi_{(B)} + \frac{M_{(AB)} \cdot a}{G \cdot I_o} = 0,018512 + \frac{3 \cdot 10^3 \cdot 0,4}{8,5 \cdot 10^{10} \cdot 1,271 \cdot 10^{-6}} = 0,029619 \text{ rad}$$

Zamieniając radiany na stopnie otrzymuje się wyniki:

$$\varphi_{(A)} = 1,698^\circ$$

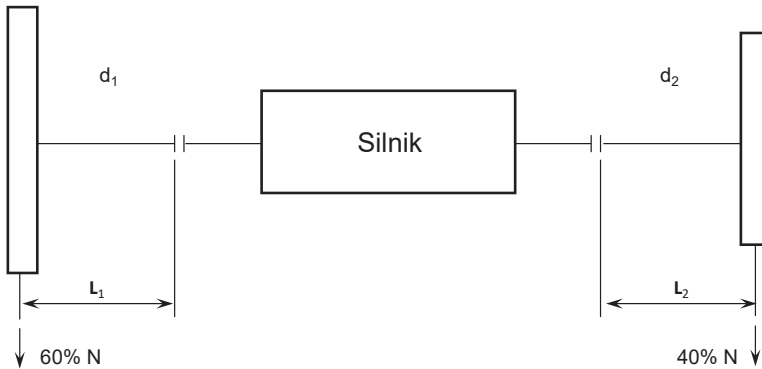
$$\varphi_{(B)} = 1,061^\circ$$

$$\varphi_{(C)} = 1,273^\circ$$

Wykres kąta skręcenia na długości pręta przedstawiono na rysunku 5.9.

Przykład 5.2.

Silnik spalinowy o mocy 120 kW i prędkości obrotowej $n = 1200 \text{ min}^{-1}$ napędza dwie maszyny żniwne. Jedna maszyna pobiera 60% mocy silnika, a druga 40%. Obliczyć średnice obydwu wałów, wykonanych z jednakowej stali o dopuszczalnej wytrzymałości na skręcanie $k_s = 80 \text{ MPa}$. Obliczyć także kąt skręcenia wałów, jeżeli koła pasowe do odbioru mocy ustawiono odpowiednio na długości $L_1 = 80 \text{ cm}$, $L_2 = 120 \text{ cm}$. Moduł sprężystości poprzecznej materiału wałków $G = 8,5 \cdot 10^4 \text{ MPa}$. Schemat układu wałków przedstawiono na rysunku 5.10.



Rys. 5.10. Schemat układu wałków w rozdziale mocy

Rozwiązanie

Moment skręcający na wale d_1 obliczany jest według wzoru:

$$M_1 = 9550 \cdot \frac{0,6N}{n} = 9550 \cdot \frac{0,6 \cdot 120}{1200} = 573 \text{ Nm}$$

Na wale d_2 jest:

$$M_2 = 9550 \cdot \frac{0,4N}{1200} = 9550 \cdot \frac{0,4 \cdot 120}{1200} = 382 \text{ Nm}$$

Średnica wału d_1 obliczona ze wzoru po przekształceniu ze względu na d_1 przyjmuje wartość:

$$\tau_1 = \frac{M_1}{W_{o1}} = \frac{16M_1}{\pi \cdot d_1^3} \leq k_s$$

$$d_1 \geq \sqrt[3]{\frac{16 M_1}{\pi \cdot k_s}}$$

$$d_1 \geq \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 573}{\pi \cdot 80 \cdot 10^6}}$$

$$d_1 \geq 0,03317 \text{ m}$$

Przyjęto średnicę $d_1 = 33,2 \text{ mm}$

Według takiego samego postępowania obliczona średnica wału d_2 wynosi:

$$\tau_2 = \frac{M_2}{W_{o2}} = \frac{16M_2}{\pi \cdot d_2^3} \leq k_s$$

$$d_2 \geq \sqrt[3]{\frac{16M_2}{\pi \cdot k_s}}$$

$$d_2 \geq \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 382}{\pi \cdot 80 \cdot 10^6}}$$

$$d_2 \geq 0,02897 \text{ m}$$

$$d_2 \geq 28,97 \text{ mm}$$

Przyjęto średnicę $d_2 = 30 \text{ mm}$

Kąt skręcenia wału d_1 obliczony według wzoru wynosi:

$$\varphi_1 = \frac{M_1 \cdot L_1}{G \cdot I_{o_1}} = \frac{32 \cdot M_1 \cdot L_1}{G \cdot \pi \cdot d_1^4} = \frac{32 \cdot 573 \cdot 0.8}{8.5 \cdot 10^{10} \cdot \pi \cdot 0,0332^4} = 0,04524 \text{ rad}$$

Kąt skręcenia wału d_2 jest równy:

$$\varphi_2 = \frac{M_2 \cdot L_2}{G \cdot I_{o_2}} = \frac{32 \cdot M_2 \cdot L_2}{G \cdot \pi \cdot d_2^4} = \frac{32 \cdot 382 \cdot 1.2}{8.5 \cdot 10^{10} \cdot \pi \cdot 0,03^4} = 0,06785 \text{ rad}$$

Zamieniając radiany na stopnie, kąty φ_1 i φ_2 mają wartość:

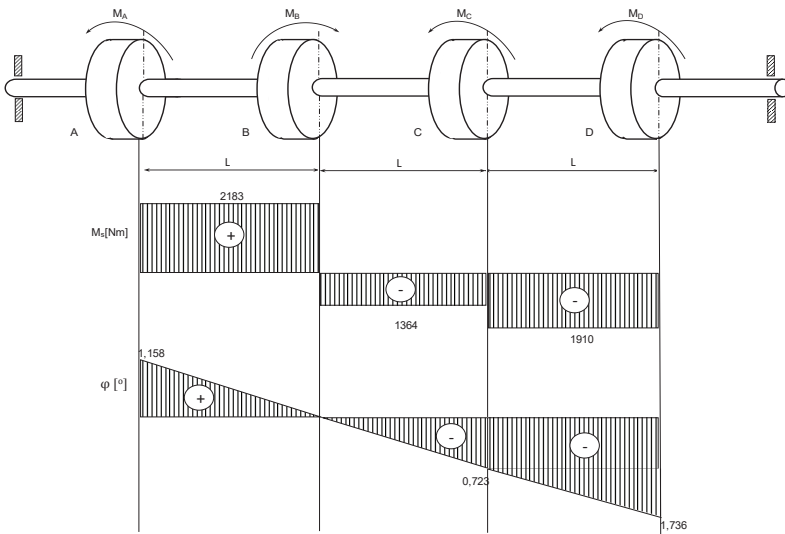
$$\varphi_1 = 2,593^\circ$$

$$\varphi_2 = 3,889^\circ$$

Obliczone średnice d_1 i d_2 spełniają warunek wytrzymałościowy ze względu na dopuszczalną wartość naprężeń skręcających. Natomiast kąty skręcenia φ_1 i φ_2 są bardzo duże i przekraczają wartości dopuszczalne.

Przykład 5.3.

Wał z czterema kołami pasowymi napędza maszyny robocze. Sam wał poprzez koło B jest napędzany silnikiem o mocy $N_O = 80 \text{ kW}$. Koła A, C i D przekazują napęd na maszyny robocze o odpowiednich mocach: $N_A = 30 \text{ kW}$, $N_C = 20 \text{ kW}$, $N_D = 30 \text{ kW}$. Prędkość obrotowa wału wynosi $n = 350 \text{ min}^{-1}$, długość $L = 100 \text{ cm}$, $G = 8,5 \cdot 10^4 \text{ MPa}$, $k_s = 60 \text{ MPa}$. Obliczyć średnicę wału oraz kąty skręcenia na poszczególnych odcinkach i narysować wykresy momentów skręcających, a także kątów skręcenia. Wał z kołami przedstawiono na rysunku 5.11.



Rys. 5.11. Wał z czterema kołami pasowymi

Rozwiązanie

Wyznaczone momenty obrotowe (skręcające) na poszczególnych kołach wynoszą:

$$\text{moment na kole } B \quad M_o = M_B = 9550 \cdot \frac{80}{350} = 2183 \text{ Nm}$$

$$\text{moment na kole } A \quad M_A = 9550 \cdot \frac{N_B}{n} = 9550 \cdot \frac{30}{350} = 819 \text{ Nm}$$

$$\text{moment na kole } C \quad M_C = 9550 \cdot \frac{N_C}{n} = 9550 \cdot \frac{20}{350} = 546 \text{ Nm}$$

$$\text{moment na kole } D \quad M_D = 9550 \cdot \frac{N_D}{n} = 9550 \cdot \frac{30}{350} = 819 \text{ Nm}$$

Następnie wyznaczone momenty skręcające na poszczególnych odcinkach wału wynoszą:

$$\text{na odcinku } AB \quad M_{s_1(AB)} = M_A = 2183 \text{ Nm}$$

$$\text{na odcinku } BC \quad M_{s_1(BC)} = -M_A + M_B = -2183 + 819 = 1364 \text{ Nm}$$

$$\text{na odcinku } CD \quad M_{s_1(CD)} = -M_A + M_B - M_C = -2183 + 819 - 546 = 1910 \text{ Nm}$$

W kolejnym etapie wykreślono wykres momentów skręcających i przedstawiono na rysunku 5.11.

Z wykresu można odczytać, że maksymalny moment skręcający jest na odcinku AB wału i wynosi:

$$M_{S_{max}} = M_{s_1(AB)} = 2183 \text{ Nm}$$

Zatem średnica wału będzie obliczona z warunku wytrzymałościowego, biorąc pod uwagę $M_{S_{max}}$:

$$\tau = \frac{M_{S_{max}}}{W_o} \leq k_s$$

$$\tau = \frac{16 \cdot M_{S_{max}}}{\pi d^3} \leq k_s$$

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16 \cdot M_{S_{max}}}{\pi \cdot k_s}}$$

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 2183}{\pi \cdot 60 \cdot 10^6}}$$

$$d \geq 0,057 \text{ m}$$

Przyjęto średnicę wału $d = 60 \text{ mm}$.

Biegunowy moment bezwładności przekroju kołowego wału o średnicy $d = 60 \text{ mm}$ jest równy:

$$I_o = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi \cdot 0,06^4}{32} = 0,000001271 \text{ m}^4 = 1,271 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4$$

Kąt skręcenia koła A względem koła B (odcinek AB) wynosi:

$$\varphi_{(AB)} = \frac{M_{s_1(AB)} \cdot L}{G \cdot I_o} = \frac{2183 \cdot 1}{8,5 \cdot 10^{10} \cdot 1,271 \cdot 10^{-6}} = 0,02021 \text{ rad}$$

Kąt skręcenia koła C względem koła B (odcinek BC) wynosi:

$$\varphi_{(CD)} = \frac{M_{s_2(BC)} \cdot L}{G \cdot I_o} = \frac{-1364 \cdot 1}{8,5 \cdot 10^{10} \cdot 1,271 \cdot 10^{-6}} = 0,01262 \text{ rad}$$

Kąt skręcenia koła D względem koła B (odcinek BD) jest równy:

$$\begin{aligned} \varphi_{(DB)} &= \varphi_{(CB)} + \varphi_{(DC)} = -0,01262 + \frac{M_{s_3(CD)} \cdot L}{G \cdot I_o} = \\ &= -0,01262 + \frac{-1910 \cdot 1}{8,5 \cdot 10^{10} \cdot 1,271 \cdot 10^{-6}} = -0,061262 - 0,01767 = \\ &= -0,03029 \text{ rad} \end{aligned}$$

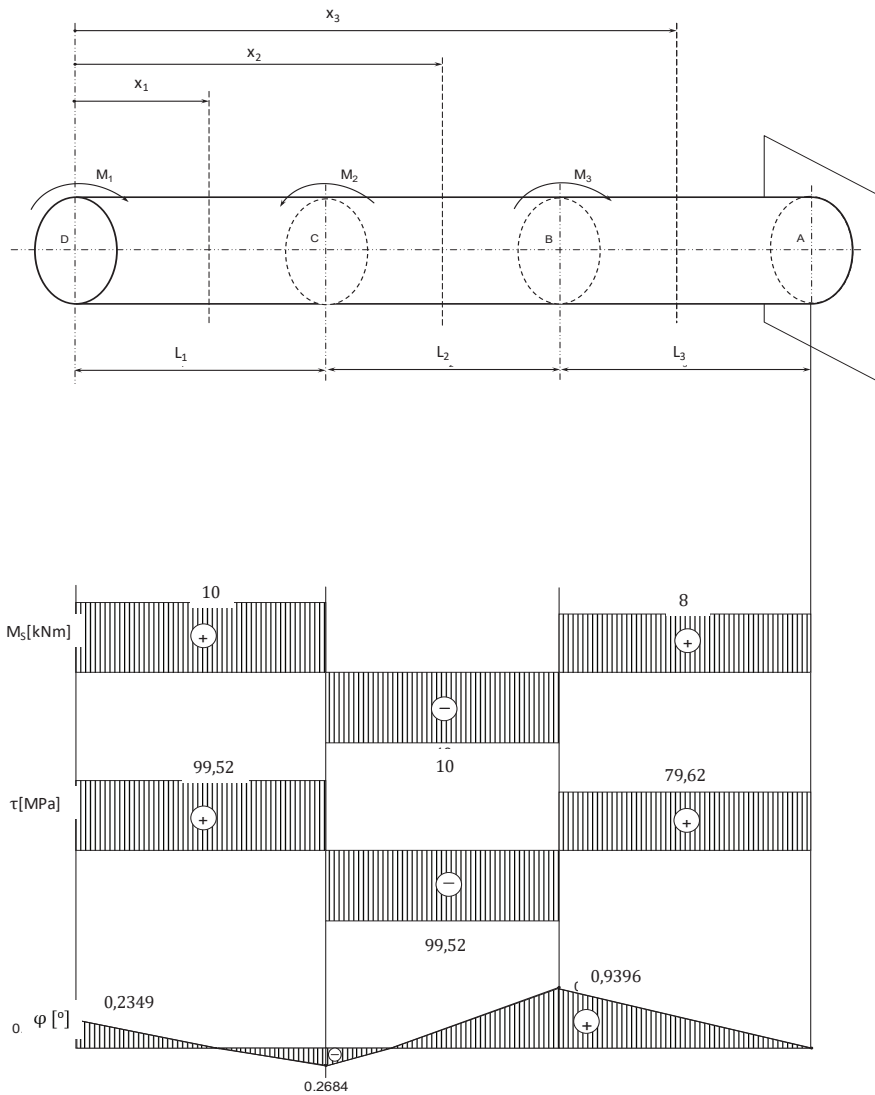
Poszczególne kąty skręcenia w radianach zamienione na stopnie wynoszą:

$$\varphi_{(AB)} = 1,158^\circ, \quad \varphi_{(CB)} = -0,723^\circ, \quad \varphi_{(DB)} = -1,736^\circ$$

Wykres kątów skręcenia zamieszczono na rysunku 5.11.

Przykład 5.4.

Pręt stalowy o przekroju kołowym obciążony jest trzema momentami skręcającymi: $M_1 = 10$ kNm, $M_2 = 20$ kNm, $M_3 = 18$ kNm. Średnica pręta $d = 80$ mm, długość $L_1 = 300$ mm, $L_2 = 40$ mm, $L_3 = 700$ mm, moduł sprężystości poprzecznej $G = 8,5 \cdot 10^4$ MPa. Obliczyć momenty skręcające w poszczególnych odcinkach pręta, naprężenia styczne, kąty skręcenia oraz narysować ich wykresy. Schemat obciążenia pręta przedstawiono na rysunku 5.12.



Rys. 5.12. Schemat obciążenia pręta oraz wykresy momentów skręcających, naprężeń stycznych i kątów skręcenia na poszczególnych odcinkach

Rozwiązanie

W poszczególnych odcinkach pręta momenty skręcające są równe:

odcinek $0 \leq x_1 \leq L_1$

$$M_{s1} = M_1 = 10 \text{ kNm}$$

odcinek $L_1 \leq x_2 \leq L_1 + L_2$

$$M_{s2} = M_1 - M_2 = 10 - 20 = -10 \text{ kNm}$$

odcinek $L_1 + L_2 \leq x_3 \leq L_1 + L_2 + L_3$

$$M_{s3} = M_1 - M_2 + M_3 = 10 - 20 + 18 = 8 \text{ kNm}$$

Wykres momentów skręcających w poszczególnych odcinkach pręta przedstawiono na rysunku 5.12.

Naprężenia styczne w poszczególnych przedziałach obliczono według wzorów:

$$\begin{aligned}\tau_{(DC)} &= \frac{M_{S_1}}{W_o} = \frac{16 \cdot M_{S_1}}{\pi d^3} = \frac{16 \cdot 10 \cdot 10^3}{\pi \cdot 0,08^3} = 99,52 \text{ MPa} \\ \tau_{(CB)} &= \frac{M_{S_2}}{W_o} = \frac{16 \cdot M_{S_2}}{\pi \cdot d^2} = \frac{16 \cdot 10 \cdot 10^3}{\pi \cdot 0,08^3} = 99,52 \text{ MPa} \\ \tau_{(BA)} &= \frac{M_{S_3}}{W_o} = \frac{16 \cdot M_{S_3}}{\pi \cdot d^3} = \frac{16 \cdot 8 \cdot 10^3}{\pi \cdot 0,08^3} = 79,62 \text{ MPa}\end{aligned}$$

Wykres naprężeń stycznych przedstawiono na rysunku 5.12.

Obliczone kąty skręcenia przyjmują wartości:

$$\varphi = \frac{M_s \cdot L}{G \cdot I_o}, \text{ biorąc za } I_o = \frac{\pi d^4}{32}$$

$$\text{można napisać, że } \varphi = \frac{32 \cdot M_s \cdot L}{G \cdot \pi \cdot d^4}$$

Pręt w punkcie A jest utwierdzony, więc kąt skręcenia $\varphi_{(A)} = 0$

W punkcie B jest:

$$\varphi_{(B)} = \varphi_{(A)} + \frac{32 \cdot M_{S_3} \cdot L_3}{G \cdot \pi \cdot d^4} = 0 + \frac{32 \cdot 8 \cdot 10^3 \cdot 0,7}{8,5 \cdot 10^{10} \cdot \pi \cdot 0,08^4} = 0,016391 \text{ rad}$$

W punkcie C :

$$\varphi_{(C)} = \varphi_{(B)} + \frac{32 \cdot M_{S_2} \cdot L_2}{G \cdot \pi \cdot d^4} = 0,016391 - \frac{32 \cdot 10 \cdot 10^3 \cdot 0,4}{8,5 \cdot 10^{10} \cdot \pi \cdot 0,08^4} = -0,004683 \text{ rad}$$

W punkcie D :

$$\begin{aligned}\varphi_{(D)} &= \varphi_{(C)} + \frac{32 \cdot M_{S_1} \cdot L_1}{G \cdot \pi \cdot d^4} = -0,004683 + \frac{32 \cdot 10 \cdot 10^3 \cdot 0,3}{8,5 \cdot 10^{10} \cdot \pi \cdot 0,08^4} = \\ &= 0,004098378 \text{ rad}\end{aligned}$$

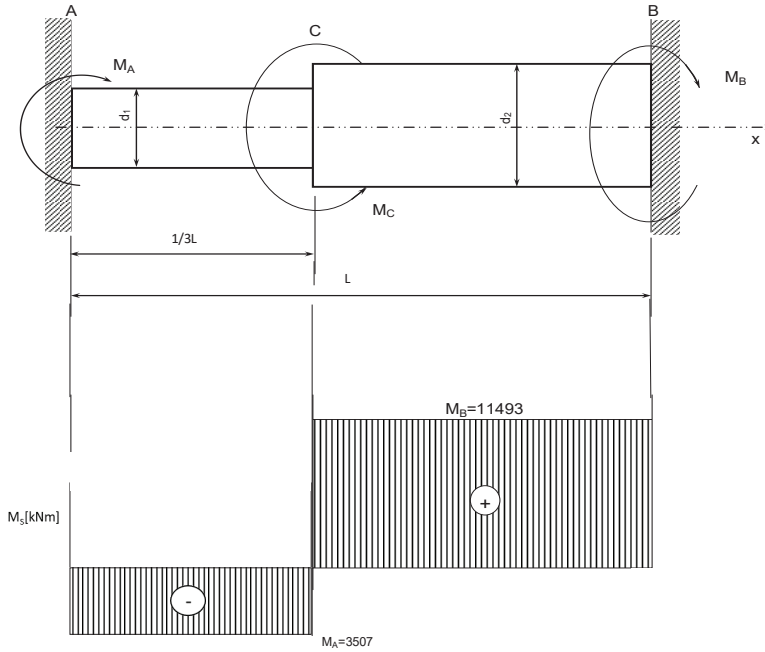
Zamieniając radiany na stopnie otrzymano:

$$\varphi_{(B)} = 0,9396^\circ \quad \varphi_{(C)} = -0,2684^\circ \quad \varphi_{(D)} = 0,2349^\circ$$

Wykres kątów skręcenia przedstawiono na rysunku 5.12.

Przykład 5.5.

Dwustopniowy wał o średnicy $d_1 = 50$ mm i średnicy $d_2 = 80$ mm utwierdzono obustronnie. W przekroju C zadano obciążenie momentem $M_C = 15$ kNm. Obliczyć największe naprężenia styczne w wale i narysować wykres momentów skręcających. Wał z obciążeniem przedstawiono na rysunku 5.13.

Rys. 5.13. Wał dwustopniowy obciążony momentem skręcającym M_C **Rozwiązanie**

Pod wpływem działania momentu obciążającego M_C w miejscach utwierdzenia powstaną momenty reakcji M_A i M_B . Sumując te momenty uzyska się następujące równanie równowagi:

$$M_A + M_B - M_C = 0$$

W równaniu tym są dwie niewiadome (M_A i M_B), więc jest to układ dwukrotnie statycznie niewyznaczalny.

Należy zatem ułożyć dodatkowe równanie z warunku zgodności odkształceń wału:

$$\varphi_{(CA)} = \varphi_{(CB)}$$

gdzie: $\varphi_{(CA)}$ jest kątem obrotu przekroju C względem przekroju A, a $\varphi_{(CB)}$ kątem obrotu przekroju C względem przekroju B.

Na podstawie wzorów na kąty obrotów można ułożyć równanie:

$$\varphi_{(CA)} = \frac{M_A \cdot \frac{1}{3}L}{G \cdot \frac{\pi \cdot d_1^4}{32}} = \frac{32 \cdot M_A \cdot L}{3 \cdot G \cdot \pi \cdot d_1^4}$$

$$\varphi_{(CB)} = \frac{M_B \cdot \frac{2}{3}L}{G \cdot \frac{\pi \cdot d_2^4}{32}} = \frac{32 \cdot M_B \cdot 2L}{3 \cdot G \cdot \pi \cdot d_2^4}$$

Po redukcji zostaje:

$$M_A \cdot d_2^4 = 2 \cdot M_B \cdot d_1^4$$

Uwzględniając równanie równowagi można zapisać:

$$M_C = M_A + M_B$$

$$M_A \cdot d_2^4 = 2 \cdot M_B \cdot d_1^4$$

Rozwiązanie układu równań prowadzi do wyznaczenia momentów M_A i M_B . Z równania drugiego wyrażenie na M_B można zapisać:

$$M_B = \frac{M_A \cdot d_2^4}{2d_1^4}$$

$$M_C = M_A + \frac{M_A \cdot d_2^4}{2 \cdot d_1^4} = \frac{2 \cdot M_A \cdot d_1^4 + M_A \cdot d_2^4}{2 \cdot d_1^4}$$

$$2 \cdot M_C \cdot d_1^4 = 2 \cdot M_A \cdot d_1^4 + M_A \cdot d_2^4$$

$$2 \cdot M_C \cdot d_1^4 = M_A (2d_1^4 + d_2^4)$$

$$M_A = \frac{2 \cdot M_C \cdot d_1^4}{2 \cdot d_1^4 + d_2^4}$$

Także korzystając z równania drugiego można wyrazić M_A w postaci zapisu:

$$M_A = \frac{2 \cdot M_B \cdot d_1^4}{d_2^4}$$

$$M_C = \frac{2 \cdot M_B \cdot d_1^4}{d_2^4} + M_B = \frac{2 \cdot M_B \cdot d_1^4 + d_2^4 \cdot M_B}{d_2^4}$$

$$M_C \cdot d_2^4 = 2 \cdot M_B \cdot d_1^4 + d_2^4 \cdot M_B$$

$$M_C \cdot d_2^4 = M_B (2d_1^4 + d_2^4)$$

$$M_B = \frac{M_C \cdot d_2^4}{2d_1^4 + d_2^4}$$

Wstawiając dane liczbowe do wyrażeń na M_A i M_B otrzymano wyniki:

$$M_A = \frac{2 \cdot 15 \cdot 10^3 \cdot (0,05)^4}{2 \cdot (0,05)^4 + (0,08)^4} = 3507 \text{ Nm}$$

$$M_B = \frac{15 \cdot 10^3 \cdot (0,08)^4}{2 \cdot (0,05)^4 + (0,08)^4} = 11493 \text{ Nm}$$

Naprężenia w części wału o średnicy d_1 są równe:

$$\tau_{(d_1)} = \frac{M_A}{W_o} = \frac{M_A}{\frac{\pi \cdot d_1^3}{16}} = \frac{16 \cdot M_A}{\pi \cdot d_1^3}$$

$$\tau_{(d_1)} = \frac{16 \cdot 3507}{\pi \cdot (0,05)^3} = 142,96 \text{ MPa}$$

Natomiast w części d_2 jest:

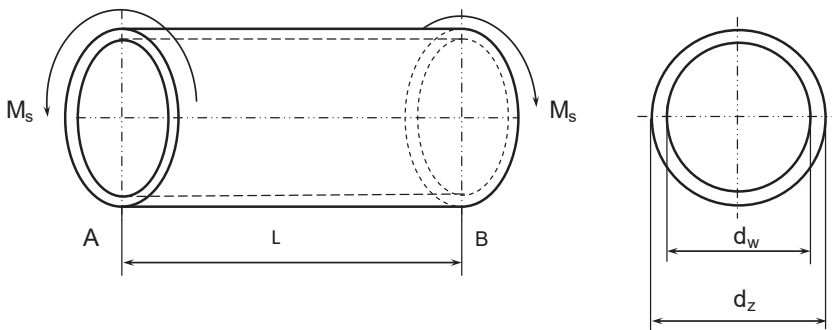
$$\tau_{(d_2)} = \frac{M_B}{W_o} = \frac{M_B}{\frac{\pi \cdot d_2^3}{16}} = \frac{16 \cdot M_B}{\pi \cdot d_2^3}$$

$$\tau_{(d_2)} = \frac{16 \cdot 11493}{\pi \cdot (0,08)^3} = 114,38 \text{ MPa}$$

Wykres momentów skręcających przedstawiono na rysunku 5.13.

Przykład 5.6.

Wyznaczyć naprężenia na powierzchni zewnętrznej i wewnętrznej tulei oraz kąt skręcenia względem siebie przekrojów A i B. Długość tulei wynosi $L = 500 \text{ mm}$, średnica zewnętrzna $d_z = 100 \text{ mm}$, wewnętrzna $d_w = 80 \text{ mm}$. Moduł sprężystości poprzecznej materiału tulei $G = 8,54 \cdot 10^4 \text{ MPa}$. Na końcach przekroju A i B tulei przyłożono moment skręcający $M_s = 3 \text{ kNm}$. Tuleję z obciążeniem przedstawiono na rysunku 5.14.



Rys. 5.14. Tuleja obciążona momentami skręcającymi M_s

Rozwiązanie

Największe naprężenia styczne będą we włóknach skrajnych tulei na średnicy wewnętrznej d_z :

$$\tau_{max} = \frac{M_s}{W_o}$$

gdzie:

$$W_o = \frac{I_o}{\frac{1}{2}d_z}$$

jest wskaźnikiem wytrzymałości na skręcanie tulei o średnicy d_z i d_w .

Biegunowy moment bezwładności obliczony według wzoru:

$$I_o = \frac{\pi}{32}(d_z^4 - d_w^4)$$

$$I_o = \frac{\pi}{32}(0,1^4 - 0,08^4) = 5,793 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4$$

Wskaźnik wytrzymałości na skręcanie jest równy:

$$W_o = \frac{5,793 \cdot 10^{-6}}{0,05} = 1,1586 \cdot 10^{-4} m^3$$

Zatem naprężenie styczne wyniesie:

$$\tau_{\max} = \frac{3 \cdot 10^3}{1,1586 \cdot 10^{-4}} = 26,88 MPa$$

Naprężenia styczne w skrajnych włóknach tulei na średnicy wewnętrznej obliczane są według wzoru:

$$\tau_{\max} = \frac{M_s}{W_{o(w)}}$$

gdzie:

$$W_{o(w)} = \frac{I_o}{\frac{1}{2}d_w}$$

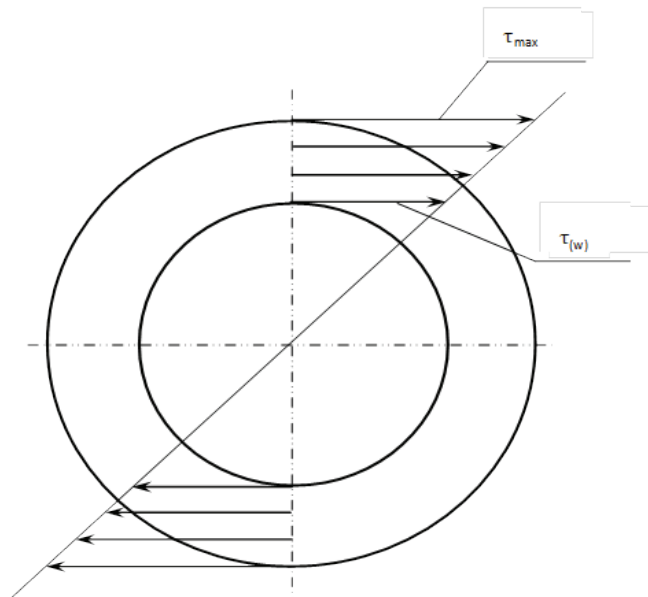
jest wskaźnikiem wytrzymałości na skręcanie tulei w odniesieniu do średnicy wewnętrznej d_w

$$W_{o(w)} = \frac{5,793 \cdot 10^{-6}}{0,04} = 1,44825 \cdot 10^{-4} m^3$$

Naprężenie styczne wynosi:

$$\tau_{(w)} = \frac{3 \cdot 10^3}{1,44825 \cdot 10^{-4}} = 20,71 MPa$$

Ilustrację rozkładu naprężeń przedstawiono na rysunku 5.15.



Rys. 5.15. Rozkład naprężeń stycznych na przekroju tulei

Obliczony kąt skręcenia przekrojów A i B względem siebie według wzoru wynosi:

$$\varphi = \frac{M_s \cdot L}{G \cdot I_o}$$

$$\varphi = \frac{3 \cdot 10^3 \cdot 0,5}{8,5 \cdot 10^{10} \cdot 5,793 \cdot 10^{-6}} = 0,003046 \text{ rad}$$

Zamieniając na stopnie otrzymano:

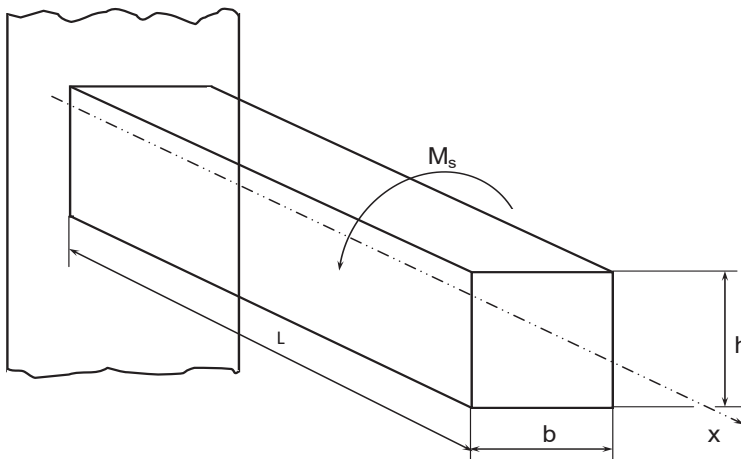
$$\varphi = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot \varphi_{(rad)}$$

$$\varphi = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot 0,003046 = 0,174^\circ$$

Wyznaczanie w przekrojach naprężeń τ_{max} i kątów skręcenia φ jest niezbędne do oceny bezpieczeństwa elementów maszyn, czy całych zespołów, w odniesieniu do naprężeń i kątów skręcenia dopuszczalnych.

Przykład 5.7.

Obliczyć maksymalne naprężenia styczne oraz kąt skręcenia pręta o przekroju prostokątnym. Prostokąt ma wymiary: $b = 10 \text{ cm}$, $h = 14 \text{ m}$ i jest obciążony momentem skręcającym $M_s = 25 \text{ kNm}$. Długość pręta wynosi $L = 180 \text{ cm}$, a moduł sprężystości poprzecznej $G = 8,5 \cdot 10^4 \text{ MPa}$. Obciążony pręt przedstawiono na rysunku 5.16.



Rys. 5.16. Pręt prostokątny obciążony momentem skręcającym M_s

Rozwiązanie

Z danych w zadaniu wynika, że

$$\frac{h}{b} = 1,4$$

i dla tej wartości z tabeli 5.1 odczytane współczynniki wynoszą:

$$C_1 = 0,228, \quad C_2 = 0,187, \quad C_3 = 0,865$$

Następnie obliczone maksymalne naprężenia styczne mają wartość:

$$\tau_{\max} = \frac{M_s}{W_s}$$

gdzie: wskaźnik wytrzymałości na skręcanie $W_s = C_1 \cdot h \cdot b^2$

Zatem:

$$\tau_{\max} = \frac{M_s}{c_1 \cdot h \cdot b^2} = \frac{25 \cdot 10^3}{0,228 \cdot 0,14 \cdot 0,1^2} = 78,32 \text{ MPa}$$

Kąt skręcenia obliczony według wzoru wynosi:

$$\varphi = \frac{M_s \cdot L}{G \cdot I_s}$$

gdzie: wskaźnik sztywności geometrycznej $I_s = c_2 \cdot h \cdot b^3$

Stąd kąt skręcenia ma wartość:

$$\varphi = \frac{M_s \cdot L}{G \cdot c_2 \cdot h \cdot b^3} = \frac{25 \cdot 10^3 \cdot 1,8}{8,5 \cdot 10^{10} \cdot 0,187 \cdot 0,14 \cdot 0,1^3} = 0,02022 \text{ rad}$$

Po zamianie na stopnie otrzymuje się:

$$\varphi = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot \varphi_{\text{rad}}$$

$$\varphi = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot 0,02022 = 1,15^\circ$$

Obliczone naprężenia styczne $\tau_{\max} = 78,32 \text{ MPa}$ występują w środkach dłuższych boków prostokąta (na rysunku 5.16 bok h).

W środkach krótszych boków prostokąta (na rysunku 5.16 bok b) naprężenia styczne wynoszą:

$$\tau = c_3 \cdot \tau_{\max}$$

$$\tau = 0,865 \cdot 78,32 = 67,75 \text{ MPa}$$

W narożach przekroju prostokątnego naprężenie styczne $\tau = 0$.

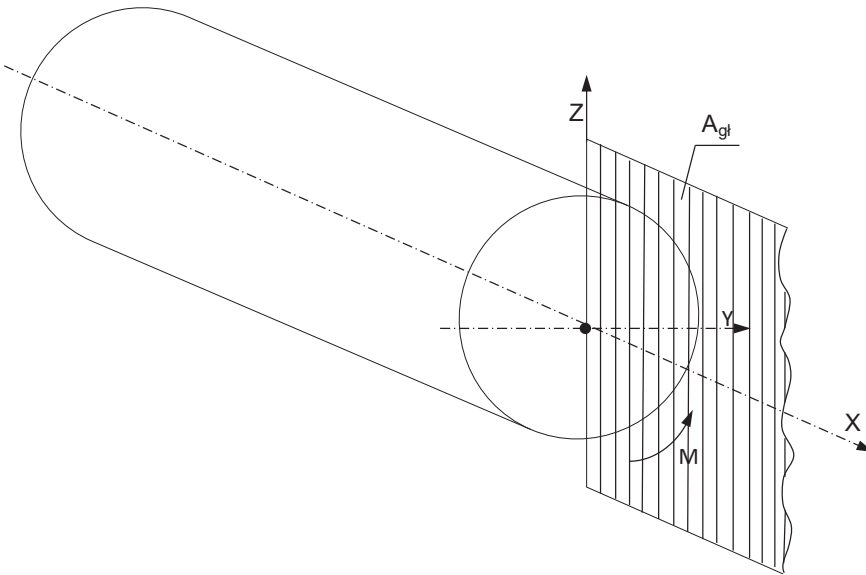
6. ZGINANIE PRĘTÓW PROSTYCH

6.1. PODZIAŁ ZAGADNIENI PRZY ZGINANIU

Pośród wielu stanów obciążenia prętów, jako elementów konstrukcyjnych występuje zginanie. Pręty podlegające zginaniu nazywane są belkami. W rzeczywistych układach konstrukcyjnych poddawanych obciążeniom zewnętrznym wyróżnia się:

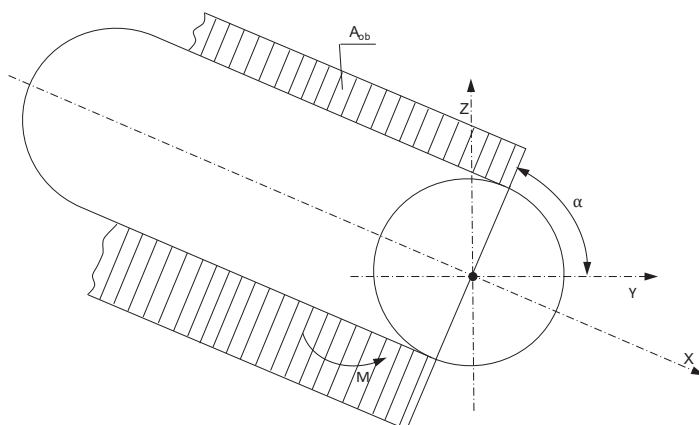
- zginanie proste lub płaskie,
- zginanie złożone lub ukośne.

Zginanie proste lub płaskie zachodzi wówczas, gdy płaszczyzna obciążenia (płaszczyzna, w której działają siły zewnętrzne) pokrywa się z płaszczyzną główną belki, to jest płaszczyzną przechodzącą przez oś belki i jedną z głównych centralnych osi bezwładności przekroju. Przykład ilustrujący zginanie proste przedstawiono na rysunku 6.1.



Rys. 6.1. Przykład zginania prostego: A_{gt} – płaszczyzna główna belki

Zginanie złożone lub ukośne ma miejsce wówczas, gdy płaszczyzna działania sił zewnętrznych przechodząca przez środek belki nie pokrywa się z jej płaszczyzną główną. Przypadek ilustrujący zginanie ukośne przedstawiono na rysunku 6.2.

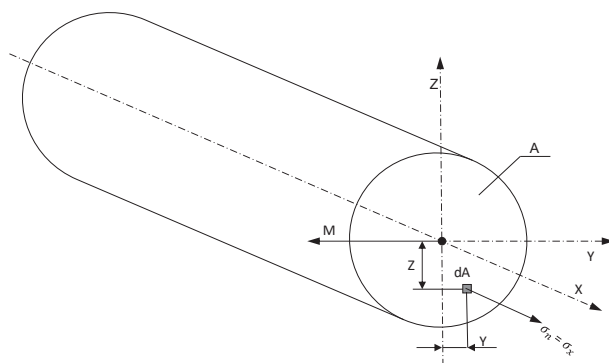


Rys. 6.2. Przykład zginania ukośnego: A_{ob} – płaszczyzna obciążenia, α – kąt pochylenia płaszczyzny obciążenia do osi y

Jeżeli siły obciążające nie działają prostopadłe do osi belki, to w takim przypadku siłę poprzeczną stanowią rzuty sił zewnętrznych prostopadłych do jej osi. Natomiast rzuty tych sił na oś belki wywołują siły podłużne. Wynika stąd, że podczas zginania ukośnego występuje także rozciąganie lub ściskanie.

6.2. NAPRĘŻENIA NORMALNE PRZY ZGINANIU PROSTYM

Rozpatrując zagadnienia naprężeń normalnych przy zginaniu prostym zakłada się, że przekroje belki są symetryczne względem płaszczyzny, w której działają siły na belkę oraz że przekroje płaskie poprzeczne przed deformacją pozostają także płaskie po deformacji. Przy tak poczynionych założeniach w przekroju poprzecznym belki wystąpią naprężenia normalne σ_n prostopadłe do płaszczyzny przekroju, co przedstawiono na rysunku 6.3.



Rys. 6.3. Naprężenia normalne w przekroju poprzecznym belki wywołane momentem gnącym M

Na podstawie rysunku 6.3 zapisano równania wyrażające sumę momentów elementarnej siły $\sigma_n dA$ względem osi y i osi z oraz sumę sił elementarnych $\sigma_n dA$:

$$\sum M_{iy} = 0 \quad \int_A z \cdot \sigma_n dA = M \quad (6.1)$$

$$\sum M_{iz} = 0 \quad \int_A y \cdot \sigma_n dA = 0 \quad (6.2)$$

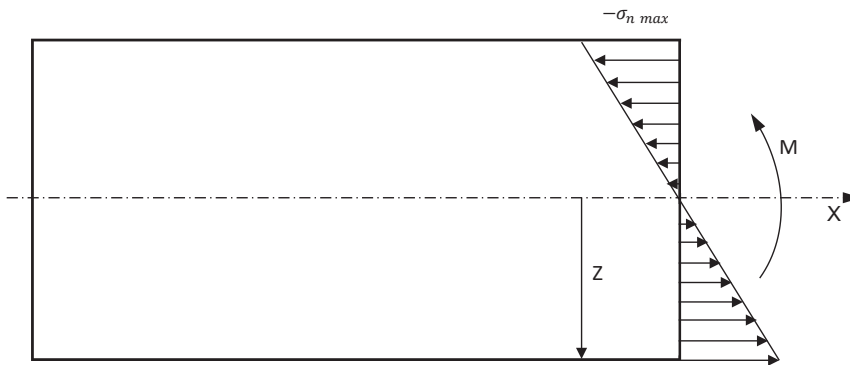
$$\sum F_{iy}, \sum F_{iz} = 0 \quad \int_A \sigma_n dA = 0 \quad (6.3)$$

Pomijając analizę odkształcenia pod wpływem momentu zginającego, przedstawiono końcowy wzór na wyznaczenie naprężeń σ_n w przekroju poprzecznym belki:

$$\sigma_n = \frac{M}{I_y} \cdot z \quad (6.4)$$

gdzie: I_y – jest geometrycznym momentem bezwładności względem osi y , z – jest odległością rozpatrywanego pola elementarnego przekroju od osi obojętnej y .

Na podstawie wzoru (6.4) można określić rozkład naprężeń normalnych w przekroju poprzecznym belki występujących przy zginaniu prostym. Z tego wzoru wynika również, że maksymalne wartości naprężeń występują w miejscach najbardziej oddalonych od osi obojętnej. Ilustrację rozkładu naprężeń przedstawiono na rysunku 6.4.



Rys. 6.4. Rozkład naprężeń normalnych przy zginaniu prostym

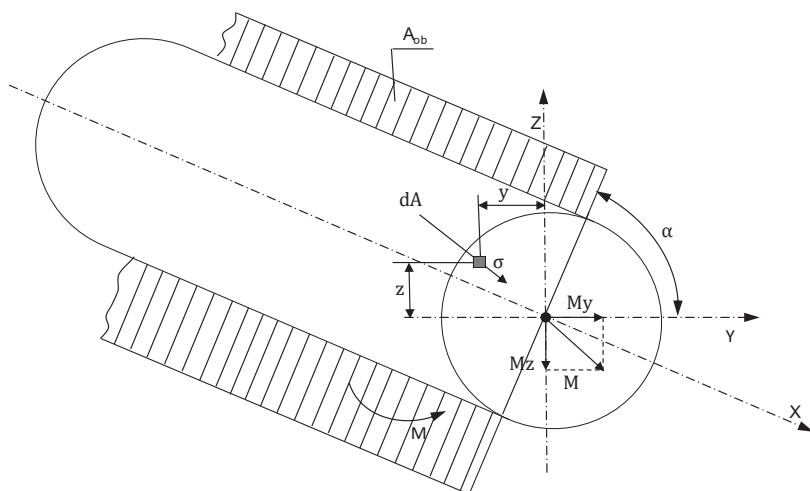
W przekrojach poprzecznych, symetrycznych względem osi obojętnej, największe naprężenia rozciągające we włóknach belki są równe naprężeniom ściskającym i odpowiednio wynoszą:

$$\sigma_{max} = \pm \frac{M}{I_y} \cdot Z_{max} \quad (6.5)$$

Z naprężeniami rozciągającymi wiąże się wydłużenie włókien materiału belki, a z naprężeniami ściskającymi ich skrócenie.

6.3. NAPRĘŻENIA PRZY ZGINANIU UKOŚNYM

W przypadku zginania ukośnego oś obojętna przechodzi przez środek ciężkości przekroju poprzecznego, nie będąc jednak prostopadłą do płaszczyzny obciążenia. Przykład zginania ukośnego ze składowymi momentu gięącego przedstawiono na rysunku 6.5.



Rys. 6.5. Zginanie ukośne i składowe momentu gięącego

Określenie naprężeń normalnych σ w dowolnym punkcie przekroju belki odbywa się przez sumowanie naprężeń wywołanych zginaniem prostym przez składowe momenty M_y i M_z , stosując wzór:

$$\sigma = \frac{M_y}{I_y} \cdot z + \frac{M_z}{I_z} \cdot y = \frac{M \cdot \sin \alpha}{I_y} \cdot z + \frac{M \cdot \cos \alpha}{I_z} \cdot y \quad (6.6)$$

Równanie linii obojętnej przekroju poprzecznego belki można wyznaczyć z równania (6.6), przyrównując sumaryczne naprężenia do zera.

$$\begin{aligned} \frac{M \cdot \sin \alpha}{I_y} \cdot z + \frac{M \cdot \cos \alpha}{I_z} \cdot y &= 0 \\ z &= \frac{-M \cdot \cos \alpha \cdot y \cdot I_y}{M \cdot \sin \alpha \cdot I_z} = -\frac{I_y}{I_z} \cdot y \cdot \operatorname{ctg} \alpha \end{aligned} \quad (6.7)$$

Na podstawie równania (6.7) wyznaczony współczynnik kierunkowy linii obojętnej ma postać:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{z}{y} = \frac{-I_y \cdot y \cdot \operatorname{ctg} \alpha}{I_z \cdot y} = -\frac{I_y}{I_z} \cdot \operatorname{ctg} \alpha = -\frac{I_y}{I_z} \cdot \frac{M_z}{M_y} \quad (6.8)$$

Z równania (6.8) wynika, że oś obojętna tylko wtedy jest prostopadła do płaszczyzny obciążenia (płaszczyzny działania sił), gdy geometryczny moment bezwładności przekroju poprzecznego $I_y = I_z$.

6.4. LINIA UGIĘCIA BELKI

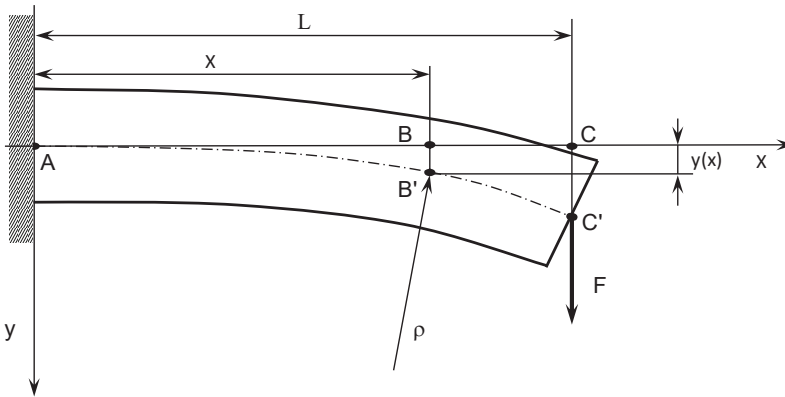
W wielu zagadnieniach, oprócz obliczania naprężeń, istotne jest także określenie odkształceń (przemieszczeń) belki.

Wyznaczenie przemieszczeń wymaga określenia postaci odkształconej osi belki zginanej. Oś ta pokrywa się z warstwą obojętną, wobec czego jej promień krzywizny jest wyrażony za pomocą wzoru:

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{M(x)}{EI} \quad (6.9)$$

gdzie: E – moduł Younga dla materiału belki, I – geometryczny moment bezwładności przekroju belki, $M_{(x)}$ – moment zginający, ρ – promień krzywizny.

Przykład belki zginanej w płaszczyźnie xy przedstawiono na rysunku 6.6.



Rys. 6.6. Belka o odkształconej osi $AB'C'$

Postać odkształconej osi na rysunku 6.6 oznaczona $AB'C'$ nazywana jest linią ugięcia, a przemieszczenie liniowe $y_{(x)}$ ugięciem. W zdecydowanej większości zagadnień technicznych ugięcia $y_{(x)}$ są bardzo małe w porównaniu do długości belki, wobec czego promienie krzywizny osi ugiętej są bardzo duże. Po tych uwagach równanie osi ugiętej zapisano w postaci:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M(x)}{EI} \quad (6.10)$$

Rozwiązanie powyższego równania różniczkowego odbywa się przez dwukrotne całkowanie stronami.

Z rysunku 6.6 wynika, że moment gnący $M_{(x)}$ wyraża się przez zapis:

$$M_{(x)} = F(L - x) \quad \text{przy czym} \quad 0 < x < L$$

Wstawiając wyrażenie $M_{(x)} = F(L - x)$ do wzoru (6.10) otrzymuje się:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{F(L - x)}{EI}$$

$$EI \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} = -F(L-x)$$

Po pierwszym całkowaniu wyrażenie przyjmuje postać:

$$EI \cdot \frac{dy}{dx} = -F \cdot L \cdot x + F \cdot x^2 + C$$

Po drugim całkowaniu jest:

$$EI \cdot y = -F \cdot L \cdot \frac{x^2}{2} + F \cdot \frac{x^3}{6} + Cx + D$$

Stałe całkowania C i D wyznaczone z warunków brzegowych mają wartość:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{dla x=0} \quad \text{więc} \quad C = 0$$

$$(y)_{dla x=0} = 0 \quad \text{więc} \quad D = 0$$

Zatem równanie po drugim całkowaniu można zapisać:

$$EI \cdot y = -\frac{1}{2}FLx^2 + \frac{1}{6}Fx^3$$

$$EI \cdot y = -\frac{3}{6}FLx^2 + \frac{1}{6}Fx^3$$

$$y = \frac{-3FLx^2 + Fx^3}{6EI}$$

$$y = \frac{Fx^2(x - 3L)}{6EI}$$

Ostatnie równanie określa ugięcie osi belki o długości całkowitej L , utwierdzonej jak na rysunku 6.6, w odległości x od utwierdzenia (punkt A).

6.5. OKREŚLANIE ZNAKÓW MOMENTÓW ZGINAJĄCYCH, SIŁ POPRZECZNYCH I PODŁUŻNYCH

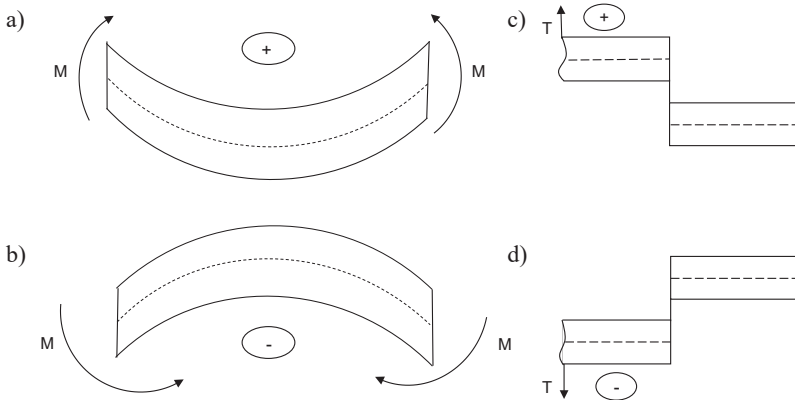
W obliczeniach wytrzymałościowych belek zginanych występują trzy podstawowe wielkości charakterystyczne dla tej formy deformacji prętów przyrównanych. Są nimi:

Moment zginający M w dowolnym przekroju pręta, rozumiany jako suma momentów wszystkich sił zewnętrznych występujących po jednej stronie tego przekroju, obliczony względem środka ciężkości przekroju.

Siła poprzeczna T w dowolnym przekroju pręta, jako suma wszystkich sił zewnętrznych położonych po jednej stronie tego przekroju, rzutowanych na normalną do osi belki w miejscu przekroju.

Siła podłużna N w dowolnym przekroju pręta jest równa sumie wszystkich sił zewnętrznych położonych po jednej stronie tego przekroju, rzutowanych na styczną do osi belki w miejscu przekroju. Siła podłużna N przyjmowana jest jako dodatnia wówczas, gdy powoduje rozciąganie pręta, czyli ma zwrot skierowany na zewnątrz przekroju.

Znaki dotyczące momentu zginającego i siły poprzecznej są kwestią umowy i sposób ich określenia przedstawiono na rysunku 6.7.



Rys. 6.7. Określenie znaków momentu zginającego i siły poprzecznej:

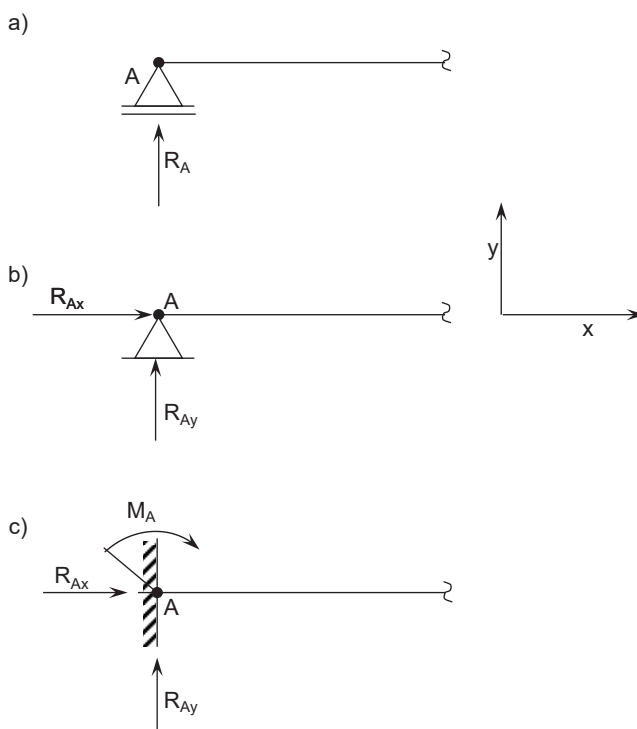
- a) moment zginający dodatni, b) moment zginający ujemny, c) siła poprzeczna dodatnia,
d) siła poprzeczna ujemna

Zgodnie z rysunkiem 6.7, moment zginający uważa się za dodatni, jeżeli powoduje wygięcie belki w dół. Siła poprzeczna jest dodatnia, jeżeli powoduje przesunięcie lewej strony belki w górę w stosunku do prawej. Więcej objaśnień w kwestii określania znaków momentu zginającego i sił poprzecznych będzie podane w przykładowych rozwiązaniach zadań.

6.6. SIŁY ZEWNĘTRZNE W PRĘTACH UKŁADÓW PŁASKICH

Siły, jakie działają na pręty dzieli się na obciążenia i reakcje podpór. Siły wewnętrzne obciążające pręt mogą występować jako siły skupione, jako obciążenia ciągłe, lub też jako pary sił. Obciążenia ciągłe mogą być rozłożone równomiernie lub nierównomiernie na długości pręta.

W układzie płaskim, to znaczy takim, w którym wszystkie osie prętów leżą w jednej płaszczyźnie oraz działające na nie obciążenia także należą do tej płaszczyzny, wyróżnia się następujące rodzaje podpór, które przedstawiono na rysunku 6.8.



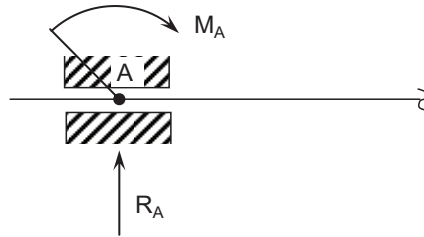
Rys. 6.8. Rodzaje podpór stosowanych w układzie płaskim xy :
 a) podpora przegubowo-przesuwna, b) podpora przegubowo-nieprzesuwna,
 c) podpora płaska utwierdzająca (utwierdzenie nieprzesuwne)

Belka podparta w punkcie A na podporze przegubowo-przesuwnej przedstawionej na rysunku 6.8 a) ma jedną niewiadomą, którą jest reakcja R_A , działająca na kierunku osi y , gdyż nie uwzględnia się tu sił tarcia. W podporze takiej odbierany jest jeden stopień swobody, który ogranicza przesuw po linii normalnej do płaszczyzny przesuwu.

W podporze przegubowo-nieprzesuwnej na rysunku 6.8 b) występują dwie niewiadome, jako składowe reakcji R_{Ax} i R_{Ay} . Stosowanie takiej podpory odbiera układowi dwa stopnie swobody, nie dając możliwości na przesuw, zarówno w kierunku osi x jak i y .

Podpora płaska utwierdzająca przedstawiona na rysunku 6.8 c) charakteryzuje się tym, że odbiera układowi trzy stopnie swobody. Nie daje możliwości przesuwu w kierunku osi x , ani y , ani też nie pozwala na obrót. Stąd też w układach z taką podporą występują trzy niewiadome w postaci: składowych reakcji R_{Ax} i R_{Ay} oraz momentu utwierdzenia M_A .

W zastosowaniach technicznych niekiedy zachodzi potrzeba stosowania podpory specjalnej, która umożliwi przesuw wzdłuż osi pręta, uniemożliwiając równocześnie obrót. Taką podporę nazywa się utwierdzeniem przesuwnym, którą przedstawiono na rysunku 6.9.



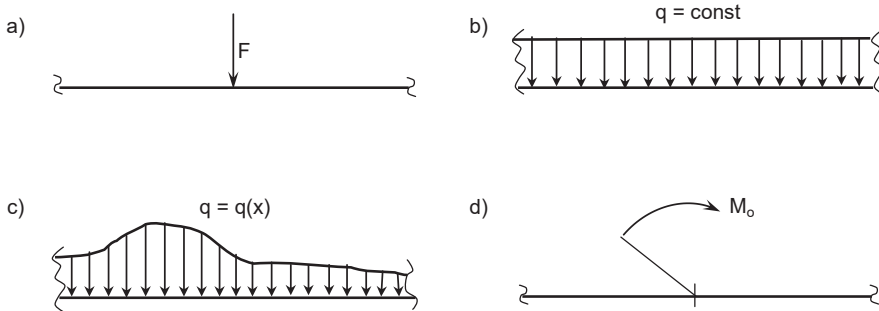
Rys. 6.9. Podpora z utwierdzeniem przesuwnym

W utwierdzeniu przesuwym występują dwie niewiadome. Są nimi: reakcja R_A oraz moment utwierdzenia M_A .

Siły, jakimi są obciążane belki można podzielić na:

- siły skupione F , będące wypadkową obciążenia rozłożonego na bardzo małej przestrzeni w porównaniu do wymiarów belki,
- obciążenie ciągłe q , wyrażone w $N \cdot m^{-1}$ rozłożone jest na pewnym odcinku belki, lub na całej jej długości,
- pary sił dające określony moment M_o wyrażany w $N \cdot m$.

Przykłady takich obciążeń przedstawiono na rysunku 6.10.



Rys. 6.10. Oznaczenie obciążeń belek na schematach obliczeniowych:

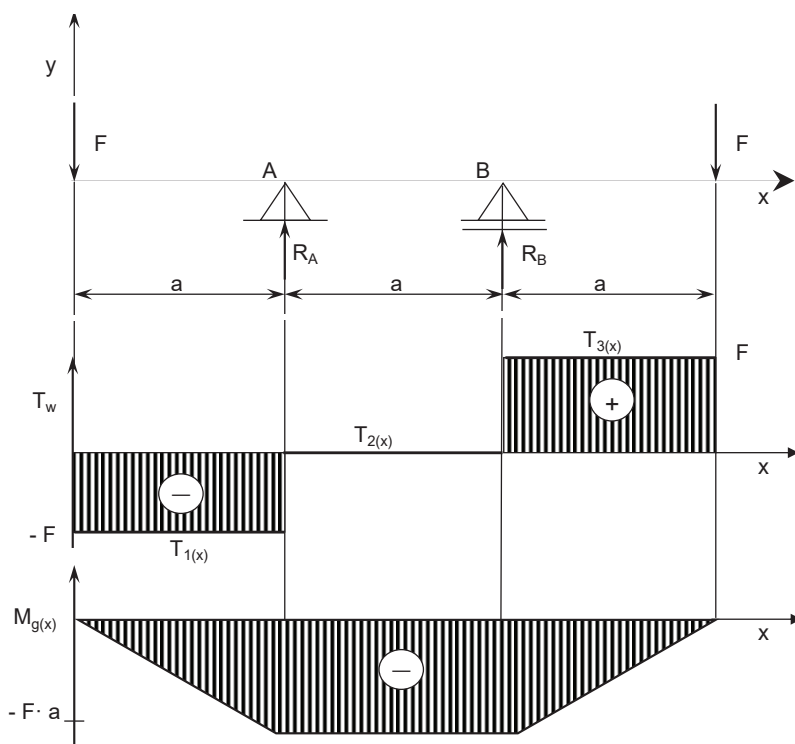
- a) obciążenie siłą skupioną F , b) obciążenie ciągłe stałe $q = \text{const}$,
- c) obciążenie ciągłe rozłożone w sposób dowolny $q = q(x)$,
- d) obciążenie parą sił o momencie M_o

W rzeczywistych układach mechanicznych występujące obciążenia najczęściej mają charakter obciążeń zmiennych, a w modelach obliczeniowych przyjmowane są obciążenia uśrednione.

6.7. PRZYKŁADY ZADAŃ Z ROZWIĄZANIAMI

Przykład 6.1.

Wyznaczyć reakcje w podporach A i B oraz narysować wykres sił poprzecznych i momentów gnących dla belki spoczywającej na dwóch podporach i obciążonej symetrycznie siłami F jak na rysunku 6.11.



Rys. 6.11. Wykresy sił tnących i momentów gnących belki obciążonej siłami poprzecznymi

Równania równowagi pozwolą na wyznaczenie reakcji R_A i R_B :

$$\begin{aligned} \sum F_{iy} &= -F + R_A + R_B - F = 0 \\ \sum M_{i(A)} &= -F \cdot a - R_B \cdot a + F \cdot 2a = 0 \\ R_B &= \frac{-F \cdot a + 2F \cdot a}{a} = F \\ R_A &= F - R_B + F = F \end{aligned}$$

Reakcje R_A i R_B są sobie równe: $R_A = R_B = F$

Całą długość belki podzielono na trzy przedziały, poczynając od początku układu współrzędnych (lewa strona belki):

Przedział I: $0 \leq x_1 \leq a$

$$T_{1(x)} = -F$$

$M_{g_1(x)} = -F \cdot x_1$, ale x_1 dąży do a , więc można zapisać

$$M_{g_1(x=a)} = -F \cdot a$$

Na wykresie sił tnących odmierzone poniżej linii zerowej wartość siły $T_{1(x)} = -F$.

Na wykresie momentów gnących odmierzone poniżej linii zerowej wartość momentu $M_{g_1(x)} = -F \cdot a$.

Przedział II: $a \leq x_2 \leq 2a$

$$T_{2(x)} = -F + R_A = -F + F = 0$$

$$M_{g_2(x)} = -F \cdot x_2 + R_A(x_2 - a) = -F \cdot 2a + F \cdot a = -F \cdot a$$

W przedziale drugim wartość siły tnącej równa się zero, a wartość momentu gnącego jest stała i wynosi.

Przedział III: $2a \leq x_3 \leq 3a$

$$T_{3(x)} = -F + R_A + R_B = -F + F + F = F$$

$$\begin{aligned} M_{g_3(x)} &= -F \cdot x_3 + R_A(x_3 - a) + R_B(x_3 - 2a) = -F \cdot 3a + R_A \cdot 2a + R_B \cdot a = \\ &= -F \cdot 3a + F \cdot 2a + F \cdot a = 0 \end{aligned}$$

Na wykresie sił tnących odmierzone powyżej linii zerowej wartość siły $T_{3(x)} = F$.

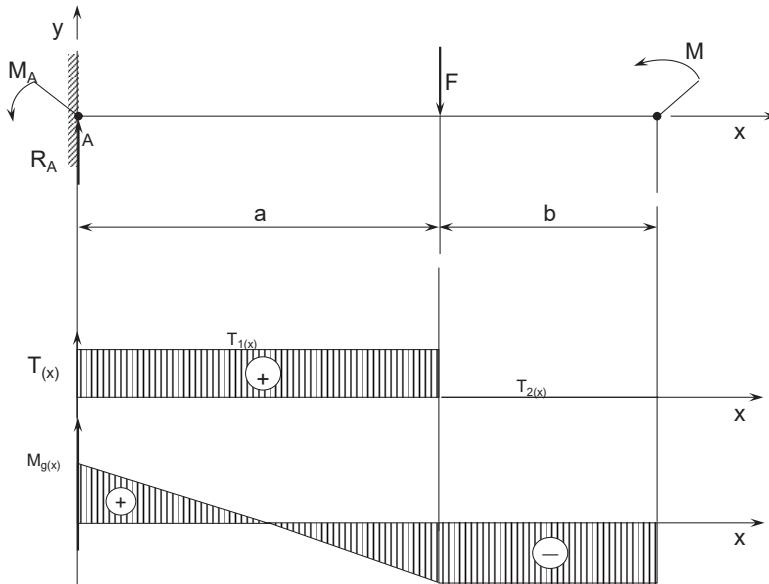
Wykres momentów gnących w przedziale trzecim maleje od wartości

$$M_{g_2(x)} = F \cdot a,$$

aż do wartości zerowej na końcu belki.

Przykład 6.2.

Wyznaczyć wielkości podporowe w punkcie A belki utwierdzonej obciążonej siłą F i momentem M . Narysować też wykres sił tnących i momentów gnących dla tego układu przedstawionego na rysunku 6.12.



Rys. 6.12. Wykres sił tnących i momentów gnących belki utwierdzonej

Rozwiązanie

Na podstawie równań równowagi wyznaczona reakcja R_A oraz moment utwierdzenia M_A wynosi:

$$\sum F_{iy} = R_A - F = 0$$

$$\sum M_{i(A)} = -M_A + F \cdot a - M = 0$$

Bezpośrednio z tych równań otrzymano:

$$R_A = F$$

$$M_A = F \cdot a - M$$

Belkę podzielono na dwa przedziały:

Przedział I: $0 \leq x_1 \leq a$

$$T_{1(x)} = R_A = F$$

$$M_{g_1(x)} = -M_A + R_A \cdot x_1 = -F \cdot a + M + F \cdot a = M$$

Przedział II: $a \leq x_2 \leq a + b$

$$T_{2(x)} = R_A - F = F - F = 0$$

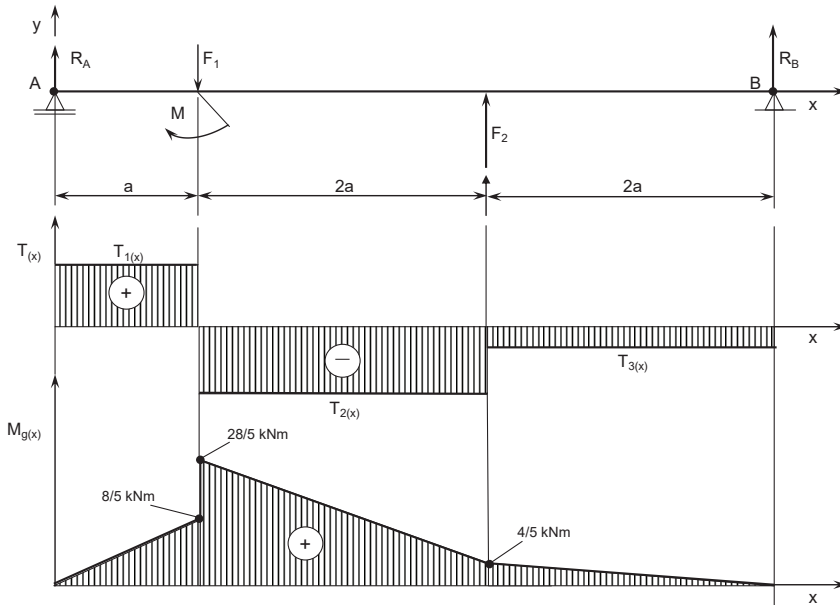
$$M_{g_2(x)} = -M_A + R_A \cdot x_2 - F(x_2 - a) = -M_A + F(a + b) - F(a + b - a) = -F \cdot a + M + F \cdot a + F \cdot b - F \cdot b = M$$

Sporządzony wykres sił tnących przedstawiony na rysunku 6.12, w przedziale I ma wartość siły F , natomiast w przedziale II uzyskuje wartość zerową.

Wykres momentów gnących od wartości maksymalnej równej $M_A = F \cdot a - M$ na początku przedziału I spada do wartości ujemnej i w przedziale II zachowuje stałą wartość równą zadanemu momentowi M .

Przykład 6.3.

Wyznaczyć wielkości podporowe w punkcie A i B belki spoczywającej na dwóch podporach i obciążonej dwoma siłami F_1 i F_2 oraz momentem M . Narysować wykres sił tnących i momentów gnących. Obliczenia wykonać dla danych: $F_1 = 4$ kN, $F_2 = 2$ kN, $M = 4$ kNm, $a = 1$ m. Schemat obciążenia belki przedstawiono na rysunku 6.13.



Rys. 6.13. Wykres sił tnących i momentów gnących belki spoczywającej na dwóch podporach

Rozwiązanie

Reakcje w podporach A i B wyznaczone z równań równowagi przyjmują wartości:

$$\sum F_{iy} = R_A - F_1 + F_2 + R_B = 0$$

$$\sum M_{i(B)} = R_A \cdot 5a - F_1 \cdot 4a + F_2 \cdot 2a + M = 0$$

Rozwiązując układ równań i uwzględniając dane liczbowe uzyskano wyniki:

$$R_A = \frac{8}{5} \text{ kN}$$

$$R_B = \frac{2}{5} \text{ kN}$$

Dokonano podziału belki na trzy przedziały:

Przedział I: $0 \leq x_1 \leq a$

$$T_1(x) = R_A = \frac{8}{5} \text{ kN}$$

$$M_{g_1(x)} = R_A \cdot x_1 = \frac{8}{5} \cdot a = \frac{8}{5} \cdot 1 = \frac{8}{5} \text{ kNm}$$

W końcu przedziału I działa moment $M = 4 \text{ kNm}$, nastąpi więc przeskok momentu $M_{g_1(x)}$ o wartości M , co zapisano:

$$M_{g_1 \text{ max}} = M_{g_1(x)} + M = \frac{8}{5} + 4 = \frac{28}{5} \text{ kNm}$$

Przedział II: $a \leq x_2 \leq 3a$

$$T_2(x) = R_A - F_1 = \frac{8}{5} - 4 = -\frac{12}{5} \text{ kN}$$

$$\begin{aligned} M_{g_2(x)} &= R_A \cdot x_2 + M - F_1(x_2 - a) = \frac{8}{5} \cdot 3a + M - 4 \cdot 2a = \\ &= \frac{24}{5} + 4 - 8 = \frac{4}{5} \text{ kNm} \end{aligned}$$

Przedział III: $3a \leq x_3 \leq 5a$

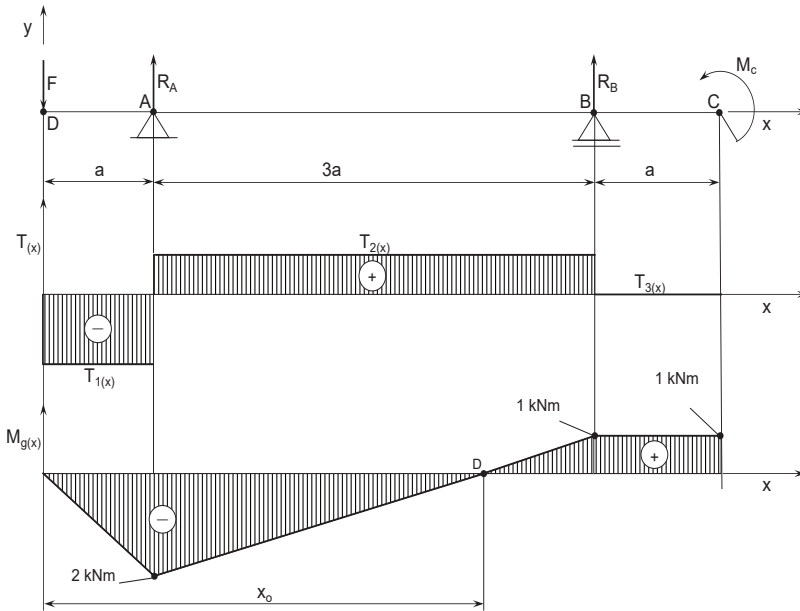
$$T_3(x) = R_A - F_1 + F_2 = \frac{8}{5} - 4 + 2 = -\frac{2}{5} \text{ kN}$$

$$\begin{aligned} M_{g_3(x)} &= R_A \cdot x_3 + M - F_1(x_3 - a) + F_2((x_3 - 3a)) = \\ &= \frac{8}{5} \cdot 5a + M - 4 \cdot 4a + 2 \cdot 2a = \\ &= \frac{40}{5} + 4 - 16 + 4 = 0 \end{aligned}$$

Moment zginający na końcu przedziału III, $M_{g_3(x)} = 0$ jest równocześnie potwierdzeniem poprawnego rozwiązania zadania, gdyż w podporze B nie występuje zginanie. Wykresy sił tnących i momentów gnących przedstawiono na rysunku 6.13.

Przykład 6.4.

Obliczyć wielkości podporowe w punkcie A i B belki spoczywającej na dwóch podporach, obciążonej siłą F i momentem M . Narysować wykres sił tnących i momentów gnących oraz wyznaczyć odległość x_0 , w której wykres momentu gnącego przecina linię zerową. Obliczenia wykonać dla danych: $F = 5 \text{ kN}$, $M_c = 1 \text{ kNm}$, $a = 40 \text{ cm}$. Schemat obciążenia belki przedstawiono na rysunku 6.14.



Rys. 6.14. Wykres sił tnących i momentów gnących belki spoczywającej na dwóch podporach

Rozwiązanie

Na podstawie równań równowagi wyznaczono reakcje w podporach *A* i *B*:

$$\sum F_{iy} = -F + R_A + R_B = 0$$

$$\sum M_{i(B)} = -F \cdot 4a + R_A \cdot 3a - M_c = 0$$

Z rozwiązania układu równań jest:

$$R_A = 7 \text{ kN}$$

$$R_B = -2 \text{ kN}$$

Belkę *CD* podzielono na trzy przedziały:

Przedział I: $0 \leq x_1 \leq a$

$$T_{1(x)} = -F = -5 \text{ kN}$$

$$M_{g1(x)} = -F \cdot a = -5 \cdot 0.4 = -2 \text{ kNm}$$

Przedział II: $a \leq x_2 \leq 4a$

$$T_{2(x)} = -F + R_A = -5 + 7.5 = 2.5 \text{ kN}$$

$$M_{g2(x)} = -F \cdot 4a + R_A(x_2 - a) = -5 \cdot 1.6 + 7.5 \cdot 1.2 = 1 \text{ kNm}$$

Przedział III: $4a \leq x_3 \leq 5a$

$$T_{3(x)} = -F + R_A - R_B = -5 + 7.5 - 2.5 = 0$$

$$M_{g3(x)} = -F \cdot 5a + R_A(x_3 - a) - R_B(x_3 - 4a) = \\ = -5 \cdot 2 + 7.5 \cdot 1.6 - 2.5 \cdot 0.4 = 1 \text{ kNm}$$

Siła tnąca w przedziale III $T_{3(x)} = 0$, stąd też moment zginający $M_{g3(x)}$ w przedziale III ma wartość stałą, która wynosi 1 kNm.

W kolejnym etapie zadania wyznaczono odległość x_o od początku układu współrzędnych do punktu D.

W tym celu ułożono równanie:

$$-F \cdot x_o + R_A (x_o - a) = 0$$

$$-F \cdot x_o + R_A \cdot x_o - R_A \cdot a = 0$$

$$x_o (R_A - F) = R_A \cdot a$$

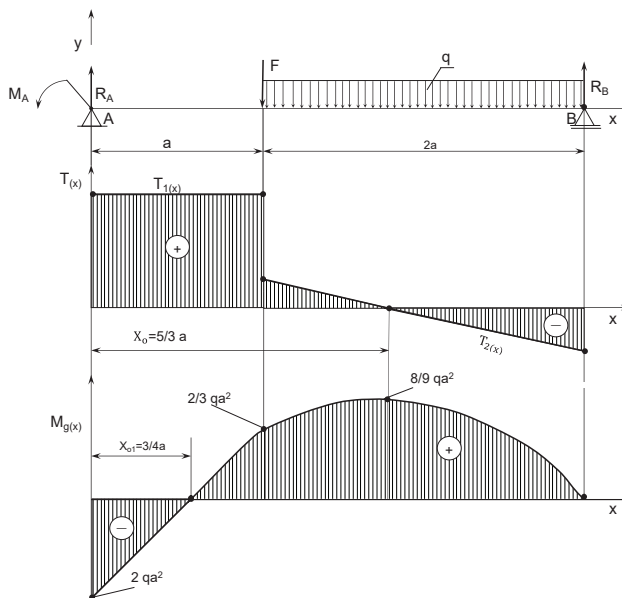
$$x_o = \frac{R_A \cdot a}{R_A - F}$$

$$x_o = \frac{7.5 \cdot 0.4}{7.5 - 5} = \frac{3}{2.5} = 1,2 \text{ m}$$

Wykres sił tnących i momentów gnących wraz ze współzrzedną x_o przedstawiono na rysunku 6.14.

Przykład 6.5.

Wyznaczyć wielkości podporowe belki spoczywającej na dwóch podporach i obciążonej, jak pokazano na rysunku. Narysować wykresy sił tnących i momentów gnących oraz wyznaczyć odległość przecięcia się wykresu sił tnących z linią zerową, a także wykresu momentów gnących z linią zerową. Obliczenia wykonać, przyjmując dane: siła $F = 2qa$, moment $M_A = 2qa^2$, a obciążenie ciągłe q na odcinku $2a$. Schemat obciążenia belki przedstawiono na rysunku 6.15.



Rys. 6.15. Wykres sił tnących i momentów gnących z zaznaczonymi miejscami zerowymi

Rozwiązanie

Równania równowagi rozpatrywanego układu belkowego mają postać:

$$\sum F_{iy} = R_A - F - 2qa + R_B = 0$$

$$\sum M_{i(B)} = R_A \cdot 3a - F \cdot 2a - 2qa^2 - M_A = 0$$

Po rozwiązaniu układu równań otrzymuje się:

$$R_A = \frac{8}{3}qa$$

$$R_B = \frac{4}{3}qa$$

Belkę AB podzielono na dwa przedziały:

Przedział I: $0 \leq x_1 \leq a$

$$T_{1(x)} = R_A = \frac{8}{3}qa$$

$$M_{g_1(x)} = -M_A + R_A \cdot x_1 = -2qa^2 + \frac{8}{3}qa \cdot x_1 = -2qa^2 + \frac{8}{3}qa^2 = \frac{2}{3}qa^2$$

Przedział II: $a \leq x_2 \leq 3a$

$$T_{2(x)} = R_A - F - q(x_2 - a) = \frac{8}{3}qa - 2qa - 2qa = -\frac{4}{3}qa$$

$$\begin{aligned} M_{g_2(x)} &= -M_A + R_A \cdot x_2 - F(x_2 - a) - \frac{1}{2}q(x_2 - a)^2 = \\ &= -2qa^2 + \frac{8}{3}qa \cdot 3a - 2qa \cdot 2a - \frac{1}{2}q \cdot 4a^2 = 0 \end{aligned}$$

Moment gnący w przedziale drugim na rysunku 6.15 przedstawiony jest jako krzywa drugiego stopnia (fragment paraboli). Ekstremum tej krzywej wystąpi w punkcie, gdzie siła tnąca przecina linię zerową, a współrzędną x_o tego punktu wyznacza się z równania:

$$T_{2(x_o)} = R_A - F - q(x_o - a) = 0$$

$$T_{2(x_o)} = \frac{8}{3}qa - 2qa - q \cdot x_o + q \cdot a = 0$$

$$\frac{5}{3}qa - q \cdot x_o = 0$$

$$x_o = \frac{\frac{5}{3}qa}{q}$$

$$x_o = \frac{5}{3}a$$

Dla obliczonej współrzędnej

$$x_o = \frac{5}{3}a$$

moment gnący wynosi:

$$M_{g(x_0)} = M_A + R_A \cdot \frac{5}{3}a - F \left(\frac{5}{3}a - a \right) - \frac{1}{2}q \left(\frac{5}{3}a - a \right)^2$$

$$M_{g(x_0)} = -2qa^2 + \frac{8}{3}qa \cdot \frac{5}{3}a - 2qa \cdot \frac{2}{3}a - \frac{1}{2}q \cdot \frac{4}{9}a^2$$

$$M_{g(x_0)} = -2qa^2 + \frac{40}{9}qa^2 - \frac{4}{3}qa^2 - \frac{2}{9}qa^2$$

$$M_{g(x_0)} = \frac{8}{9}qa^2$$

Wykres momentów gnących przecina linię zerową w przedziale pierwszym. Współrzedną punktu przecięcia obliczono z następującego równania:

$$-M_A + R_A \cdot x_{01} = 0$$

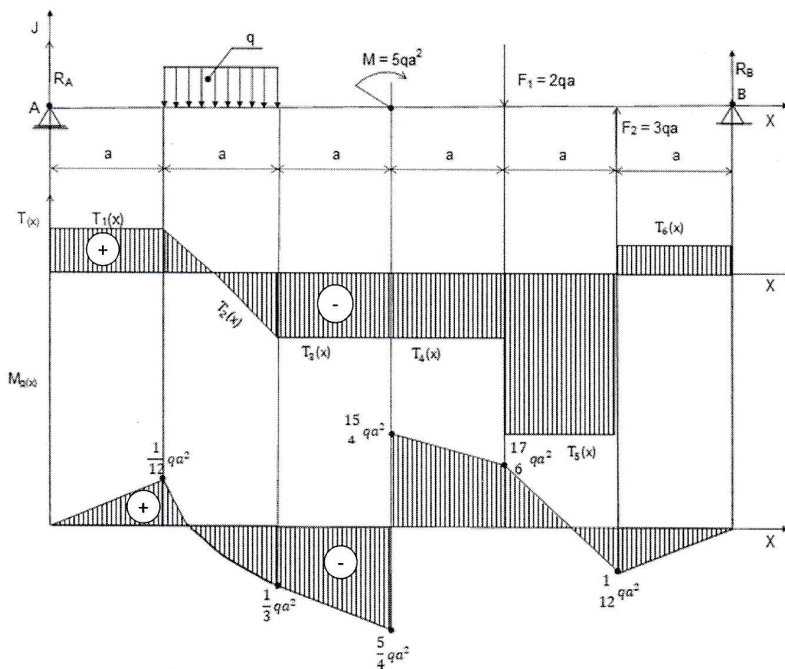
$$R_A \cdot x_{01} = M_A$$

$$x_{01} = \frac{M_A}{R_A} = \frac{2qa^2}{\frac{8}{3}qa} = \frac{3}{4}a$$

Wykres sił tnących i momentów gnących wraz ze współrzednymi x_0 i x_{01} przedstawiono na rysunku 6.15.

Przykład 6.6.

Wyznaczyć reakcje w podporach A i B oraz narysować wykres sił tnących i momentów gnących belki obciążonej jak na rysunku 6.16. Obliczenia wykonać przy danych: obciążenie ciągłe q na odcinku a , moment $M = 5qa^2$, siła $F_1 = 2qa$, siła $F_2 = 3qa$.



Rys. 6.16. Wykres sił tnących i momentów gnących belki spoczywającej na podporach A i B

Rozwiązanie

Reakcje w podporach A i B wyznaczono na podstawie równań równowagi:

$$\sum Fiy = R_A - qa + F_1 + F_2 + R_B = 0$$

$$\sum Mi_{(A)} = \frac{3}{2}qa^2 + 5qa^2 + 8qa^2 - 15qa^2 - R_B \cdot 6a = 0$$

Rozwiązując układ równań ze względu na reakcje R_A i R_B otrzymano:

$$R_A = \frac{1}{12}qa$$

$$R_B = -\frac{1}{12}qa$$

W belce AB wyróżniono sześć przedziałów:

Przedział I: $0 \leq x_1 \leq a$

$$T_{1(x)} = R_A = \frac{1}{12}qa$$

$$Mg_{1(x)} = R_A \cdot x_1 = \frac{1}{12}qa \cdot a = \frac{1}{12}qa^2$$

Przedział II: $a \leq x_2 \leq 2a$

$$T_{2(x)} = R_A - qa = \frac{1}{12}qa - qa = -\frac{11}{12}qa$$

$$Mg_{2(x)} = R_A \cdot x_2 - \frac{1}{2}qa^2 = R_A \cdot 2a - \frac{1}{2}qa^2 = -\frac{1}{3}qa^2$$

Przedział III: $2a \leq x_3 \leq 3a$

$$T_{3(x)} = T_{2(x)} = -\frac{11}{12}qa$$

$$Mg_{3(x)} = R_A \cdot x_3 - \frac{3}{2}qa^2 = R_A \cdot 3a - \frac{3}{2}qa^2 = -\frac{5}{4}qa^2$$

Na końcu przedziału III jest przyłożony moment $M=5qa^2$ w punkcie E. Wartość momentu zginającego w tym punkcie jest równa:

$$Mg_{3(E)} = Mg_{3(x)} + M = -\frac{5}{4}qa^2 + 5qa^2 = \frac{15}{4}qa^2,$$

Przedział IV: $3a \leq x_4 \leq 4a$

$$T_{4(x)} = T_{3(x)} = T_{2(x)} = -\frac{11}{12}qa$$

$$Mg_{4(x)} = R_A \cdot x_4 - \frac{5}{2}qa^2 + M = \frac{1}{12}qa \cdot 4a - \frac{5}{2}qa^2 + 5qa^2 = -\frac{17}{6}qa^2$$

Przedział V: $4a \leq x_5 \leq 5a$

$$T_{5(x)} = R_A - qa - F_1 = \frac{1}{12}qa - qa - 2qa = -\frac{35}{12}qa$$

$$Mg_{5(x)} = R_A \cdot x_5 - \frac{7}{2}qa^2 + M - F_1 \cdot a =$$

$$= \frac{1}{12}qa \cdot 5a - \frac{7}{2}qa^2 + 5qa^2 - 2qa^2 = -\frac{1}{12}qa^2$$

Przedział VI: $5a \leq x_6 \leq 6a$

$$T_{6(x)} = R_A - qa - F_1 + F_2 = \frac{1}{12}qa - qa - 2qa + 3qa = \frac{1}{12}qa$$

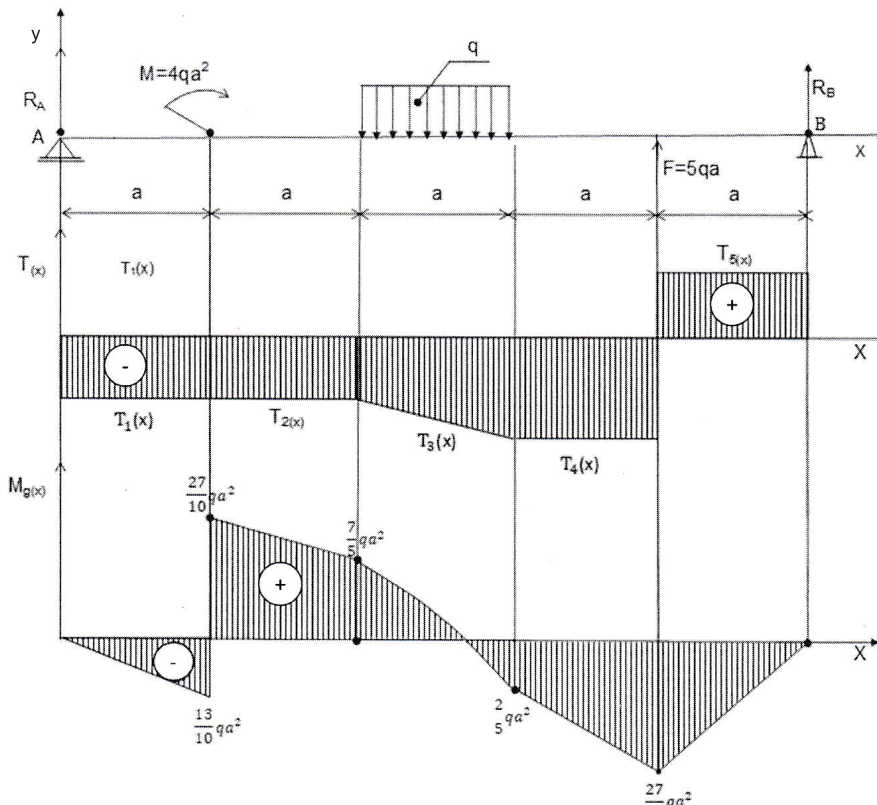
$$Mg_{6(x)} = R_A \cdot x_6 - \frac{9}{2}qa^2 + M - 4qa^2 + 3qa^2 =$$

$$= \frac{1}{12}qa \cdot 6a - \frac{9}{2}qa^2 + 5qa^2 - 4qa^2 + 3qa^2 = 0$$

Na podstawie wyznaczonych sił tnących i momentów gnących w poszczególnych przedziałach zbudowano ich wykresy przedstawione na rysunku 6.16.

Przykład 6.7.

Belka spoczywająca na podporach *A* i *B* została obciążona momentem zginającym *M*, obciążeniem ciągłym *q* oraz siłą skupioną *F*. Wyznaczyć reakcje w podporach *A* i *B* oraz narysować wykres sił tnących i momentów gnących. Schemat obciążonej belki przedstawiono na rysunku 6.17.



Rys. 6.17. Wykres sił tnących i momentów gnących belki spoczywającej na podporach *A* i *B*

Rozwiązanie

Na podstawie równań równowagi wyznaczono reakcje w podporach A i B :

$$\sum Fiy = R_A - qa + F + R_B = 0$$

$$\sum Mi_{(A)} = M + \frac{5}{2}qa^2 - F \cdot 4a - R_B \cdot 5a = 0$$

Rozwiązanie układu równań prowadzi do wyznaczenia reakcji R_A i R_B .

$$R_A = -\frac{13}{10}qa$$

$$R_B = -\frac{27}{10}qa$$

Belkę AB podzielono na pięć przedziałów:

Przedział I: $0 \leq x_1 \leq a$

$$T_{1(x)} = R_A = -\frac{13}{10}qa$$

$$M_{g1(x)} = R_A \cdot x_1 = -\frac{13}{10}qa \cdot a = -\frac{13}{10}qa^2$$

Przedział II: $a \leq x_2 \leq 2a$

$$T_{2(x)} = R_A = T_{1(x)} = -\frac{13}{10}qa$$

$$M_{g2(x)} = R_A \cdot x_2 + M = -\frac{13}{10}qa \cdot 2a + 4qa^2 = \frac{7}{5}qa^2$$

Przedział III: $2a < x_3 \leq 3a$

$$T_{3(x)} = R_A - qa = -\frac{13}{10}qa - qa = -\frac{23}{10}qa$$

$$M_{g3(x)} = R_A \cdot x_3 + M - \frac{1}{2}qa^2 = -\frac{13}{10}qa \cdot 3a + 4qa^2 - \frac{1}{2}qa^2 - \frac{1}{2}qa^2 =$$

$$= -\frac{2}{5}qa^2$$

Przedział IV: $3a \leq x_4 \leq 4a$

$$T_{4(x)} = R_A - qa = -\frac{13}{10}qa - qa = -\frac{23}{10}qa$$

$$M_{g4(x)} = R_A \cdot x_4 + M - \frac{3}{2}qa^2 = -\frac{13}{10}qa \cdot 4a + 4qa^2 - \frac{3}{2}qa^2 =$$

$$= -\frac{27}{10}qa^2$$

Przedział V: $4a \leq x_5 \leq 5a$

$$T_{5(x)} = R_A - qa + F = -\frac{13}{10}qa - qa + 5qa = \frac{27}{10}qa$$

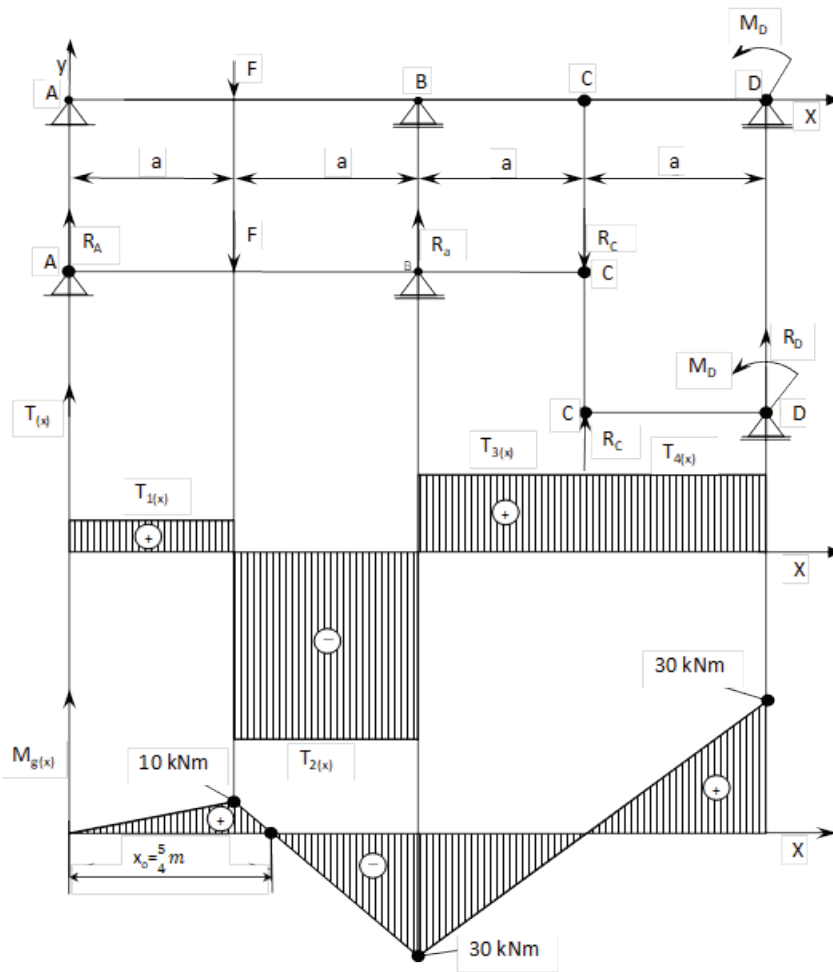
$$M_{g5(x)} = R_A \cdot x_5 + M - \frac{5}{2}qa^2 + F \cdot a =$$

$$= -\frac{13}{10}qa \cdot 5a + 4qa^2 - \frac{5}{2}qa^2 + 5qa^2 = 0$$

Wykresy sił tnących i momentów gnących na podstawie uzyskanych wyników obliczeń przedstawiono na rysunku 6.17

Przykład 6.8.

Wyznaczyć reakcje w podporach: A, B, D oraz narysować wykres sił tnących i momentów gnących układu dwóch belek połączonych przegubowo w punkcie C. Obliczenia wykonać dla danych: $F=50 \text{ kN}$, $M_D=30 \text{ kNm}$, $a=1\text{m}$. Układ belkowy z obciążeniem przedstawiono na rysunku 6.18.



Rys. 6.18. Wykres sił tnących i momentów gnących dwóch belek połączonych przegubowo

Rozwiązanie

Rozpatrywany układ składa się z dwóch belek połączonych przegubowo w punkcie C . Układ ten nie może być rozwiązany jako jedna belka, gdyż występują w nim trzy nieznanne reakcje na podporach A , B i D oraz reakcja wzajemnego oddziaływania w przegubie C . Równań równowagi statycznej można napisać tylko trzy.

Aby było możliwe rozwiązanie zadania, układ należy rozłączyć w przegubie C i traktować jako dwie samodzielne belki.

Równania równowagi belki CD i wyznaczenie reakcji R_C i R_D :

$$\sum M_{i(D)} = R_C \cdot a - M_D = 0$$

Stąd:

$$R_C = \frac{M_D}{a} = \frac{30 \cdot 10^3}{1} = 30 \text{ kN}$$

Suma rzutów sił na oś y :

$$\sum F_{iy} = R_C + R_D = 0$$

Stąd:

$$R_D = -R_C = -30 \text{ kN}$$

Na rysunku 6.18 zaznaczono, że reakcja R_D ma zwrot dodatni. Jednakże z obliczeń wynika, że rzeczywisty zwrot reakcji R_D jest przeciwny do dodatniego kierunku na osi y .

Ułożone warunki równowagi dla belki ABC pozwolą na wyznaczenie reakcji R_A i R_B . Warunki te zapisano:

$$\sum M_{i(B)} = R_A \cdot 2a - F \cdot a + R_C \cdot a = 0$$

$$\sum M_{i(A)} = F \cdot a - R_B \cdot 2a + R_C \cdot 3a = 0$$

Stąd wyznaczone reakcje R_A i R_B przyjmują wartość:

$$R_A = \frac{F \cdot a - R_C \cdot a}{2a} = \frac{1}{2}F - \frac{1}{2}R_C = \frac{1}{2} \cdot 50 - \frac{1}{2} \cdot 30 = 10 \text{ kN}$$

$$R_B = \frac{F \cdot a + R_C \cdot 3a}{2a} = \frac{1}{2}F + \frac{3}{2}R_C = \frac{1}{2} \cdot 50 + \frac{3}{2} \cdot 30 = 70 \text{ kN}$$

Belkę podzielono na cztery przedziały i wyznaczono w poszczególnych przedziałach siły tnące i momenty gnące.

Przedział I: $0 \leq x_1 \leq a$

$$T_{1(x)} = R_A = 10 \text{ kN}$$

$$M_{g_1(x)} = R_A \cdot x_1 = 10 \cdot 1 = 10 \text{ kNm}$$

Przedział II: $a \leq x_2 \leq 2a$

$$T_{2(x)} = R_A - F = 10 - 50 = -40 \text{ kN}$$

$$M_{g_2(x)} = R_A \cdot x_2 - F(x_2 - a) = 10 \cdot 2 - 50 \cdot 1 = -30 \text{ kNm}$$

Przedział III: $2a \leq x_3 \leq 3a$

$$T_{3(x)} = R_A - F + R_B = 10 - 50 + 70 = 30 \text{ kN}$$

$$M_{g_3(x)} = R_A \cdot x_3 - F(x_3 - a) + R_B(x_3 - 2a) = 10 \cdot 3 - 50 \cdot 2 + 70 \cdot 1 = 0 \text{ kNm}$$

Przedział IV: $3a \leq x_4 \leq 4a$

Tu uwaga, przedział IV dotyczy belki CD na rysunku 6.18, więc jest:

$$T_{4(x)} = R_C = 30 \text{ kN}$$

$$M_{g_4(x)} = R_C(x_4 - 3a) = 30 \cdot 1 = 30 \text{ kNm}$$

Wyznaczone siły tnące w przedziale III i IV są sobie równe, to znaczy $T_{3(x)} = T_{4(x)} = 30 \text{ kN}$. Obliczony moment gnący w przegubie C ma wartość zerową, co jest zgodne z regułą, że przeguby nie przenoszą momentów zginających.

Wyznaczona współrzędna punktu przecięcia się wykresu momentu zginającego z linią zerową w przedziale drugim, wynosi:

$$R_A \cdot x_o - F(x_o - a) = 0$$

$$R_A \cdot x_o - F \cdot x_o + F \cdot a = 0$$

$$x_o(R_A - F) = -F \cdot a$$

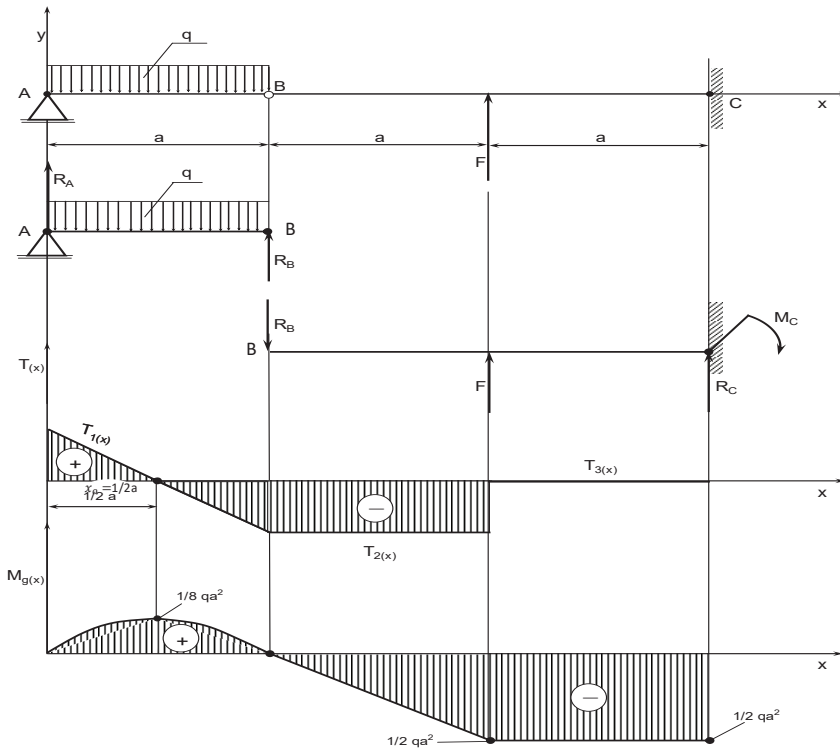
$$x_o = \frac{-F \cdot a}{R_A - F} = \frac{-50 \cdot 1}{10 - 50} = \frac{-50}{-40} = \frac{5}{4} \text{ m}$$

Wykres sił tnących i momentów gnących wraz ze współrzędną x_o przedstawiono na rysunku 6.18.

Przykład 6.9.

Wyznaczyć wielkości podporowe w punkcie A i C dwóch belek połączonych przegubowo w punkcie B oraz narysować wykres sił tnących i momentów gnących dla tego układu. Dane są następujące: obciążenie ciągłe wynosi q , siła skupiona .

Schemat obciążenia belek przedstawiono na rysunku 6.19.



Rys. 6.19. Wykres sił tnących i momentów gnących dwóch belek połączonych ze sobą przegubowo w punkcie B

Rozwiązanie

Belkę ABC rozdzielono w przegubie B na dwie części. Jest to belka AB i BC . Przegub B zostanie zastąpiony reakcjami wzajemnego oddziaływania $R_B = -R_B$.

Reakcję w podporze A i w przegubie B wyznaczono z równań równowagi dla części belki AB :

$$\sum F_{iy} = R_A - q \cdot a + R_B = 0$$

$$\sum M_{i(B)} = R_A \cdot a - \frac{1}{2} qa^2 = 0$$

$$R_A = R_B = \frac{1}{2} qa$$

Równania równowagi dla części belki BC oraz wyznaczenie reakcji R_C i momentu utwierdzenia M_C :

$$\sum F_{iy} = -R_B + F + R_C = 0$$

$$\sum M_{i(B)} = M_C - R_C \cdot 2a - F \cdot a = 0$$

Stąd R_C równa się:

$$R_C = R_B - F = \frac{1}{2}qa - \frac{1}{2}qa = 0$$

$$M_C = R_C \cdot 2a + F \cdot a = 0 \cdot 2a + \frac{1}{2}qa \cdot a = \frac{1}{2}qa^2$$

Długość całej belki ABC podzielono na trzy przedziały:

Przedział I: $0 \leq x_1 \leq a$ (dotyczy belki AB)

$$T_{1(x)} = R_A - q \cdot x_1 = \frac{1}{2}qa - qa = -\frac{1}{2}qa$$

$$M_{g_1(x)} = R_A \cdot x_1 - \frac{1}{2}qx_1^2 = \frac{1}{2}qa^2 - \frac{1}{2}qa^2 = 0$$

Dla belki BC przedziały: II i III

Przedział II: $a \leq x_2 \leq 2a$

$$T_{2(x)} = -R_B = -\frac{1}{2}qa$$

$$M_{g_2(x)} = -R_B(x_2 - a) = -\frac{1}{2}qa \cdot a = -\frac{1}{2}qa^2$$

Przedział III: $2a \leq x_3 \leq 3a$

$$T_{3(x)} = -R_B + F = -\frac{1}{2}qa + \frac{1}{2}qa = 0$$

$$M_{g_3(x)} = -R_B(x_3 - a) + F(x_3 - 2a) = -\frac{1}{2}qa \cdot 2a + \frac{1}{2}qa \cdot a = -\frac{1}{2}qa^2$$

Współrzedną przecięcia wykresu sił tnących $T_{l(x)}$ z linią zerową wyznaczono z zależności:

$$R_A - q \cdot x_o = 0$$

$$\frac{1}{2}qa - q \cdot x_o = 0$$

$$x_o = \frac{\frac{1}{2}qa}{q} = \frac{1}{2}a$$

Wykres momentów gnących $M_{g_l(x)}$ jako fragment paraboli drugiego stopnia uzyskuje wartość maksymalną w przedziale pierwszym w miejscu o współrzednej $x_o = \frac{1}{2}a$.

Dla tej współrzednej wyznaczona wartość momentu gnącego wynosi:

$$M_{g_1(x_o=\frac{1}{2}a)} = R_A \cdot \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}q \left(\frac{1}{2}a\right)^2 = \frac{1}{4}qa^2 - \frac{1}{8}qa^2 = \frac{1}{8}qa^2$$

Wykres sił tnących i momentów gnących przedstawiono na rysunku 6.19.

7. ZAGADNIENIA WYBRANE – METODY ENERGETYCZNE

7.1. UKŁADY STATYCZNIE WYZNACZALNE, TWIERDZENIE CASTIGLIANA

Stosowanie metod energetycznych w analizie wytrzymałościowej elementów konstrukcyjnych ułatwia ich rozwiązywanie. W metodzie tej korzysta się z wzorów, które wykorzystują energię sprężystą nagromadzoną w materiale. Energia odkształcenia U , jako energia potencjalna w zależności od obciążenia elementu konstrukcyjnego wyrażana jest za pomocą odpowiednich wzorów.

Rozciąganie i ściskanie:

$$\frac{dU}{dx} = \frac{1}{2} \cdot \frac{N^2}{EA}$$

Zginanie:

$$\frac{dU}{dx} = \frac{1}{2} \cdot \frac{M_g^2}{EI}$$

Skęcianie:

$$\frac{dU}{dx} = \frac{1}{2} \cdot \frac{M_s^2}{GI_o}$$

gdzie: U – energia sprężysta, N – siła normalna rozciągająca lub ściskająca, E – moduł Younga, A – przekrój poprzeczny pręta, M_g – moment zginający, I – geometryczny moment bezwładności przy zginaniu, M_s – moment skręcający, G – moduł sprężystości poprzecznej lub moduł Kirchoffa, I_o – biegunowy moment bezwładności przy skręcaniu.

Jak z powyższych wzorów widać, że energia sprężysta jednostki pręta, jest równa połowie ilorazu kwadratu siły wewnętrznej i odpowiedniej sztywności.

W analizie układów liniowo-sprężystych stosowana jest zasada zachowania energii. Według tej zasady, praca uogólnionych sił zewnętrznych na odpowiadających im przemieszczeniach uogólnionych jest równa energii wewnętrznej U odkształcenia sprężystego.

Dla układów liniowo-sprężystych pochodna cząstkowa energii sprężystej wewnętrznej całego układu względem jednej z niezależnie działających sił uogólnionych, jest równa przemieszczeniu uogólnionemu odpowiadającemu tej sile. Formuła ta może być zapisana wzorem:

$$\frac{\partial U}{\partial F_i} = \delta_i \quad (7.1)$$

Wzór (7.1) wyraża twierdzenie Castigliano. Zależność (7.1) może być zapisana też w innej postaci:

$$\frac{\partial U}{\partial \delta_i} = F_i \quad (7.2)$$

Zależność tę odczytuje się, że pochodna cząstkowa energii sprężystej względem przemieszczenia równa się sile powodującej to przemieszczenie. Jeżeli wydarzy się tak, że w danym układzie nie ma rzeczywistej siły F_i , odpowiadającej poszukiwanemu przemieszczeniu δ_i , to należy przyłożyć odpowiednią siłę fikcyjną F_i , którą po wykonaniu różniczkowania przyrównuje się do zera.

Przyjęcie zwrotu siły fikcyjnej może być dowolne. Jeżeli wynik obliczeń przemieszczenia δ_i jest dodatni, to zwrot przemieszczenia jest zgodny, a jeżeli ujemny, to przeciwny do zwrotu F_i .

Twierdzenie Castigliana wykorzystywane jest do wyznaczania przemieszczeń prętów zginanych, stosując następujący wzór na energię sprężystą nagromadzoną w całym pręcie o długości L :

$$U = \int_0^L \frac{M_g^2}{2EI} dx \quad (7.3)$$

Wzór powyższy dotyczy pręta o jednakowej średnicy na całej długości L . Jeżeli średnica pręta zmienia się na długości, albo układ składa się z kilku prętów, to energię sprężystą należy wyznaczyć jako sumę energii nagromadzonej we wszystkich prętach:

$$U = \sum_{i=1}^n \int_0^{L_i} \frac{M_g^2}{2EI} dx \quad (7.4)$$

Po zróżniczkowaniu wzór na przemieszczenie δ_i przyjmuje postać:

$$\delta_i = \sum_{i=1}^n \frac{1}{EI} \int_0^{L_i} M_g \cdot \frac{\partial M_g}{\partial F_i} dL \quad (7.5)$$

Wzór (7.5) ma zastosowanie do wyznaczania przemieszczeń, jak również do wyznaczania kąta obrotu analizowanych układów prętowych. Jeżeli obliczane jest przemieszczenie, to w wyrażeniu podcałkowym pochodna cząstkowa momentu gnącego liczona jest według siły działającej w miejscu szukanego przemieszczenia. Natomiast, gdy do wyznaczenia jest kąt obrotu, to pochodną cząstkową momentu gnącego należy policzyć względem momentu przyłożonego w punkcie przekroju, którego kąt obrotu ma być liczony. Jest jeszcze jedna uwaga, w przypadku kiedy w punkcie przekroju, w którym liczone jest ugięcie lub kąt obrotu, nie ma siły czy momentu, to należy przyłożyć tak zwaną siłę fikcyjną lub moment fikcyjny i wykonywać działania jak wskazuje wzór (7.5). Po zakończeniu obliczeń do uzyskanych wyrażeń w miejsce przyjętych fikcyjnie wielkości należy wstawić zero.

7.2. UKŁADY STATYCZNIE NIETYCZALNE, TWIERDZENIE MENABRE’A

W układach statycznie niewyznaczalnych energię wewnętrzną można wyrazić jako funkcję obciążeń zewnętrznych F_1, F_2, \dots, F_n i reakcji hiperstatycznych X i traktowanych jako zmienne niezależne, czyli:

$$U = f(F_1, F_2, \dots, F_n, X_1, X_2, \dots, X_n) \quad (7.6)$$

W miejscach występowania reakcji hiperstatycznych przemieszczenia mają wartości zerowe, więc zgodnie z twierdzeniem Castigliano można napisać wyrażenie o minimum energii w następującej postaci:

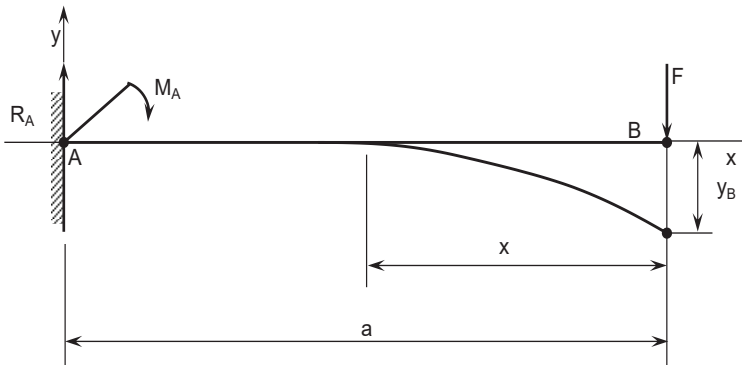
$$\frac{\partial U}{\partial X_i} = 0 \quad (7.7)$$

Równanie (7.7) wyraża twierdzenie Menabre’a, które można wypowiedzieć, że pochodna cząstkowa energii wewnętrznej całego układu względem reakcji hiperstatycznej jest równa zero. Przy rozwiązywaniu układów statycznie niewyznaczalnych, równań (7.7) układu się tyle, ile w danym układzie jest reakcji hiperstatycznych.

7.3. PRZYKŁADY ZADAŃ Z ROZWIĄZANAMI

Przykład 7.1.

Belkę utwierdzoną w punkcie A obciążono siłą skupioną F na jej końcu. Sztywność belki na całej długości jest jednakowa i wynosi EI . Obliczyć ugięcie belki w punkcie B . Schemat obciążenia belki przedstawiono na rysunku 7.1.



Rys. 7.1. Ugięcie y_B belki utwierdzonej

Rozwiązanie

W punkcie utwierdzenia belki zaznaczono reakcję R_A i moment utwierdzenia M_A . Nie będą one jednak obliczane, gdyż do wyznaczenia ugięcia belki w punkcie B nie ma takiej konieczności.

Do wyznaczenia ugięcia stosuje się wzór (7.4) z twierdzenia Castigliano. Belka na rysunku 7.1 ma jeden przedział, a więc jej ugięcie w punkcie B wyraża się wzorem w postaci:

$$y_B = \frac{1}{EI} \int_0^a M_{g(x)} \cdot \frac{\partial M_{g(x)}}{\partial F} dx$$

Na podstawie rysunku 7.1 moment zginający $M_{g(x)}$ zapisano wzorem:
 $M_{g(x)} = F \cdot x$

Pochodną cząstkową tego momentu wyznacza się według siły F działającej w punkcie B, gdyż ugięcie belki jest liczone właśnie w tym punkcie.

$$\frac{\partial M_{g(x)}}{\partial F} = x$$

Stąd ugięcie belki y_B jest równe:

$$y_B = \frac{1}{EI} \int_0^a (F \cdot x) x dx = \frac{1}{EI} \cdot F \int_0^a x^2 dx = \frac{F}{EI} \left| \frac{x^3}{3} \right|_0^a$$

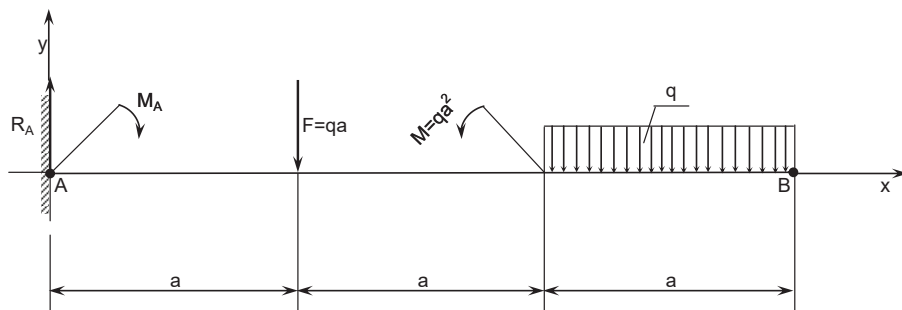
$$y_B = \frac{Fa^3}{3EI}$$

Według ostatniego wyrażenia na y_B można wyznaczać ugięcie belki o dowolnej długości a i o dowolnym przekroju, który zawiera się w geometrycznym momencie bezwładności, obciążonej według schematu przedstawionego na rysunku 7.1.

Przykład 7.2.

Obliczyć ugięcie belki w punkcie B, obciążonej siłą skupioną F , momentem M oraz obciążeniem ciągłym q . Sztywność belki jest stała i wynosi EI . Schemat obciążenia belki przedstawiono na rysunku 7.2.

Jak w zadaniu poprzednim należy stosować twierdzenie Castigliano.

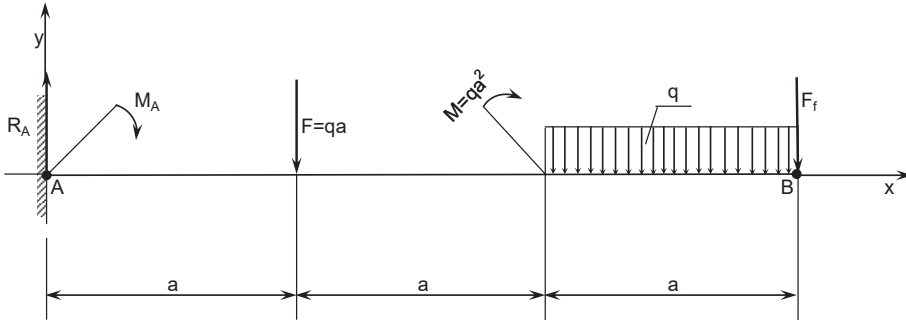


Rys. 7.2. Schemat obciążenia belki utwierdzonej

Rozwiązanie

W tym przypadku również nie będą wyznaczone wielkości podporowe w punkcie A.

Do wyznaczenia jest ugięcie belki w punkcie B , a w punkcie B nie ma przyłożonej siły, według której wzór (7.5) wskazuje liczenie pochodnej cząstkowej. Należy zatem w punkcie B przyłożyć siłę fikcyjną $F_f = 0$, o kierunku przemieszczenia punktu B . Nowy układ belkowy z dodatkową siłą fikcyjną F_f przedstawiono na rysunku 7.3.



Rys. 7.3. Schemat obciążenia belki utwierdzonej z dodatkową siłą fikcyjną F_f w punkcie B

Aby nie zagęszczać rysunku nie będą na nim naniesione przedziały oznaczone jako: x_1, x_2, x_3 , na które została podzielona długość belki AB . W poszczególnych przedziałach określono momenty zginające.

Przedział I: $0 \leq x_1 \leq a$

$$M_{g_1(x)} = F_f \cdot x_1 + \frac{1}{2} q x_1^2$$

Przedział II: $a \leq x_2 \leq 2a$

$$M_{g_2(x)} = F_f \cdot x_2 + qa \left(x_2 - \frac{1}{2} a \right) + M = F_f \cdot x_2 + qa \left(x_2 - \frac{1}{2} a \right) + qa^2$$

Przedział III: $2a \leq x_3 \leq 3a$

$$\begin{aligned} M_{g_3(x)} &= F_f \cdot x_3 + qa \left(x_3 - \frac{1}{2} a \right) + M + F(x_3 - 2a) = \\ &= F_f \cdot x_3 + qa \left(x_3 - \frac{1}{2} a \right) + qa^2 + qa(x_3 - 2a) \end{aligned}$$

Korzystając z twierdzenia Castigliana wzór (7.5), ugięcie belki w punkcie B wyrażono zapisem:

$$y_B = \frac{1}{EI} \left[\int_0^a M_{g_1(x)} \cdot \frac{\partial M_{g_1(x)}}{\partial F_f} dx_1 + \int_a^{2a} M_{g_2(x)} \cdot \frac{\partial M_{g_2(x)}}{\partial F_f} dx_2 + \int_{2a}^{3a} M_{g_3(x)} \cdot \frac{\partial M_{g_3(x)}}{\partial F_f} dx_3 \right]$$

Obliczenie pochodnych cząstkowych według siły fikcyjnej F_f daje:

$$\frac{\partial M_{g_1(x)}}{\partial F_f} = \frac{\partial \left(F_f \cdot x_1 + \frac{1}{2} q \cdot x_1^2 \right)}{\partial F_f} = x_1$$

$$\frac{\partial M_{g_2(x)}}{\partial F_f} = \frac{\partial \left(F_f \cdot x_2 + qa \left(x_2 - \frac{1}{2} a \right) + qa \right)}{\partial F_f} = x_2$$

$$\frac{\partial M_{g_3(x)}}{\partial F_f} = \frac{\partial \left(F_f \cdot x_3 + qa \left(x_3 - \frac{1}{2} a \right) + qa^2 (x_3 - 2a) \right)}{\partial F_f} = x_3$$

Po wyznaczeniu pochodnych cząstkowych równanie na ugięcie y_B przyjmuje postać:

$$y_B = \frac{1}{EI} \left[\int_0^a \left(F_f \cdot x_1 + \frac{1}{2} q \cdot x_1^2 \right) \cdot x_1 dx_1 + \int_a^{2a} \left(F_f \cdot x_2 + qa \left(x_2 - \frac{1}{2} a \right) + qa^2 \right) \cdot x_2 dx_2 + \int_{2a}^{3a} \left(F_f \cdot x_3 + qa \left(x_3 - \frac{1}{2} a \right) + qa^2 + qa(x_3 - 2a) \right) \cdot x_3 dx_3 \right]$$

Dalsze działania prowadzą do zapisu:

$$y_B = \frac{1}{EI} \left[\left(F_f \cdot \frac{x_1^3}{3} + \frac{1}{8} q x_1^4 \right) \Big|_0^a + \left(F_f \cdot \frac{x_2^3}{3} + qa \cdot \frac{x_2^3}{3} - \frac{1}{2} qa^2 \cdot \frac{x_2^2}{2} + qa^2 \cdot \frac{x_2^2}{2} \right) \Big|_a^{2a} + \left(F_f \cdot \frac{x_3^3}{3} + qa \cdot \frac{x_3^3}{3} - \frac{1}{2} qa^2 \cdot \frac{x_3^2}{2} + qa^2 \cdot \frac{x_3^2}{2} + qa \cdot \frac{x_3^3}{3} - 2qa^2 \cdot \frac{x_3^2}{2} \right) \Big|_{2a}^{3a} \right]$$

$$y_B = \frac{1}{EI} \left[\left(\frac{1}{3} F_f \cdot a^3 + \frac{1}{8} qa^4 \right) + \left(\frac{8}{3} F_f \cdot a^3 + \frac{8}{3} qa^4 - qa^4 + 2qa^4 \right) - \left(\frac{1}{3} F_f \cdot a^3 + \frac{1}{3} qa^4 - \frac{1}{4} qa^4 + \frac{1}{2} qa^4 \right) + \left(9F_f \cdot a^3 + 9qa^4 - \frac{9}{4} qa^4 + \frac{9}{2} qa^4 + 9qa^4 - 9qa^4 \right) - \left(\frac{8}{3} F_f \cdot a^3 + \frac{8}{3} qa^4 - qa^4 + 2qa^4 + \frac{8}{3} qa^4 - 4qa^4 \right) \right]$$

Redukcja wyrazów podobnych prowadzi do równania:

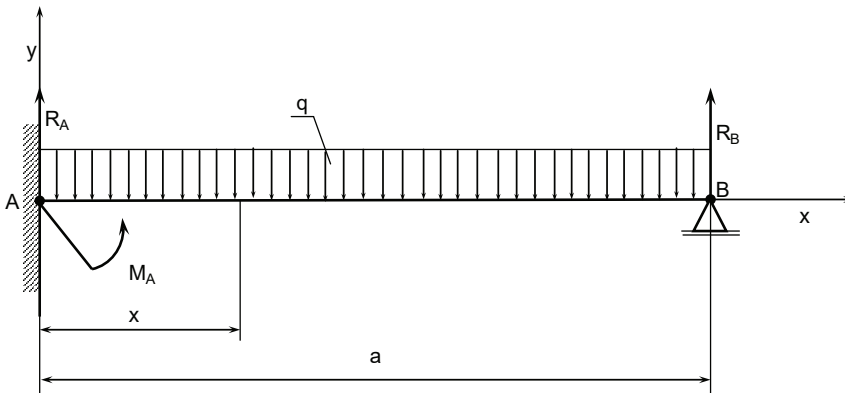
$$y_B = \frac{1}{EI} \left(9F_f \cdot a^3 + \frac{97}{8} qa^4 \right)$$

Siłę fikcyjną F_f należy opuścić, gdyż z założenia $F_f = 0$, co ostatecznie daje wynik ugięcia belki w punkcie B :

$$y_B = \frac{97qa^4}{8EI}$$

Przykład 7.3.

Obliczyć wielkości podporowe w punkcie A i B belki przedstawionej na rysunku 7.4. Sztywność belki EI na całej długości jest jednakowa.



Rys. 7.4. Schemat obciążenia belki statycznie niewyznaczalnej

Rozwiązanie

W rozpatrywanym układzie belkowym występują trzy wielkości podporowe: R_A , R_B i M_A . Równań równowagi można napisać dwa. Zatem układ jest jednokrotnie statycznie niewyznaczalny. Do rozwiązania tego zadania będzie zastosowane twierdzenie Menabre'a.

Równania równowagi dla belki AB zapisano:

$$\sum F_{iy} = R_A - qa + R_B = 0$$

$$\sum M_{i(B)} = -M_A + R_A \cdot a - \frac{1}{2}qa^2 = 0$$

Jako wielkość hiperstatyczną przyjęto moment utwierdzenia M_A .

Wykorzystanie warunku o minimum energii pozwoli na otrzymanie dodatkowego równania. Warunek o minimum energii:

$$\frac{\partial U}{\partial M_A} = 0$$

Energię sprężystą belki wyraża równanie opisujące jej zginanie:

$$M_{g(x)} = -M_A + R_A \cdot x - \frac{1}{2}qx^2$$

Wzór na $M_{g(x)}$ wyrażający energię sprężystą belki zawiera siły czynne q , wielkość hiperstatyczną M_A i reakcję podporową R_A . Natomiast wymaga się, aby energia ta była wyrażona wyłącznie przez siły czynne i wielkości hiperstatyczne. Zatem reakcję R_A należy wyznaczyć z warunku równowagi, która jest równa:

$$R_A = \frac{M_A}{a} + \frac{1}{2}qa$$

i następnie wstawić do równania na moment zginający, które wyraża energię sprężystą:

$$M_{g(x)} = -M_A + M_A \cdot \frac{x}{a} + \frac{1}{2}q \cdot a \cdot x - \frac{1}{2}qx^2$$

Równanie dodatkowe:

$$\frac{\partial U}{\partial M_A} = 0$$

przyjmuje postać:

$$\frac{1}{EI} \int_0^a M_{g(x)} \cdot \frac{\partial M_{g(x)}}{\partial M_A} dx = 0$$

Wyznaczona pochodna cząstkowa jest równa:

$$\frac{\partial M_{(x)}}{\partial M_A} = \frac{\partial \left(-M_A + M_A \cdot \frac{x}{a} + \frac{1}{2} q \cdot a \cdot x - \frac{1}{2} qx^2 \right)}{\partial M_A} = \frac{x}{a} - 1$$

Następnie tak wyznaczoną pochodną cząstkową wstawia się do wyrażenia podcałkowego:

$$\frac{1}{EI} \int_0^a \left[\left(-M_A + M_A \cdot \frac{x}{a} + \frac{1}{2} q \cdot a \cdot x - \frac{1}{2} qx^2 \right) \cdot \left(\frac{x}{a} - 1 \right) \right] dx = 0$$

Wykonane działania matematyczne prowadzą do wyznaczenia momentu utwierdzenia M_A :

$$\frac{1}{EI} \int_0^a \left[-M_A \cdot \frac{x}{a} + M_A \cdot \frac{x^2}{a^2} + \frac{1}{2} qx^2 - \frac{1}{2} q \cdot \frac{x^3}{a} + M_A - M_A \cdot \frac{x}{a} - \frac{1}{2} qax + \frac{1}{2} qx^2 \right] dx = 0$$

$$\frac{1}{EI} \int_0^a \left[-2M_A \cdot \frac{x}{a} + M_A \cdot \frac{x^2}{a^2} + qx^2 - \frac{1}{2} q \cdot \frac{x^3}{a} + M_A - \frac{1}{2} qax \right] dx = 0$$

$$\frac{1}{EI} \left[-\frac{2M_A}{a} \cdot \frac{x^2}{2} + \frac{M_A}{a^2} \cdot \frac{x^3}{3} + q \cdot \frac{x^3}{3} - \frac{q}{2a} \cdot \frac{x^4}{4} + M_A \cdot x - \frac{q \cdot a}{2} \cdot \frac{x^2}{2} \right]_0^a = 0$$

$$\frac{1}{EI} \left[-\frac{2M_A}{a} \cdot \frac{a^2}{2} + \frac{M_A}{a^2} \cdot \frac{a^3}{3} + q \cdot \frac{a^3}{3} - \frac{q}{2a} \cdot \frac{a^4}{4} + M_A \cdot a - \frac{q \cdot a}{2} \cdot \frac{a^2}{2} \right] = 0$$

$$\frac{1}{EI} \left[\frac{1}{3} M_A \cdot a + \frac{1}{3} q \cdot a^3 - \frac{1}{8} q \cdot a^3 - \frac{1}{4} qa^3 \right] = 0$$

$$\frac{1}{EI} \left[\frac{1}{3} M_A \cdot a - \frac{1}{24} qa^3 \right] = 0$$

$$\frac{1}{EI} \neq 0$$

Zatem:

$$\frac{1}{3} M_A \cdot a - \frac{1}{24} qa^3 = 0$$

$$M_A = \frac{\frac{1}{24} qa^3}{\frac{1}{3} a} = \frac{3qa^3}{24a} = \frac{1}{8} qa^2$$

Wracając do równań równowagi wyznaczono reakcje R_A i R_B :

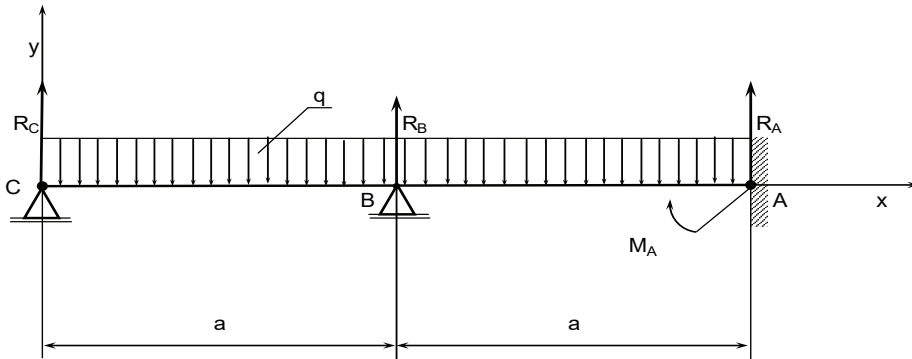
$$R_A = \frac{M_A + \frac{1}{2}qa^2}{a} = \frac{\frac{1}{8}qa^2 + \frac{1}{2}qa^2}{a} = \frac{\frac{5}{8}qa^2}{a} = \frac{5}{8}qa$$

$$R_B = qa - R_A = qa - \frac{5}{8}qa = \frac{3}{8}qa$$

Tym samym wszystkie wielkości podporowe zostały wyznaczone.

Przykład 7.4.

Belka utwierdzona, dodatkowo spoczywa na dwóch podporach. Wyznaczyć reakcje w podporach A , B , C oraz moment utwierdzenia M_A . Sztywność belki EI jest stała na całej długości. Schemat obciążenia belki przedstawiono na rysunku 7.5.



Rys. 7.5. Schemat obciążenia belki dwuprzęsłowej

Rozwiązanie

Belka ABC posiada cztery wielkości podporowe: reakcje R_A , R_B , R_C oraz moment utwierdzenia M_A . Równań równowagi może być dwa. Zatem belka jest dwukrotnie hiperstatyczna.

Postać dwóch równań równowagi można zapisać:

$$\sum F_{iy} = R_A + R_B + R_C - 2qa = 0$$

$$\sum M_{i(A)} = M_A + R_B \cdot a + R_C \cdot 2a - 2qa^2 = 0$$

Przy rozwiązywaniu zadania stosuje się twierdzenie Menabre'a.

Jako wielkości hiperstatyczne przyjęto reakcje R_B i R_C . A zatem korzysta się z warunku na minimum energii wyrażonego w postaci:

$$\frac{\partial U}{\partial R_B} = 0 \quad \text{oraz} \quad \frac{\partial U}{\partial R_C} = 0$$

Belkę podzielono na dwa przedziały:

Przedział I: $0 \leq x_1 \leq a$

$$M_{g_1(x)} = R_C \cdot x_1 - \frac{1}{2} q x_1^2$$

$$\frac{\partial M_{g_1(x)}}{\partial R_B} = 0$$

$$\frac{\partial M_{g_1(x)}}{\partial R_C} = x_1$$

Przedział II: $a \leq x_2 \leq 2a$

$$M_{g_2(x)} = R_C \cdot x_2 + R_B(x_2 - a) - \frac{1}{2} q x_2^2,$$

$$\frac{\partial M_{g_2(x)}}{\partial R_B} = x_2 - a$$

$$\frac{\partial M_{g_2(x)}}{\partial R_C} = x_2$$

Na podstawie twierdzenia Menabre'a zapisano:

$$\frac{\partial U}{\partial R_C} = \frac{1}{EI} \int_0^a \left(R_C \cdot x_1 - \frac{1}{2} q x_1^2 \right) \cdot x_1 dx + \frac{1}{EI} \int_a^{2a} \left[R_C \cdot x_2 + R_B(x_2 - a) - \frac{1}{2} q x_2^2 \right] \cdot x_2 dx = 0$$

$$\frac{\partial U}{\partial R_C} = \frac{1}{EI} \left(R_C \cdot \frac{a^3}{3} - \frac{1}{2} q \cdot \frac{a^4}{4} \right) + \frac{1}{EI} \left(\frac{7}{3} R_C \cdot a^3 + \frac{7}{3} R_B \cdot a^3 - \frac{3}{2} R_B \cdot a^3 - \frac{15}{8} q a^4 \right) = 0$$

Po wykonaniu działań otrzymano:

$$\frac{8}{3} R_C \cdot a^3 + \frac{5}{6} R_B \cdot a^3 - 2q a^4 = 0$$

$$\frac{8}{3} R_C \cdot a^3 + \frac{5}{6} R_B \cdot a^3 = 2q a^4$$

$$\frac{8}{3} R_C + \frac{5}{6} R_B = 2q a$$

$$\frac{\partial U}{\partial R_B} = \frac{1}{EI} \int_0^a 0 \cdot dx + \frac{1}{EI} \int_a^{2a} \left[R_C \cdot x_2 + R_B(x_2 - a) - \frac{1}{2} q x_2^2 \right] \cdot (x_2 - a) dx = 0$$

$$\frac{\partial U}{\partial R_B} = \frac{1}{EI} \left(\frac{7}{3} R_C \cdot a^3 + \frac{7}{3} R_B \cdot a^3 - 3R_B \cdot a^3 - \frac{15}{8} q a^4 - \frac{3}{2} R_C \cdot a^3 + R_B \cdot a^3 + \frac{7}{6} q a^4 \right) = 0$$

Po dalszych obliczeniach otrzymuje się:

$$\frac{5}{6} R_C \cdot a^3 + \frac{1}{3} R_B \cdot a^3 = \frac{17}{24} q a^4$$

$$\frac{5}{6} R_C + \frac{1}{3} R_B = \frac{17}{24} q a$$

Otrzymane wyniki pozwalają ułożyć układ równań, z którego wyznaczy się wielkości podporowe analizowanej belki:

$$\begin{cases} \frac{8}{3}R_C + \frac{5}{6}R_B = 2qa \\ \frac{5}{6}R_C + \frac{1}{3}R_B = \frac{17}{24}qa \end{cases}$$

$$R_C = \frac{2qa - \frac{5}{6}R_B}{\frac{8}{3}} = \frac{3\left(2qa - \frac{5}{6}R_B\right)}{8}$$

$$\frac{15\left(2qa - \frac{5}{6}R_B\right)}{48} + \frac{1}{3}R_B = \frac{17}{24}qa$$

$$R_B = \frac{8}{7}qa$$

R_B jest jedną z poszukiwanych wielkości hiperstatycznych.

$$\frac{5}{6}R_C = \frac{17}{24}qa - \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{7}qa$$

$$\frac{5}{6}R_C = \frac{17}{24}qa - \frac{8}{21}qa$$

$$R_C = \frac{11}{28}qa$$

R_C jest drugą poszukiwaną wielkością hiperstatyczną.

Pozostałe wielkości podporowe: R_A i moment utwierdzenia M_A wyznacza się z warunków równowagi:

$$R_A = 2qa - R_C - R_B = 2q - \frac{11}{28}qa - \frac{8}{7}qa$$

$$R_A = \frac{13}{28}qa$$

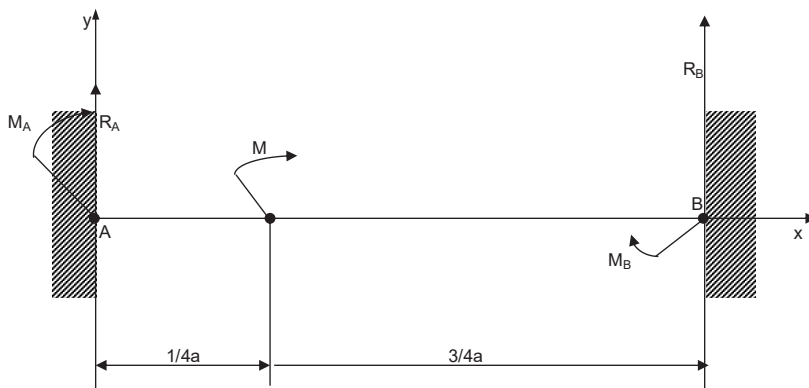
$$M_A = 2qa^2 - R_B \cdot a - R_C \cdot 2a = 2qa^2 - \frac{8}{7}qa^2 - \frac{22}{28}qa^2$$

$$M_A = \frac{1}{14}qa^2$$

Wszystkie wielkości podporowe: R_A , R_B , R_C , M_A zostały wyznaczone.

Przykład 7.5.

Wyznaczyć reakcje w podporach A i B układu przedstawionego na rysunku 7.6, jeżeli dane są: moment obciążający M oraz wymiary liniowe a .



Rys. 7.6. Belka obustronnie utwierdzona w punktach A i B

Rozwiązanie

W układzie belkowym występują reakcje: R_A , R_B , M_A , M_B . Na podstawie rysunku można napisać następujące równania:

$$\sum F_{iy} = R_A + R_B = 0$$

$$\sum M_{i(A)} = M_A + M - R_B \cdot a + M_B = 0$$

Równań jest dwa, a cztery niewiadome. Zatem układ jest dwukrotnie statycznie niewyznaczalny. Jako wielkości hiperstatyczne przyjęto: R_A i M_A .

W układzie belkowym AB wyróżniono dwa przedziały:

$$\text{Przedział I: } 0 \leq x \leq \frac{1}{4}a$$

$$\text{Przedział II: } \frac{1}{4}a \leq x \leq a$$

Energia sprężysta całkowita belki AB składa się z energii U_1 w przedziale I oraz z energii U_2 w przedziale II.

$$U_1 = \frac{1}{2EI} \cdot \int_0^{\frac{1}{4}a} M_{g1(x)}^2 dx$$

$$U_2 = \frac{1}{2EI} \cdot \int_{\frac{1}{4}a}^a M_{g2(x)}^2 dx$$

$$U = U_1 + U_2$$

Momenty gnące w przedziale I i II odpowiednio wynoszą:

$$M_{g1(x)} = M_A + R_A \cdot x$$

$$M_{g2(x)} = M_A + R_A \cdot x + M$$

Mając na uwadze twierdzenie o minimum energii, można napisać równania:

$$\frac{\partial U}{\partial R_A} = 0$$

$$\frac{\partial U}{\partial M_A} = 0$$

Podstawiając odpowiednie wyrażenia na energię U , uzyska się równanie:

$$\frac{\partial U}{\partial R_A} = \frac{1}{EI} \cdot \int_0^{\frac{1}{4}a} M_{g1(x)} \cdot \frac{\partial M_{g1(x)}}{\partial R_A} dx + \frac{1}{EI} \cdot \int_{\frac{1}{4}a}^a M_{g2(x)} \cdot \frac{\partial M_{g2(x)}}{\partial R_A} dx = 0$$

Obliczona pochodna cząstkowa $M_{g1(x)}$ i $M_{g2(x)}$ względem wielkości hiperstatycznej R_A wynosi:

$$\frac{\partial M_{g1(x)}}{\partial R_A} = \frac{\partial (M_A + R_A \cdot x)}{\partial R_A} = x$$

$$\frac{\partial M_{g2(x)}}{\partial R_A} = \frac{\partial (M_A + R_A \cdot x + M)}{\partial R_A} = x$$

Następnie pochodne te pozwolą uzyskać równanie:

$$\frac{1}{EI} \cdot \int_0^{\frac{1}{4}a} (M_A + R_A \cdot x) x dx + \frac{1}{EI} \cdot \int_{\frac{1}{4}a}^a (M_A + R_A \cdot x + M) x dx = 0$$

$$\frac{1}{EI} \cdot \int_0^{\frac{1}{4}a} (M_A \cdot x + R_A \cdot x^2) dx + \frac{1}{EI} \cdot \int_{\frac{1}{4}a}^a (M_A \cdot x + R_A \cdot x^2 + M \cdot x) dx = 0$$

$$\frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} M_A \cdot x^2 + \frac{1}{3} R_A \cdot x^3 \right]_0^{\frac{1}{4}a} + \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} M_A \cdot x^2 + \frac{1}{3} R_A \cdot x^3 + \frac{1}{2} M \cdot x^2 \right]_{\frac{1}{4}a}^a = 0$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{32} M_A \cdot a^2 + \frac{1}{192} R_A \cdot a^2 \right) + \\ & + \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} M_A \cdot a^2 + \frac{1}{3} R_A \cdot a^3 + \frac{1}{2} M \cdot a^2 - \frac{1}{32} M_A \cdot a^2 - \right. \\ & \left. - \frac{1}{192} R_A \cdot a^3 - \frac{1}{32} M_A \cdot a^2 \right) = 0 \end{aligned}$$

Po redukcji wyrazów podobnych otrzymuje się:

$$\frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} M_A \cdot a^2 + \frac{15}{32} M \cdot a^2 + \frac{1}{3} R_A \cdot a^3 \right) = 0$$

$\frac{I}{EI} \neq 0$, więc pozostaje:

$$\frac{I}{2} M_A \cdot a^2 + \frac{15}{32} M \cdot a^2 + \frac{I}{3} R_A \cdot a^3 = 0$$

Równanie wyznaczające pochodną cząstkową energii względem drugiej wielkości hiperstatycznej M_A ma postać:

$$\frac{\partial U}{\partial M_A} = \frac{I}{EI} \cdot \int_0^{\frac{I}{4}a} M_{g1(x)} \cdot \frac{\partial M_{g1(x)}}{\partial M_A} dx + \frac{I}{EI} \cdot \int_{\frac{I}{4}a}^a M_{g2(x)} \cdot \frac{\partial M_{g2(x)}}{\partial M_A} dx = 0$$

Pochodne cząstkowe $M_{g1(x)}$ i $M_{g2(x)}$ względem M_A są równe:

$$\frac{\partial M_{g1(x)}}{\partial M_A} = \frac{\partial (M_A + R_A \cdot x)}{\partial M_A} = 1$$

$$\frac{\partial M_{g2(x)}}{\partial M_A} = \frac{\partial (M_A + R_A \cdot x + M)}{\partial M_A} = 1$$

$$\frac{I}{EI} \cdot \int_0^{\frac{I}{4}a} (M_A + R_A \cdot x) dx + \frac{I}{EI} \cdot \int_{\frac{I}{4}a}^a (M_A + R_A \cdot x + M) dx = 0$$

$$\frac{I}{EI} \left[M_A \cdot x + \frac{I}{2} R_A \cdot x^2 \right]_0^{\frac{I}{4}a} + \frac{I}{EI} \left[M_A \cdot x + \frac{I}{2} R_A \cdot x^2 + M \cdot x \right]_{\frac{I}{4}a}^a = 0$$

$$\frac{I}{EI} \left(\frac{I}{4} M_A \cdot a + \frac{I}{32} R_A \cdot a^2 \right) +$$

$$+ \frac{I}{EI} \left(M_A \cdot a + \frac{I}{2} R_A \cdot a^2 + M \cdot a - \frac{I}{4} M_A \cdot a - \frac{I}{32} R_A \cdot a^2 - \frac{I}{4} M_A \cdot a \right) = 0$$

Redukując wyrazy podobne równanie uzyska postać:

$$\frac{I}{EI} \left(M_A \cdot a + \frac{3}{4} M \cdot a + \frac{I}{2} R_A \cdot a^2 \right) = 0$$

$\frac{I}{EI} \neq 0$, zatem wyrażenie w nawiasie równe jest 0.

$$M_A \cdot a + \frac{3}{4} M \cdot a + \frac{I}{2} R_A \cdot a^2 = 0$$

Ostatecznie dla układu belkowego z rysunku 7.6. można napisać cztery równania, a więc układ ten jest już wyznaczalny (cztery niewiadome i cztery równania).

$$R_A + B_B = 0$$

$$M_A + M - R_B \cdot a + M_B = 0$$

$$\frac{1}{2}M_A \cdot a^2 + \frac{15}{32}M \cdot a^2 + \frac{1}{3}R_A \cdot a^3 = 0$$

$$M_A \cdot a + \frac{3}{4}M \cdot a + \frac{1}{2}R_A \cdot a^2 = 0$$

Na podstawie równania czwartego wyrażenie na moment M_A można zapisać:

$$M_A = -\frac{3}{4}M - \frac{1}{2}R_A \cdot a$$

i wstawić do równania trzeciego, a to pozwoli wyznaczyć reakcję R_A :

$$\frac{1}{2} \left(-\frac{3}{4}M - \frac{1}{2}R_A \cdot a \right) \cdot a^2 + \frac{15}{32}M \cdot a^2 + \frac{1}{3}R_A \cdot a^3 = 0$$

$$\frac{1}{12}R_A \cdot a^3 + \frac{3}{32}M \cdot a^2 = 0$$

$$R_A = -\frac{9M}{8a}$$

Moment utwierdzenia M_A jest równy:

$$M_A = -\frac{3}{4}M - \frac{1}{2} \left(-\frac{9M}{8a} \right) \cdot a$$

$$M_A = -\frac{3}{16}M$$

Z równania pierwszego wyznaczona reakcja R_B jest równa:

$$R_B = -R_A$$

$$R_B = \frac{9M}{8a}$$

Moment utwierdzenia M_B wyznaczony z równania drugiego jest równy:

$$-\frac{3}{16}M + M - \frac{9M}{8a} \cdot a + M_B = 0$$

$$M_B = \frac{3}{16}M - M + \frac{9}{8}M$$

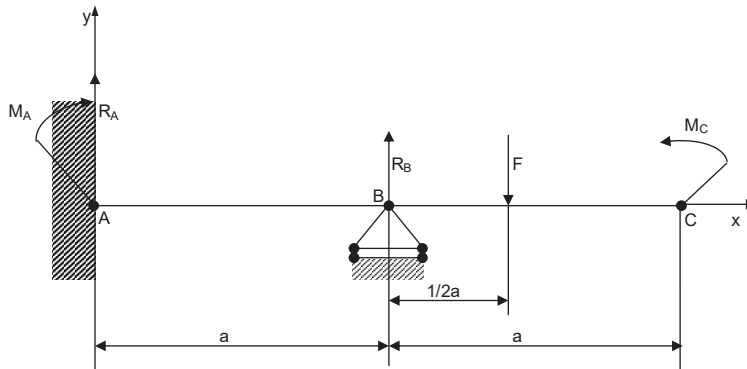
$$M_B = \frac{5}{16}M$$

Ostatecznie układ dwukrotnie statycznie niewyznaczalny został rozwiązany, a jego wielkości podporowe wynoszą:

1. Reakcja $R_A = -\frac{9M}{8a}$
2. Reakcja $R_B = \frac{9M}{8a}$
3. Moment utwierdzenia $M_A = -\frac{3}{16}M$
4. Moment utwierdzenia $M_B = \frac{5}{16}M$

Przykład 7.6.

Wyznaczyć reakcje w podporach A i B oraz moment utwierdzenia M_A układu belkowego przedstawionego na rysunku 7.7, jeżeli dane są: siła F , moment M_C , wymiar liniowy a . Sztywność belki EI jest stała na całej długości.



Rys. 7.7. Belka utwierdzona w punkcie A z dodatkowym podparciem w punkcie B

Rozwiązanie

Reakcje występujące w układzie belkowym są następujące: R_A , M_A , R_B .

Równania równowagi, jakie można napisać na podstawie rysunku:

$$\sum F_{iy} = R_A + R_B - F = 0$$

$$\sum M_{i(A)} = M_A - R_B \cdot a + \frac{3}{2} F \cdot a - M_C = 0$$

Układ jest jednokrotnie hiperstatyczny. Dwa równania, a trzy niewiadome: R_A , M_A , R_B . Jako wielkość hiperstatyczną przyjęto reakcję R_A .

Na układ belkowy $A-B-C$ składają się trzy przedziały:

Przedział I: $0 \leq x \leq a$

Przedział II: $a \leq x \leq \frac{3}{2}a$

Przedział III: $\frac{3}{2}a \leq x \leq 2a$

Energia sprężysta całkowita belki jest sumą energii w poszczególnych przedziałach:

$$U = U_1 + U_2 + U_3$$

$$U_1 = \frac{I}{2EI} \cdot \int_0^a M_{g1(x)}^2 dx$$

$$U_2 = \frac{I}{2EI} \cdot \int_a^{\frac{3}{2}a} M_{g2(x)}^2 dx$$

$$U_3 = \frac{1}{2EI} \cdot \int_{\frac{3}{2}a}^{2a} M_{g3(x)}^2 dx$$

Momenty gnące w poszczególnych przedziałach wynoszą:

$$M_{g1(x)} = M_A + R_A \cdot x$$

$$M_{g2(x)} = M_A + R_A \cdot x + R_B(x - a)$$

$$M_{g3(x)} = M_A + R_A \cdot x + R_B(x - a) - F\left(x - \frac{3}{2}a\right)$$

Zgodnie z twierdzeniem o minimum energii jest:

$$\frac{\partial U}{\partial R_A} = 0$$

Pochodną cząstkową energii całkowitej względem wielkości hiperstatycznej R_A zapisano równaniem:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial R_A} = & \frac{1}{EI} \cdot \int_0^a M_{g1(x)} \cdot \frac{\partial M_{g1(x)}}{\partial R_A} dx + \frac{1}{EI} \cdot \int_a^{\frac{3}{2}a} M_{g2(x)} \cdot \frac{\partial M_{g2(x)}}{\partial R_A} dx + \\ & + \frac{1}{EI} \cdot \int_{\frac{3}{2}a}^{2a} M_{g3(x)} \cdot \frac{\partial M_{g3(x)}}{\partial R_A} dx = 0 \end{aligned}$$

Pochodna cząstkowa momentów gnących $M_{g1(x)}$, $M_{g2(x)}$, $M_{g3(x)}$ względem R_A jest równa:

$$\frac{\partial M_{g1(x)}}{\partial R_A} = \frac{\partial(M_A + R_A \cdot x)}{\partial R_A} = x$$

$$\frac{\partial M_{g2(x)}}{\partial R_A} = \frac{\partial(M_A + R_A \cdot x + R_B(x - a))}{\partial R_A} = x$$

$$\frac{\partial M_{g3(x)}}{\partial R_A} = \frac{\partial\left[M_A + R_A \cdot x + R_B(x - a) - F\left(x - \frac{3}{2}a\right)\right]}{\partial R_A} = x$$

Wstawiając wyznaczone pochodne cząstkowe do równania głównego $\frac{\partial U}{\partial R_A} = 0$ uzyska się trzecie równanie, które pozwoli na rozwiązanie układu belkowego.

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial R_A} = & \frac{1}{EI} \cdot \int_0^a (M_A + R_A \cdot x) x dx + \frac{1}{EI} \cdot \int_a^{\frac{3}{2}a} [M_A + R_A \cdot x + R_B(x - a)] x dx + \frac{1}{EI} \cdot \\ & \cdot \int_{\frac{3}{2}a}^{2a} \left[M_A + R_A \cdot x + R_B(x - a) - F\left(x - \frac{3}{2}a\right) \right] x dx = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} M_A \cdot x^2 + \frac{1}{3} R_A \cdot x^3 \right]_0^a + \\ & + \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} M_A \cdot x^2 + \frac{1}{3} R_A \cdot x^3 + \frac{1}{3} R_B \cdot x^3 - \frac{1}{2} R_B \cdot a \cdot x^2 \right]_a^{\frac{3}{2}a} + \\ & + \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} M_A \cdot x^2 + \frac{1}{3} R_A \cdot x^3 + \frac{1}{3} R_B \cdot x^3 - \frac{1}{2} R_B \cdot a \cdot x^2 - \frac{1}{3} F \cdot x^3 + \right. \\ & \left. + \frac{3}{4} F \cdot a \cdot x^2 \right]_{\frac{3}{2}a}^{2a} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} M_A \cdot a^2 + \frac{1}{3} R_A \cdot a^2 \right) + \\ & + \frac{1}{EI} \left(\frac{9}{8} M_A \cdot a^2 + \frac{27}{24} R_A \cdot a^3 + \frac{27}{24} R_B \cdot a^3 - \frac{9}{8} R_B \cdot a^3 - \frac{1}{2} M_A \cdot a^2 - \right. \\ & \left. - \frac{1}{3} R_A \cdot a^3 - \frac{1}{3} R_B \cdot a^3 + \frac{1}{2} R_B \cdot a^3 \right) + \\ & + \frac{1}{EI} \left(2M_A \cdot a^2 + \frac{8}{3} R_A \cdot a^3 + \frac{8}{3} R_B \cdot a^3 - 2R_B \cdot a^3 - \frac{8}{3} F \cdot a^3 + \right. \\ & \left. + 3F \cdot a^3 - \frac{9}{8} M_A \cdot a^2 - \frac{27}{24} R_A \cdot a^3 - \frac{27}{24} R_B \cdot a^3 + \frac{9}{8} R_B \cdot a^3 + \right. \\ & \left. \frac{27}{24} F \cdot a^3 - \frac{27}{16} F \cdot a^3 \right) = 0 \end{aligned}$$

Po redukcji wyrazów podobnych otrzymano równanie:

$$\frac{1}{EI} \left(2M_A \cdot a^2 + \frac{8}{3} R_A \cdot a^3 + \frac{5}{6} R_B \cdot a^3 - \frac{11}{48} F \cdot a^3 \right) = 0$$

$$\frac{1}{EI} \neq 0$$

A zatem:

$$2M_A \cdot a^2 + \frac{8}{3} R_A \cdot a^3 + \frac{5}{6} R_B \cdot a^3 - \frac{11}{48} F \cdot a^3 = 0$$

Ostatnie równanie dołączone do dwóch równań równowagi pozwoli wyznaczyć poszukiwane reakcje: R_A , R_B i moment utwierdzenia M_A .

$$R_A + R_B - F = 0$$

$$M_A - R_B \cdot a + \frac{3}{2} F \cdot a - M_C = 0$$

$$2M_A \cdot a^2 + \frac{8}{3} R_A \cdot a^3 + \frac{5}{6} R_B \cdot a^3 - \frac{11}{48} F \cdot a^3 = 0$$

Rozwiązując układ trzech równań wyznaczono poszukiwane reakcje i moment utwierdzenia.

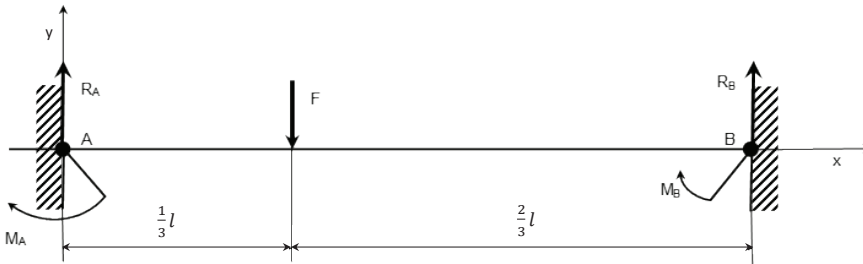
$$R_B = \frac{27}{8}F - 12 \cdot \frac{M_C}{a}$$

$$R_A = -\frac{19}{8}F + 12 \cdot \frac{M_C}{a}$$

$$M_A = \frac{15}{8}F \cdot a - 11 \cdot M_C$$

Przykład 7.7.

Wyznaczyć wielkości podporowe belki obustronnie utwierdzonej obciążonej siłą F jak na rysunku 7.8. Danymi są: siła F , wymiary liniowe l . Sztywność belki EI na całej długości jest jednakowa.



Rys. 7.8. Belka obustronnie utwierdzona w punktach A i B

Rozwiązanie

W podanym na rysunku 7.8 układzie belkowym występują następujące wielkości podporowe: R_A , R_B , M_A , M_B .

Korzystając z rysunku można napisać dwa równania równowagi:

$$\Sigma F_{iy} = R_A + R_B - F = 0$$

$$\Sigma M_{i(B)} = M_A + R_A \cdot l - \frac{2}{3}F \cdot l + M_B = 0$$

Niewiadomych jest cztery, zatem układ jest dwukrotnie hiperstatyczny. Jako wielkości hiperstatyczne przyjęto reakcję R_A i moment utwierdzenia M_A .

W układzie belkowym wyróżnia się dwa przedziały:

Przedział I: $0 \leq x \leq \frac{1}{3}l$

Przedział II: $\frac{1}{3}l \leq x \leq l$

Energia zginania w przedziale pierwszym wyraża się wzorem:

$$U_1 = \frac{1}{2EI} \int_0^{\frac{1}{3}l} M_{g1}^2 dx$$

W przedziale drugim energię zginania wyraża wzór:

$$U_2 = \frac{1}{2EI} \int_{\frac{1}{3}l}^l M_{g_2}^2 dx$$

Energia zginania całkowita jest równa:

$$U = U_1 + U_2$$

Moment zginający w przedziale pierwszym jest równy:

$$M_{g_1} = M_A + R_A \cdot x$$

W przedziale drugim moment zginający wyraża wzór:

$$M_{g_2} = M_A + R_A \cdot x - F(x - \frac{1}{3}l)$$

Zgodnie z twierdzeniem o minimum energii zapisane równanie ma postać:

$$\frac{\partial U}{\partial R_A} = 0 \quad \text{oraz} \quad \frac{\partial U}{\partial M_A} = 0$$

Podstawiając odpowiednie wyrażenia na energię zginania U, dokonując różniczkowania i całkowania uzyskuje się dodatkowe równanie:

$$\frac{\partial U}{\partial R_A} = \frac{1}{EI} \int_0^{\frac{1}{3}l} M_{g_1} \cdot \frac{\partial M_{g_1}}{\partial R_A} dx + \frac{1}{EI} \int_{\frac{1}{3}l}^l M_{g_2} \cdot \frac{\partial M_{g_2}}{\partial R_A} dx = 0$$

$$\frac{\partial M_{g_1}}{\partial R_A} = x, \quad \frac{\partial M_{g_2}}{\partial R_A} = x$$

$$\frac{1}{EI} \int_0^{\frac{1}{3}l} (M_A + R_A \cdot x) x dx + \frac{1}{EI} \int_{\frac{1}{3}l}^l \left(M_A + R_A \cdot x - F \left(x - \frac{1}{3}l \right) \right) x dx = 0$$

$$\frac{1}{EI} \int_0^{\frac{1}{3}l} (M_A \cdot x + R_A \cdot x^2) dx + \frac{1}{EI} \int_{\frac{1}{3}l}^l \left(M_A \cdot x + R_A \cdot x^2 - F \cdot x \cdot \frac{1}{3}l \right) dx = 0$$

$$\frac{1}{EI} \left[M_A \cdot \frac{1}{2} x^2 + R_A \cdot \frac{1}{3} x^3 \right]_0^{\frac{1}{3}l} + \frac{1}{EI} \left[M_A \cdot \frac{1}{2} x^2 + R_A \cdot \frac{1}{3} x^3 - F \cdot \frac{1}{3} x^3 + F \cdot l \cdot \frac{1}{6} x^2 \right]_{\frac{1}{3}l}^l = 0$$

$$\frac{1}{EI} \left[\frac{1}{18} M_A \cdot l^2 + \frac{1}{81} R_A \cdot l^3 \right] + \frac{1}{EI} \left[\left(\frac{1}{2} M_A \cdot l^2 + R_A \cdot l^3 - \frac{1}{3} F \cdot l^3 + \frac{1}{6} F \cdot l^3 \right) - \left(\frac{1}{18} M_A \cdot l^2 + \frac{1}{81} R_A \cdot l^3 - \frac{1}{81} F \cdot l^3 + \frac{1}{54} F \cdot l^3 \right) \right] = 0$$

Po wykonaniu działań i redukcji wyrazów podobnych ostateczny zapis otrzymanego równania ma postać:

$$\frac{1}{2} M_A \cdot l^2 + \frac{1}{3} R_A \cdot l^3 - \frac{14}{81} F \cdot l^3 = 0$$

W dalszej kolejności należy wyznaczyć pochodną energii zginania względem wielkości hiperstatycznej M_A .

$$\frac{\partial U}{\partial M_A} = \frac{1}{EI} \int_0^{\frac{1}{3}l} M g_1 \cdot \frac{\partial M g_1}{\partial M_A} dx + \frac{1}{EI} \int_{\frac{1}{3}l}^l M g_2 \cdot \frac{\partial M g_2}{\partial M_A} dx = 0$$

$$\frac{\partial M g_1}{\partial M_A} = l \qquad \frac{\partial M g_2}{\partial M_A} = l$$

$$\frac{1}{EI} \int_0^{\frac{1}{3}l} (M_A + R_A \cdot x) dx + \frac{1}{EI} \int_{\frac{1}{3}l}^l \left(M_A + R_A \cdot x - F \left(x - \frac{1}{3}l \right) \right) dx = 0$$

$$\frac{1}{EI} \left[M_A \cdot x + \frac{1}{2} R_A \cdot x^2 \right]_0^{\frac{1}{3}l} + \frac{1}{EI} \left[M_A \cdot x + \frac{1}{2} R_A \cdot x^2 - \frac{1}{2} F \cdot x^2 + \frac{1}{3} F \cdot l \cdot x \right]_{\frac{1}{3}l}^l = 0$$

$$\frac{1}{EI} \left[\frac{1}{3} M_A \cdot l + \frac{1}{18} R_A \cdot l^2 \right] + \frac{1}{EI} \left[\left(M_A \cdot l + \frac{1}{2} R_A \cdot l^2 - \frac{1}{2} F \cdot l^2 + \frac{1}{3} F \cdot l^2 \right) - \left(\frac{1}{3} M_A \cdot l + \frac{1}{18} R_A \cdot l^2 - \frac{1}{18} F \cdot l^2 + \frac{1}{9} F \cdot l^2 \right) \right] = 0$$

Po wykonaniu działań i redukcji wyrazów podobnych otrzymane równanie ma postać:

$$M_A \cdot l + \frac{1}{2} R_A \cdot l^2 - \frac{7}{18} F \cdot l^2 = 0$$

Uzyskane dodatkowe dwa równania umożliwiają wyznaczenie poszukiwanych wielkości podporowych.

Zapisany układ czterech równań ma postać:

$$R_A + R_B - F = 0$$

$$M_A + R_A \cdot l - \frac{2}{3} F \cdot l + M_B = 0$$

$$\frac{1}{2} M_A \cdot l^2 + \frac{1}{3} R_A \cdot l^3 - \frac{14}{81} F \cdot l^3 = 0$$

$$M_A \cdot l + \frac{1}{2} R_A \cdot l^2 - \frac{7}{18} F \cdot l^2 = 0$$

Z równania czwartego wyznaczony moment utwierdzenia M_A jest równy:

$$M_A = \frac{7}{18} F \cdot l - \frac{1}{2} R_A \cdot l$$

Wyznaczona zależność na M_A wstawiona do równania trzeciego pozwala na wyznaczenie reakcji R_A :

$$\frac{1}{2} \left(\frac{7}{18} F \cdot l - \frac{1}{2} R_A \cdot l \right) l^2 + \frac{1}{3} R_A \cdot l^3 - \frac{14}{81} F \cdot l^3 = 0$$

$$\frac{7}{36} F \cdot l^3 - \frac{1}{4} R_A \cdot l^3 + \frac{1}{3} R_A \cdot l^3 - \frac{14}{81} F \cdot l^3 = 0$$

$$\frac{1}{12} R_A \cdot l^3 = \frac{14}{81} F \cdot l^3 - \frac{7}{36} F \cdot l^3$$

$$R_A = -\frac{7}{27} F$$

Z równania pierwszego wyznaczona reakcja R_B jest równa:

$$R_B = F - R_A$$

$$R_B = F - \left(-\frac{7}{27} F \right)$$

$$R_B = \frac{34}{27} F$$

Znając reakcję R_A , można obliczyć moment utwierdzenia M_A :

$$M_A = \frac{7}{18} F \cdot l - \frac{1}{2} \left(-\frac{7}{27} F \right) \cdot l$$

$$M_A = \frac{21}{54} F \cdot l + \frac{7}{54} F \cdot l$$

$$M_A = \frac{14}{27} F \cdot l$$

Z równania drugiego wyznaczony moment utwierdzenia M_B jest równy:

$$M_B = -M_A - R_A \cdot l + \frac{2}{3} F \cdot l$$

$$M_B = -\frac{14}{27} F \cdot l + \frac{7}{27} F \cdot l + \frac{2}{3} F \cdot l$$

$$M_B = \frac{11}{27} F \cdot l$$

Wielkości podporowe układu dwukrotnie hiperstatycznego z rysunku 7.8 zostały wyznaczone i wynoszą:

$$R_A = -\frac{7}{27} F, R_B = \frac{34}{27} F, M_A = \frac{14}{27} F \cdot l, M_B = \frac{11}{27} F \cdot l$$

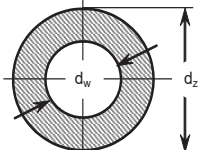
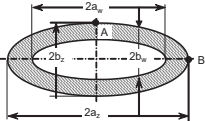
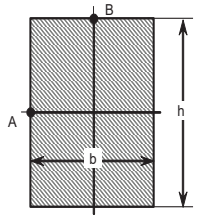
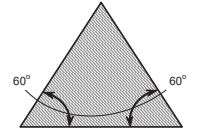
Przy rozwiązywaniu układów statycznie niewyznaczalnych z zastosowaniem twierdzenia Menabre'a, można podać ogólny schemat postępowania, w którym realizuje się następujące kroki:

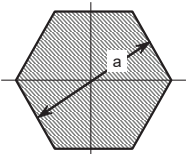
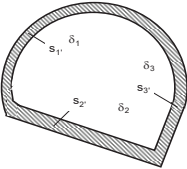
1. W analizowanym układzie belkowym zaznaczyć występujące reakcje.
2. Ułożyć równania równowagi.

-
3. Przyjąć wielkości hiperstatyczne.
 4. Ułożyć wzór na energię sprężystą tylko z udziałem sił czynnych i sił podporowych, które w punkcie 3 zostały przyjęte jako hiperstatyczne.
 5. Korzystając z zasady minimum energii ułożyć równania $\frac{\partial U}{\partial X} = 0$ i z równań tych wyznaczyć poszukiwane wielkości hiperstatyczne.
 6. Ostatnią czynnością jest wyznaczenie wszystkich pozostałych wielkości podporowych z równań równowagi.

8. TABLICE

Tablica 8.1. Wielkości W_s i J_s dla różnych przekrojów

Nr	Przekrój	W_s	J_s	Uwagi					
1	2	3	4	5					
1		$W_s = \frac{\pi}{16} \frac{d_z^4 - d_w^4}{d_z}$	$J_s = \frac{\pi}{32} (d_z^4 - d_w^4)$	τ_{\max} w punktach konturu zewnętrznego					
2		$W_s = \frac{\pi \psi}{2} \frac{b_z^4 - b_w^4}{b_z}$ $a_z / b_z = a_w / b_w = \psi \geq 1$	$J_s = \frac{\pi \psi^3 (b_z^4 - b_w^4)}{2 \psi^2 + 1}$	$\tau_{\max} = \tau_A$ w punkcie B $\tau_B = \tau_{\max} / \psi$					
3		$W_s = c_1 h b^2 = c_1 \psi b^3$					$J_s = c_2 h b^3 = c_{21} \psi b^4$ $\tau_{\max} = \tau_A$ czyli w środkach dłuższych boków, w środkach krótszych boków $\tau_B = c_3 \tau_{\max}$, w narożach $\tau = 0$		
		$h/b = \psi$	1,0	1,5	2	3		6	□
		C_1	0,208	0,231	0,246	0,267		0,299	0,33
		C_2	0,141	0,196	0,229	0,263		0,288	0,333
	C_3	1,00	0,858	0,796	0,753	0,743	0,743		
4		trójkąt równoboczny					τ_{\max} w środkach boków, w narożach $\tau = 0$		
	$W_s = \frac{a^3}{20}$				$J_s = \frac{a^4}{46,2}$				

5		sześciokąt foremny		τ_{\max} w środkach boków, w narożach $\tau = 0$
6		cienkościenna dowolna rura		τ_{\max} w miejscu, gdzie grubość
		$W_s = 0,189 a^3$	$J_s = 0,115 a^4$	
		$W_s = 2F\delta_{\min}$	$J_s = 4F^2 \sum \frac{s_1}{\delta_1}$	

Tablica 8.2. Własności wytrzymałościowe i fizyczne niektórych stali i żeliw

Nr	Materiał	Ozna- czenie wg PN	Skład chemiczny (orient.)	Wytrzymałość na rozciąganie R_r , MN/m ²		Granica plastyczności Q_r , MN/m ² min	Wydłużenie A_5 % min	Udarność U kJ·m/cm ² (orient.)
				min	max			
	1	2	3	4	5	6	7	8
1.	Stal konstrukcyjna węglowa	St10	<0,23 C	320	550	200	22	
2.		St1	0,11 C	320	400	200	33	
3.		St2	0,12 C	340	420	210	31	
4.		St3	0,18 C	380	470	220	25	
5.		St4	0,24 C	420	520	250	23	
6.		St5	0,32 C	500	620	270	19	
7.		St6	0,45 C	600	720	300	14	
8.		St7	0,56 C	700	850	340	10	
9.	Stal sprężynowa	45S	0,45 C; 1,8 Si	1200		1000	6	
10.		70S	0,7 C; 2,6 Si	1800		1600	5	
11.	Stal nierdzewna	2H13	13 Cr; 0,6 Ni	720		520	24	
12.	Żeliwa szare	Z115	3,4 C; 2 Si	150			0	
13.		Z120	3,4 C; 2 Si	200			0	
14.		Z125	3,4 C; 2 Si	250			0	
15.		Z130	3,4 C; 2 Si	300			0	
16.		Z140	3,4 C; 2 Si	400			0	
17.	Żeliwo sferoidalne	ZsP45	3,4 C; 2 Si	450			2	
18.		ZsFO5	3,4 C; 2 Si	400	500		5	
19.	Staliwo węglowe	15L	0,15 C	400		200	24	5
20.		25L	0,25 C	450		240	19	4
21.		40L	0,40 C	530		300	14	3
22.		55L	0,55 C	600		350	10	2,5

Cd. tablicy 8.2.

Nr	Wytrzymałość zmęczeniowa Z_{go} MN/m ² (orient.)	Twardość Brinella HB kG/mm ² (orient.)	Moduł Young E x 10 ⁵ MN/m ²	Moduł sprężystości postaciowej G x 10 ⁴ MN/m ²	Liczba Poissona n	Współczynnik rozszerzalności liniowej a x 10 ⁻⁵ deg ⁻¹ (10 ⁻⁵ /1°C)	Gęstość g x 10 ⁵ kg/ m ³ (g/cm ³)
	10	11	12	13	14	15	16
1.		110	2,1	8,1	0,3	1,2	7,86
2.	140	110					
3.	150	115					
4.	170	120					
5.	200	140					
6.	230	170					
7.	270	190					
8.	320	220					
9.	550		2,15	8,5	0,3	1,2	7,9
10.							
11.	370		2,05	8,3	0,3	1,2	7,9
12.	60	159,210	0,95	3,8	0,23,0,27	1,05	6,7,7,4
13.	80	170,241	0,95	3,9			
14.	110	183 ₂₆₂	1,0	4,0			
15.	130	192,269	1,1	4,1			
16.	160	>223	1,1	4,2			
17.	180	200,280					
18.	160	155,210					
19.	130	114,150	2,15	6,3	0,28	1,1	7,8
20.	150	128,170					
21.	190	149,195					
22.	200	170,217					

Tablica 8.3. Naprężenia dopuszczalne obowiązujące w konstrukcjach stalowych
zgodnie z normą PN/B-03200

Material	Naprężenia dopuszczalne MN/m ²							
	na rozciąganie, ściskanie i zginanie k		na ścinanie (i skręcanie) k_t		na docisk (liczone na rzut) k_d		na docisk wg Hertza k_{dH}	
	I	II	I	II	I	II	I	II
Stal St0S	120	140	720	84	160	190	450	550
Stal St3S, St3SX	150	170	90	102	190	220	540	640
Stal 18G2, 18G2H	220	250	132	150	280	320	900	1000
Staliwo 25L	150	170	90	102				
Staliwo 40L	190	210	114	126	260	300	800	900
Staliwo 45L	200	230	120	138	280	320	900	1000
Nity ze stali St2N, St3N	750	90	120	140	240	280		
Śruby ze stali $340 \leq R_t \leq 500$	112	128	90	100	180	200		

Tablica 8.4. Własności wytrzymałościowe i zmęczeniowe stali konstrukcyjnych węglowych zwykłej jakości w stanie surowym (dane podstawowe wg normy PN/H-84020)

Nr	Znak stali	Zawartość węgla	Wytrzymałość na rozciąganie R_r MN/m ² 1MPa	Granica plastyczności Q_r MN/m ² min		Wydłużenie A_5 % min	Udarność U kG · m/cm ² min	Twardość HB kG/mm ² min
				a	b			
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	St0 St0S MSt0	max 0,23	320,550 320,350	200	-	22		
2	St1 St1S MSt1X	0,06,0,12	320,400	200	-	33		
3	St2 St2S MSt2x	0,09,0,15	340,420	220	210	31		110
4	St3 MSt3 St35 MSt3X St3SX	0,14,0,22	380,470	240	220	25	7	120
5	St4 St4S MSt4	0,18,0,027	420,520	260	250	23	8	140
6	St5 MSt5	0,28,0,37	500,620	280	270	19	6	160
7	St6 MSt6	0,38,0,49	600,720	310	300	14	4	180
8	St7 MSt7	0,50,0,62	700,850	350	340	10	3	200
9	Dane orientacyjne							

Nr	Napężenie dopuszczalne na rozciąganie MN/m ²			Orientacyjne wartości wytrzymałości zmęczeniowej MN/m ²								
	obciążenie stałe k _r	obciążenie zmienne		zginanie			rozciąganie			skręcanie		
		jednostronne tętnięcia k _{rj}	obustronne symetryczne k _{ro}	Z _{go}	Z _{gj}	Q _g	Z _{ro}	Z _{rj}	Q _r	Z _{so}	Z _{rj}	Q _s
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
1	120,160	100,140	50,80	210	340	270	160	280	280	110	220	180
2	170,220	80,120	70,100	230	360	400	180	320	340	130	250	220
3	150,180	120,160	60,90	230	360	300	180	300	280	120	230	190
4	240,300	120,150	80,130	370	560	680	260	410	670	220	440	400
5	200,250	120,150	70,110	310	480	400	220	360	380	200	400	260
6	220,300	120,150	70,110	300	560	560	210	360	550	170	340	340
7	200,250	130,170	70,120	400	500	760	320	420	640	200	400	400
8	160,220	100,130	60,100	260	400	360	180	300	320	150	300	240
9	180,220	130,190	70,130	460	620	600	380	500	500	240	420	300
10	260,340	140,200	100,140	560	900	900	400	700	900	360	700	540
11	(0,5, 0,6) Q _r	(0,4, 0,5) Q _r	(0,4, 0,5) Q _r	0,45 R _r	1,7 Z _{go}	1,2 Q _r	0,7 Z _{go}	1,2 Z _{go}		0,6 Z _{go}	1,1 Z _{go}	0,6 Q _r
	(0,35, 0,5) Q _r	(0,3, 0,4) Z _{rj}	(0,3, 0,4) Z _{ro}	0,4 R _r	1,6 Z _{go}	1,1 Q _r	0,7 Z _{go}	1,2 Z _{go}		0,6 Z _{go}	1,1 Z _{go}	0,6 Q _r

Tablica 8.7. Własności wytrzymałościowe i zmęczeniowe stali konstrukcyjnych stopowych, do ulepszenia cieplnego (dane podstawowe wg normy PN/H-84019)

Nr	Rodzaj stali	Znak stali	Kategoria	Skład chemiczny (orient.)	Wytyczne obróbki cieplnej	Wytrzymałość na rozciąganie R_f MN/m ²	Granica plastyczności Q_r MN/m ²	Wydłużenie A_5 %	Udarność U kG·m ----- cm ²	Twardość HB kG/mm ²
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	Mn	18G2 18G2A		0,18 C 1,3 Mn	N.	520	320	19		
2		30G2	A	0,30 C 1,6 Mn	N. 870°C	660	400	17		207
3					H. 850°C woda O. 850°C powietrze	800	550	14	8	240
4	Si-Mn	35SG	A	0,35 C 1,3 Si 1,3 Mn	H. 900°C woda O. 590°C woda	900	700	15	6	229
5	Ni-Cr	45HN	B	0,45 C 0,6 Cr 1,2 Ni	H. 820°C woda O. 530°C woda	1050	850	10	7	207
6		38HGN	A	0,38 C 0,9 Mn 0,7 Cr 1 Ni	H. 850°C olej O. 570°C woda	950	800	10	7	229

Nr	Napężenie dopuszczalne na rozciąganie MN/m ²			Orientacyjne wartości wytrzymałości zmęczeniowej MN/m ²								
	obciążenie stałe k _r	obciążenie zmienne		zginanie			rozciąganie			skręcanie		
		jednostronne tętniące k _{rj}	obustronne symetryczne k _{ro}	Z _{g0}	Z _{gj}	Q _g	Z _{ro}	Z _{rj}	Q _r	Z _{so}	Z _{rj}	Q _s
	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
1	170,220	100,140	60,100	230	360	400	170	290	340	130	260	220
2	140,190	90,120	60,90	250	380	400	180	300	340	140	270	240
3	220,300	120,150	70,110	300	480	560	210	360	550	170	340	340
4	240,300	150,180	80,110	380	600	750	280	480	700	220	440	440
5	300,400	160,200	90,130	450	660	900	320	520	840	240	500	500
6	270,380	150,190	90,120	400	620	850	300	480	800	220	450	480

Tablica 8.8. Tablice stosowane do obliczeń wytrzymałościowych (cd. tablicy 7)

Nr	Rodzaj stali	Znak stali	Kategoria	Skład chemiczny (orient.)	Wytyczne obróbki cieplnej	Wytrzymałość na rozciąganie R_r MN/m ²	Granica plastyczności Q_r MN/m ²	Wydłużenie $A_{5\%}$ %	Udarność U kG·m ----- cm ²	Twardość HB kG/mm ²
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	Cr	35H	A	0,35 C 1 Cr	H. 860°C olej O. 500°C woda, olej	950	750	11	7	197
2		40H	A	0,40 C 1 Cr	H. 850°C olej	1000	800	10	6	217
3		50F	A	0,50 1 Cr	H. 850°C olej O. 500°C woda	1100	950	8	4	229
4	Cr-Mc	35HM	A	0,35 C 1,1 Cr 0,2 Mo	H. 850°C olej O. 540°C woda	1000	800	12	8	241
5	Cr-Mn-Si	30HGS	A	0,30 C 1 Mn 1 Cr 1 Si	H. 880°C olej O. 540°C woda, olej	1100	850	10	5	229
6		35HGS	A	0,35 C 1 Mn 1,3 Cr 1,35 Si	H. 880°C olej izo- term. O. 700°C woda	1650	1400	10	5	241
7	Dane orientacyjne									

Nr	Napężenie dopuszczalne na rozciąganie MN/m ²			Orientacyjne wartości wytrzymałości zmęczeniowej MN/m ²								
	obciążenie stałe k_r	obciążenie zmienne		zginanie			rozciąganie			skręcanie		
		jedno- stronne tętniące k_{rj}	obu- stronne syme- tryczne k_{ro}	Z_{go}	Z_{gj}	Q_g	Z_{ro}	Z_{rj}	Q_r	Z_{so}	Z_{sj}	Q_s
				11	12	13	14	15	16	17	18	19
1	250,350	200,260	110,150	540	740	750	400	750	700	240	600	420
2	270,370	200,250	120,160	600	800	850	420	700	800	320	650	480
3	330,430	200,250	120,160	620	800	950	430	700	900	330	680	540
4	270,380	180,240	110,150	500	700	850	360	600	800	260	550	500
5	280,380	180,240	110,150	500	700	850	360	600	800	230	550	500
6	400,500	150,200	110,150	440	600	840	350	500	760	220	300	460
7	(0,35, 0,45) Q_r	(0,3, 0,4) Z_{rj}	(0,3, 0,4) Z_{ro}	0,4 R_r	0,7 Z_{go}	1,1 Q_r	0,7 Z_{go}	1,2 Z_{go}		0,6 Z_{go}	1,1 Z_{go}	0,6 Q_r

Tablica 8.9. Własności wytrzymałościowe i zmęczeniowe stali sprężynowych (resorowych)
(dane podstawowe wg PN/H-84032)

Nr	Rodzaj stali	Znak stali	Kategoria	Skład chemiczny (orient.)	Wytyczne obróbki cieplnej	Wytrzymałość na rozciąganie R_r MN/m ²	Granica plastyczności Q_r MN/m ²	Wydłużenie A_5 %	Twardość HB kG/mm ²
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	C	75	A	0,76 C 0,7 Mn 0,2 Si	H. 820°C olej O. 480°C	1100	900	9	285
2	Mn	65G	A	0,65 C 1 Mn 0,27 Si	H. 830°C olej O. 480°C	1000	800	10	260
3	Si	50S2	A	0,5 C 0,75 Mn 1,6 Si	H. 870°C olej O. 460°C	1300	1200	6	285
4	Si-Mn-Cr	60SGH	A	0,6 C 1 Mn 1 Si 0,5 Cr	H. 850°C olej O. 480°C	1400	1250	7	302
5	Cr-Mn	50HG	A	0,5 C 0,9 Mn 0,3 Si 1 Cr	H. 840°C olej O. 490°C	1300	1200	8	302
6	Cr-Si	50HS	A	0,5C 0,9 Mn 0,3 Si 1 Cr	H. 850°C olej O. 520°C	1350	1200	6	302
7	Drut pa- -tentowy (fortepia- nowy)		0,45, ,0,9 C	H. 500°C	1600	1400			
8	Dane orientacyjne								

Cd. Tablicy 8.9.

Nr	Napężenie dopuszczalne na rozciąganie MN/m ²			Orientacyjne wartości wytrzymałości zmęczeniowej MN/m ²								
	obciążenie stałe k_r	obciążenie zmienne		zginanie			rozciąganie			skręcanie		
		jednostronne tętniące k_{rj}	obustronne symetryczne k_{ro}	Z_{go}	Z_{gj}	Q_g	Z_{ro}	Z_{rj}	Q_r	Z_{so}	Z_{sj}	Q_s
	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
1	500,600	300,400	200,300	360	600	560	260	460	500	220	440	300
2	450,550	300,400	230,300	450	650	850	350	500	800	220	300	460
3	650,800	450,550	300,400	650	1000	1200	440	760	1200	380	700	700
4	750,900	550,650	300,400	650	1000	1300	420	760	1200	380	700	720
5	750,900	550,650	300,400	650	1000	1300	420	760	1200	380	700	720
6	700,850	500,600	300,400	600	1300	1300	420	750	1200	350	700	720
7	850,950	600,700	350,450	700	1500	1500	460	840	1400	420	770	840
8	(0,6, 0,7) Q_r	(0,5, 0,6) Z_{gj}	(0,5, 0,6) Z_{ro}	0,45 R_r	1,6 Z_{go}	1,1 Q_r	0,7 Z_{go}	1,2 Z_{go}		0,6 Z_{go}	1,1 Z_{go}	0,6 Q_r

Tablica 8.10. Własności wytrzymałościowe i zmęczeniowe żeliw
(dane podstawowe wg PN/H-83101)

Nr	Nazwa żeliwa	Znak	Skład chemiczny (orient.)	Wytrzymałość na rozciąganie R_r MN/m ² min	Wytrzymałość na zginanie R_g MN/m ² min	Wytrzymałość na ściskanie R_s MN/m ² min	Wydłużenie A_5 % min	Twardość HB kG/mm ²
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	szare	Z115		150	250	500		159,212
2		Z120		200	300	600		170,241
3		Z125		250	400	800		183,262
4		Z130		300	450	900		192,269
5		Z135		350	500	1000		201,277
6		Z140		400	600	1200		pow. 223
7	modyfikowane	ZiM26		260	460	900		170,240
8		ZiM30		300	500	1000		170,240
9		ZiM34		340	540	1100		190,250
10		ZiM38		380	580	1200		190,260
11	sferoidalne perlityczne	ZsP45		450	720	1600	2	200,280
12	sferoidalne ferrytyczne	ZsP05		400	700	2000	5	155,210
13	ciągliwe	ZcC3510		350	($Q_r - 230$)		6	150
14	żaroodporne	żeliwo austenityczne	14 Ni 2 Cr 7 Cu	250	400	800		
15	żaroodporne	żeliwo perlityczne	0,2 Ni 0,3 Cr	350	500	1000		
16	Dane orientacyjne							

Nr	Napężenie dopuszczalne na rozciąganie MN/m ²			Orientacyjne wartości wytrzymałości zmęczeniowej MN/m ²								
	obciążenie stałe k_r	obciążenie zmienne		zginanie			rozciąganie			skręcanie		
		jedno- stronne tętniące k_{rj}	obustronne syme- tryczne k_{ro}	Z_{go}	Z_{gj}	Q_g	Z_{ro}	Z_{rj}	Q_r	Z_{so}	Z_{sj}	Q_s
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
1	20,30	15,25	10,15	60	100	160	40	60		50	70	90
2	30,40	20,30	15,20	80	140	220	50	70		70	90	170
3	35,50	25,35	20,25	110	180	270	60	90		80	110	140
4	40,60	30,45	20,30	130	200	350	70	110		90	120	160
5	50,70	35,50	25,35	140	220	380	80	115		110	150	180
6	55,80	40,60	30,40	160	240	440	95	140		120	170	200
7	35,50	30,45	20,30	120	170	280	70	120		130	190	180
8	40,60	35,50	25,30	140	190	320	80	140		150	210	190
9	50,70	40,55	25,35	160	220	360	90	160		180	230	210
10	55,75	50,70	30,40	180	250	400	100	180		200	250	230
11	60,80	45,60	30,40	180	240	480	100	160		140	200	240
12	55,75	40,60	25,35	160	200	440	90	140		120	180	220
13	50,70	35,50	25,30	140	180	380	80	120		100	130	200
14	35,50	25,35	20,25	100	160	270	60	90		80	110	150
15	50,70	40,50	30,40	150	240	380	90	130		120	160	200
16	(0,14,0,2) R_r	(0,3,0,4) Z_{rj}	(0,3,0,4) Z_{ro}	0,4 R_r	1,6 Z_{go}	1,1 Q_r	0,6 Z_{go}	0,9 Z_{go}		0,8 Z_{go}	1,1 Z_{go}	0,6 Q_r

Tablica 8.11. Własności wytrzymałościowe i zmęczeniowe stopów aluminium

Nr	Nazwa, przeznaczenie	Określenie	Znak	Cecha	Stan	Wytrzymałość na rozciąganie R_r MN/m ² min	Granica plastyczności Q_r MN/m ² min	Wydłużenie A_s % min	Twardość HB kG/mm ²	
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
1	Alumi-nium	99% Al	A199		W.	90	35	45	23	
2	Alumi-nium	99% Al	A199		T.	160		15	44	
3	Po przeróbce plastycznej	Aluman	AlMn1	PA1	W.	130		20	30	
4			AlMn1		T.	220	80		55	
5		Hydronal	AlMg2Mn	PA2	T.	200		23	45	
6		Hydronal	AlMg2Mn	PA2	W.	130	50	20	30	
7		Amico-rodal	AlMgSiMn	PA4	P. sam S.	180		12		
8		Dural	AlCu4Mg Mn	PA6	W	210		18	45	
9		Dural	AlCu4Mg Mn	PA6	P. sam S.	420		15	100	
10		Dural	AlCu4Mg Mn	PA7	P. sam S.	470		17	105	
11		Dural	AlZn5Mg- 2Cu1MnCr	PA9	P. sam S.	550	500	12		
12		Dural	AlMg5Mn	PA20	W	270		23	65	
13		Dural	AlMg5Mn	PA20	półgwar- dy	370	250	12	95	
14		Dural	AlCuMg1 Ni1Fe1Ti	PA30	P. szt. S.	460	380	10		
15		Odlewy kokilowe		AlSi9	AK9	S.	200		1,5	70
16		Odlewy kokilowe		AlSiCu	AK51	P. S.	180			60
17	Odlewy w piasku		AlCu4Ti	AM4	P. S.	270	150	4	80	
18	Dane orientacyjne				po przeróbce plastycznej					
19		odlewy								

Tablica 8.12. Dane orientacyjne do wyznaczania naprężeń dopuszczalnych i wytrzymałości zmęczeniowej

Nr	Material	Stan	Naprężenie dopuszczalne na rozciąganie		
			obciążenie stałe k_r MN/m ²	obciążenie zmienne	
				jednostronne tętniące k_{rj} MN/m ²	obustronne symetryczne k_{ro} MN/m ²
1	2	3	4	5	
1	Stale węglowe $R_r \leq 600$ MN/m ²	surowy normalizowane lub wyżarzane	$(0,55, 0,65) Q_r$	$(0,35, 0,45) Q_r$ lub $(0,3, 0,4) Z_{rj}$	$(0,2, 0,35) Q_r$ lub $(0,3, 0,4) Z_{rj}$
2	Stale węglowe $R_r > 600$ MN/m ²	normalizowane	$(0,5, 0,6) Q_r$	$(0,4, 0,5) Z_{rj}$	$(0,4, 0,5) Z_{rj}$
3		hartowane	$(0,35, 0,45) Q_r$	$(0,3, 0,4) Z_{rj}$	$(0,3, 0,4) Z_{rj}$
4	Stale konstrukcyjne stopowe	nawęglane	$(0,35, 0,5) Q_r$	$(0,4, 0,5) Z_{rj}$	$(0,4, 0,5) Z_{rj}$
5		ulepszane cieplnie	$(0,35, 0,45) Q_r$	$(0,3, 0,4) Z_{rj}$	$(0,3, 0,4) Z_{rj}$
6	Stale sprężynowe (resorowe)	hartowane i odpuszczane	$k_g = (0,6, 0,7) Q_r$	$k_{gj} = (0,5, 0,6) Z_{rj}$	$k_{go} = (0,5, 0,6) Z_{ro}$
7	Staliwa węglowe	normalizowane i odpuszczane	$(0,35, 0,45) Q_r$	$(0,15, 0,25) Q_r$ lub $(0,2, 0,3) Z_{rj}$	$(0,2, 0,3) Z_{ro}$
8	Żeliwa	odlewy	$(0,14, 0,2) R_r$	$(0,3, 0,4) Z_{rj}$	$(0,3, 0,4) Z_{ro}$
9	Stopy miedzi	przerobione plastycznie	$(0,25, 0,35) R_r$	$(0,4, 0,5) Z_{rj}$	$(0,4, 0,5) Z_{ro}$
10		odlewy	$(0,2, 0,3) R_r$	$(0,35, 0,45) Z_{rj}$	$(0,35, 0,45) Z_{ro}$
11	Stopy aluminium	odlewy po starzeniu	$(0,2, 0,3) R_r$	$(0,35, 0,45) Z_{rj}$	$(0,35, 0,45) Z_{ro}$

Nr	Orientacyjne wartości wytrzymałości zmęczeniowej								
	zginanie			rozciąganie			skręcanie		
	Z_{go}	Z_{sj}	Q_g	Z_{ro}	Z_{rj}	Q_r	Z_{so}	Z_{rj}	Q_s
	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	$0,5 R_r$	$1,7 Z_{go}$	$1,2 Q_r$	$0,7 Z_{go}$	$1,3 Z_{go}$	Q_r	$0,6 Z_{go}$	$1,2 Z_{go}$	$0,65 Q_r$
2	$0,45 R_r$	$1,7 Z_{go}$	$1,2 Q_r$	$0,7 Z_{go}$	$1,2 Z_{go}$	Q_r	$0,6 Z_{go}$	$1,1 Z_{go}$	$0,6 Q_r$
3	$0,4 R_r$								
4	$0,4 R_r$	$1,6 Z_{go}$	$1,1 Q_r$	$0,7 Z_{go}$	$1,2 Z_{go}$	Q_r	$0,6 Z_{go}$	$1,1 Z_{go}$	$0,6 Q_r$
5	$0,4 R_r$								
6	$0,45 R_r$								
7	$0,35 R_r$	$1,7 Z_{go}$	$1,1 Q_r$	$0,8 Z_{go}$	$1,2 Z_{go}$	Q_r	$0,5 Z_{go}$	$0,9 Z_{go}$	$0,6 Q_r$
8	$0,45 R_r$	$1,6 Z_{go}$	$0,6 R_r$	$0,6 Z_{go}$	$0,9 Z_{go}$	$0,6 R_r$	$0,8 Z_{go}$	$1,1 Z_{go}$	$0,7 R_r$
9	$0,35 R_r$	$1,7 Z_{go}$	$0,6 R_r$	$0,8 Z_{go}$	$1,4 Z_{go}$	$0,6 R_r$	$0,5 Z_{go}$	$1,0 Z_{go}$	$0,4 R_r$
10	$0,35 R_r$	$1,7 Z_{go}$	$0,6 R_r$	$0,8 Z_{go}$	$1,4 Z_{go}$	$0,6 R_r$	$0,5 Z_{go}$	$1,0 Z_{go}$	$0,4 R_r$
11	$0,35 R_r$	$1,7 Z_{go}$	$0,6 R_r$	$0,8 Z_{go}$	$1,4 Z_{go}$	$0,6 R_r$	$0,5 Z_{go}$	$1,0 Z_{go}$	$0,4 R_r$

W tabelach 8.2 do 8.12 podane są „stare” oznaczenia stali i staliwa. „Nowe” oznaczenia dla stali według PN-EN 10027-1, PN-EN 1561, PN-EN 1568 i PN-1568 oraz dla staliwa według PN-ISO 3755 podano w tabeli 8.13.

Tablica 8.13. Nowe oznaczenia stali i staliwa

Lp.	Stal			
	Stale konstrukcyjne węglowe		Stale konstrukcyjne stopowe	
	Stare oznaczenie	Nowe oznaczenie	Stare oznaczenie	Nowe oznaczenie
1.	St0	S185	20 HNMA	20 Ni Cr Mo 2-2
2.	St0S	S185	15 HGM	18 Cr Mo 4
3.	St3	S215	15 HGN	18 Ni Cr 5-4
4.	St3S	S235IR	15 HN	17 Cr Ni 6-6
5.	St4	S275IO	16 HG	16 Mn Cr 5
6.	St5	E295	17 HGN	16 Ni Cr 4
7.	St6	E335	17 HNM	18 Cr Ni Mo 7-6
8.	St7	E360	18 HGM	18 Cr Mo 4
9.	25	C25	20 HG	20 Mn Cr 5
10.	30	C30	20 HNM	20 Ni Cr Mo 2-2
11.	35	C35	20 H	20 Cr 4
12.	40	C40	18 G2A	P355N
13.	45	C45	40 H	41 Cr 4
14.	50	C50	40 HM	42 Cr Mo 4
15.	55	C55	38 HMI	41 Cr Al Mo 7
16.	MSt5	E295	ŁH 15	100 Cr 6
17.	MSt6	E335	12 HN3A	15 Ni Cr 3
18.	MSt7	E360	34 HNM	34 Cr Ni Mo 6
19.	St2	S195	35 HM	34 Cr Mo 4

Lp.	Staliwo			
	Staliwo konstrukcyjne ogólnego przeznaczenia		Staliwo węglowe konstrukcyjne	
	Stare oznaczenie	Nowe oznaczenie	Stare oznaczenie	Nowe oznaczenie
1.	L20G	G20 Mn 6	L400	200-400 W
2.	L35G	G35 Mn 6	L450	230-450 W
3.	L15GM	G15 Mo Mn 4	L500	270-480 W
4.	L30GS	G30 Mn Si 5-3	L600	340-550 W
5.	L35GM	G35 Mn Mo 5-3		
6.	L25HN	G25 Ni Cr 3-2		
7.	L40HF	G40 Cr V 5-2		
8.	L40H	G40 Cr 4		

LITERATURA

- [1] Bąk R., Burzyński T.: Wytrzymałość materiałów z elementami ujęcia komputerowego. WNT, Warszawa 2013.
- [2] Brzoska Z.: Wytrzymałość materiałów. PWN, Warszawa 1983.
- [3] Dyląg Z., Jakubowicz A., Orłoś Z.: Wytrzymałość materiałów. WNT, Warszawa 1997.
- [4] Jakubowicz A., Orłoś A.: Wytrzymałość materiałów. WNT, Warszawa 1978.
- [5] Lewiński J., Wilczyński A. P., Witemberg-Perzyk D.: Podstawy wytrzymałości materiałów. Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa 2010.
- [6] Lisowski A., Siemieniec A.: Wytrzymałość materiałów. Przykłady obliczeń – zadania. PWN, Warszawa 1973.
- [7] Łączkowski R.: Wytrzymałość materiałów. Wydawnictwo Politechniki Gdańskiej, Gdańsk 1996.
- [8] Niezgodziński M., Niezgodziński T.: Wytrzymałość materiałów. PWN, Warszawa 2009.
- [9] Niezgodziński M., Niezgodziński T.: Wzory, wykresy i tablice wytrzymałościowe. PWN, Warszawa 1977.
- [10] Wolny S., Siemieniec A.: Wytrzymałość materiałów. Teoria – zastosowanie cz. I. Uczelniane Wydawnictwa Naukowe – Dydaktyczne AGH, Kraków 2008.

